MEMORIE

DI MATEMATICA E DI FISICA

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

TOMO XXV.

PARTE PRIMA.

MODENA

PEI TIPI DELLA R. D. CAMERA.

MDCCCLII.

1852

INDICE

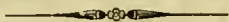
DELLE MEMORIE CONTENUTE

IN QUESTA PARTE I.ª DEL TOMO XXV.

RELAZIONE

DI UNA ORDINAZIONE DI ARCHETIPI E DI STRUMENTI METRICI

DATA DAL GOVERNO DI MODENA IN PARIGI

PER MEZZO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

Nella storia e tra i fasti, che segnan epoca memoranda e gloriosa degl' Istituti Nazionali fondati dalla pubblica o privata sapienza per l' avanzamento delle umane cognizioni e a tal fine protetti dalla munificenza de' Sovrani e de' Governi, egli è senza dubbio un titolo del più nobile compiacimento e degno della più commendevol menzione quello che le Accademie stesse o Comunanze scientifiche cooperino richieste di ogni loro senno e consiglio ai civili provvedimenti della più manifesta e generale utilità. Perocchè il pubblico servigio ch' esse rendono in simili casi ai beni e vantaggi della civile Società, oltre ad essere una specie di equo ricambio al grado di estimazione e d' onore in che son tenute e al favore onde sono animate e promosse dall' autorità de' Principi e de' Magistrati, raggiunge poi anche e compiutamente soddisfa l'ultimo scopo cui siffatte Istituzioni debbon proporsi, qual è di sovvenire ai comuni bisogni sì morali che fisici e crescerne la sociale prosperità mediante gli ottenuti perfezionamenti delle varie scientifiche applicazioni, avverandosi ognora e in ogni rispetto che *nisi utile quod facimus, stulta est gloria*. Egli è così che le principali Accademie della culta Europa e del nuovo Mondo civilizzato acquistarono il maggior loro lustro e la più giusta celebrità, coll' avvantaggiare cioè del frutto di loro speculazioni e scoperte le condizioni sociali e a Sè procurandone la pubblica

benemerenza. Di che a non produrre che un solo esempio, però il più luminoso, basti accennare le ampie e ardue operazioni cui diede impulso norma ed eseguimento l' Accademia delle scienze di Parigi per la più esatta determinazione della grandezza e figura della terra al divisato fine ottenutone di fissar un tipo naturale di misura invariabile, cui potessero adottare con intelligenza e favella comune tutti i popoli, importantissimo oggetto nelle mutue relazioni de' medesimi e pel quale il francese Istituto scientifico, anche senza i grandi nomi e le opere insigni che lo hanno illustrato, è a dire il primo e più benemerito in Europa fra simili Consessi della sapienza di una Nazione.

Per la buona ventura, qual è la saggezza di un Sovrano e del suo Governo del pari illuminati, offerivasi pure non ha guari alla nostra Società italiana delle scienze un' occasione propizia di prestar utilmente il proprio concorso ad un pubblico intendimento, parziale bensì ma dello stesso genere di quello che abbiam testè recato ad esempio, ed essa pure non ha mancato di coglierla e risponderne all' onorevol invito superiore di adoperarvisi con ogni premura. E siccome il risultamento più felice ha coronato a tale proposito le concordi mire e disposizioni dell'Autorità civile e del Corpo accademico, io penso così che sia di qualche pregio e importanza il presentare in questo scritto un breve sunto del pubblico servigio adempiuto dalla nostra Società, per tramandarne ai lontani e ai venturi la contezza; e sono ben lieto di aprirne con sì bello argomento, e quasi per una speciale e straordinaria continuazione degli Atti sociali, il Tomo vigesimo quinto delle nostre Memorie.

Un Sovrano Editto del regnante Duca e Auspice nostro Francesco V., in data de' 17 Ottobre 1849, portò a legge di abbandonar col principio del 1852 in tutta l'estensione de' Suoi Dominj le antiche misure, e di sostituirvi quelle del nuovo Sistema metrico decimale, riconosciuto incontrastabilmente il migliore, e dalla Francia, che lo rinvenne e perfezionò, adottato

dipoi e seguito praticamente. Fermava il Decreto medesimo che, a base delle nuove misure di lunghezza e di peso, se ne commetterebbero a Parigi gli archetipi da essere colà ben riconosciuti al più esatto paragone coi francesi prima che a noi si spedissero, e di tutto affidavasi l' adempimento al Ministro delle Regie Finanze, l' Eccellenza del Sig. Ferdinando Castellani-Tarabini che non indugiò a prenderne e realizzarne gli opportuni divisamenti. Fra i quali offerendosi il primo quello di aver in Parigi persona che per sapere atto fosse a ben regolare e garantire la confezione de' richiesti archetipi e per cortesia d' animo ne accettasse l' incarico, ne venne tosto al Ministro suggerita l' idea poter a ciò giovare la Società italiana delle scienze col mezzo di alcuno degl' illustri Membri francesi ond' essa cotanto si adorna. Rivoltone quindi conforme invito con pregiata Lettera Ministeriale al Presidente della Società stessa, il Sig. Cavaliere Stefano Marianini, non esitava questi a secondare un sì onorevole ed util progetto e sceglieva, per pregarlo dell' opera desiderata, il celebre nostro Collega straniero Sig. Biot, come quello che al merito più consumato ed eminente negli Studi fisici accoppiava la più profonda e sagace esperienza del caso, acquistata e divisa da lui coll' altro pur celebre nostro Collega Sig. Arago nei grandi lavori che recarono a compimento la misura dell' arco di meridiano da Dunkerque a Formentera. Saggia e avventurosa elezione fatta dal nostro Presidente che preveder non potea quanto il successo in realtà superato avrebbe i voti e l' aspettattiva!

In coerenza di tali premesse lo scrivente e Segretario della Società ebbe ordine di scriver lettera d' officio al prelodato Collega Sig. Biot, pregandolo e interessandolo a commettere in Parigi la fabbricazione dei desiati archetipi di misura, dirigerne di suo senno ed esperienza gli artisti, e assicurarne il più preciso paragone coi rispettivi archetipi legali della Francia. Il riscontro, in data 13 luglio 1849, alla mia domanda fu quale poteva attendersi da chi riunisce in sè al massimo grado la dottrina, lo zelo del ben pubblico, e la gentilezza dell' animo

e de' modi. Accolta infatti favorevolmente dall'illustre Geometra e Fisico la mia proposta, egli medesimo in una seconda lettera mi dichiarava quali motivi aveanlo indotto ad accettarla e così mi diceva: « *Lorsque vous m' avez écrit la premiére fois, pour me la confier, j' ai accepté votre proposition par plusieurs motifs. Le premier était le lien de confraternité scientifique qui m' attache à votre illustre Société: le second était l' obligation morale qu' ont à mes yeux les hommes de science, de méttre au service des gouvernemens, qui veulent faire une entreprise utile, tous les moyens qu' ils peuvent fournir pour la bien éxécuter. Enfin, une derniére consideration, qui se rattache à celle là résultait de quelques indications contenues dans votre premiére lettre, les quelles me faisaient craindre qu' on ne vous eut donné des renseignements peu éxacts, sur les moyens les plus propres à effectuer convenablement l' opération importante, que l'on s' était proposeé dans votre pays.* » E già, quanto al primo degli accennati motivi egli erasi espresso innanzi: « *L' intervention d' une Société scientifique aussi élevée que la Société italienne des sciences, m' a paru ne devoir étre employée, qu' à des obiets d' une importance et d' une utilité véritables. C' est dans ces sentimens que je suis entré dans tous les détails qui m' ont semblé necéssaires pour atteindre ce double but.* » Li quali sentimenti, come appalesan l' animo retto nobile ed elevato donde partivano, così non potean concepirsi più cortesi e lusinghieri verso il mio Governo e la Società nostra cui erano indirizzati.

Per quanto concerne ai particolari dell' ordinazione avvedutamente da Biot suggeriti, egli proponeva innanzi tutto che, a scopo e vantaggio sì civile che scientifico, il nostro Sistema delle nuove misure fondamentali dovesse comporsi di parecchi archetipi esatti e in ottone del Metro e del Chilogramma, di un Comparatore, di una Macchina per la division rettilinea, e di una Bilancia di precisione. Il lusso dei grandi Campioni in tutto platino è ora da buoni argomenti non approvato, e utilmente se ne preferisce il maggior numero di essi in ottone

semplice, non di leggieri ossidabile quanto il ferro, e la duplice terminazione del metro *a piani* e *a segni*, che permettono la conferma successiva e scambievole del conservato valore o ne accusano le avvenute relative alterazioni. Mancati poi all' eccellenza di simili costruzioni gli Artisti francesi più abili e intelligenti, quali erano Fortin e Gambey, trasceglieva il Signor Biot i più degni e riputati de' loro successori per affidar ai medesimi la confezione dell' indicato Sistema; nè di certo poteva egli farcene una scelta e proposta migliore, quanto commettendo la parte dei pesi, cioè bilancia e chilogrammi, a M.r Deleuil, Ottico e Meccanico distintissimo, e quella delle lunghezze, cioè comparatore, macchina di divisione e metri, a M.r Perreaux, allievo del Gambey e giovine di maturo ingegno, entrambi noti e premiati per sagacità e importanza di artistiche invenzioni dall' Istituto francese delle scienze. E ben a ragione consigliava e prendeva egli stesso il Biot ogni cura ed avvertenza in proposito; poichè in siffatte ordinazioni (cito le sue parole) « *il faut soigneusement eviter de s' adresser à de simples marchands, qui vous enverraient des objets de commerce achêtés de mains tierces, au lieu de pieces scientifiques* » aggiungendo egli poco dopo « *en fait d' appareils de mesures, il vaut mieux n' en pas avoir que d' en avoir d' imparfaits et d' inéxacts. Ceux-cy, quelque peu qu' on les paye, sont toujours trop chers.* » A sopravvedere infine l' opera de' nominati Artisti nella fabbricazione sì degli archetipi che degli strumenti, ed accertarne il buon esito, riflettendo egli alla grave sua età di oltre il decimo quinto lustro che avrebbe potuto non consentirli di attendere sino al compimento di siffatti lavori, delicatamente quanto provvidamente, associavasi nell' assidua direzione de' medesimi un Fisico nel vigore degli anni e all' uopo il più idoneo per ampiezza e profondità di cognizioni, speculative non meno che sperimentali, qual è ovunque noto e apprezzato il Sig. Regnault. Del quale suo intimo Amico e ben degno Collega, così nell' Accademia delle scienze come nell' insegnamento pubblico al Collegio di Francia, ove insieme

dimorano, egli attestavami con ogni ragione « *que personne mieux que lui pourrait mener l' éntreprise à bonne fin; car je puis vous en dire qu' aucun physicien en Europe ne posséde, au meme degré, l' esprit de precision, l' intelligence des appareils, et la connaissance pratique des arts qui servent à les éxécuter.* »

Una condizione ancora, e assai rilevante, restava da considerarsi e adempiersi per l'ottima e più fruttuosa riuscita del progetto, nè questa pure sfuggiva alla perspicace attenzione e premura del Cav. Biot che non ommise fin da principio di raccomandarmela. Ed era che fosse dal mio Governo spedita a suo tempo in Parigi persona instrutta di meccanica e di arti, e incaricata di apprendere colà presso gli stessi fabbricatori la costruzione e l' uso più ragionato e preciso delle nostre macchine, assistere alle più delicate sperienze di confronto degli archetipi di misura, e ricevere la formale consegna degli uni e delle altre, liberandone in tal modo, come richiedevan giustizia e convenienza, da ogni ulteriore garanzia e a termine di operazioni osservate in comune, gl' insigni due Fisici che avean impegno di risponderne. Intorno a che il Sig. Biot esprimevasi chiaramente nella sua prima sovracitata: « *Le meilleur parti à prendre, afin d' assurer complettement le succés, ce serait d' envoyer ici, avant l' emballage, quelque jeune Physicien, éxact et laborieux, qui assisterait aux comparaisons, prendrait une connaissance pratique des appareils, et se mettrait en état de diriger les applications que votre Gouvernement en voudrait faire. Trois semaines de séjour ici suffiraient pour cela, s' il etait déja exercé aux operations physiques, et surtout s' il y portait le zéle necéssaire.* » E sopra ciò insistendo nella seconda lettera del 4 Dicembre 1849, soggiungeva: « *Il est donc indispensable que nous (M.r Regnault et moy) soyons déchargés moralement de toute responsabilité ulterieure, par une personne qui en aura elle même (des instruments) verifié le bon emploi. Enfin, Monsieur, permettez à ma vieille experience de vous adresser un conseil, pour vous méme. C' est que si, comme votre lettre l' indique, vous etes chargé de diriger l' application que votre Gou-*

vernement veut faire de ces appareils, rien ne pourra remplacer pour vous la pratique personnelle que vous aurez acquise de leur usage, et de leur valeur physique, si vouz venez les etudier d'avance avec nous à Paris. » Realmente, in seguito al primo da lui emesso consiglio, l' Eccellenza del sunnominato Ministro delle Finanze invitava il nostro Presidente a proporle Soggetto da inviar a Parigi coll' accennata Missione, al che per non so quale e troppo gentile preoccupazione in mio favore, il Signor Cav. Marianini rispondeva (ingenuamente ne arrossisco) non conoscer egli chi meglio di me assumer potesse e lodevolmente sostenere quell' ufficio, sì onorevole a un tempo e difficoltoso. Il qual voto e giudizio di amichevole parzialità presentato all' Altezza Reale del Principe nostro riscuotevane l' approvazione Sovrana, e con essa la facoltà concedutami di recarmi per la detta Missione a Parigi e in qualunque altro luogo reputassi all' uopo giovevole. Confesso il vero che, per motivi miei particolari e non lievi o indifferenti, molto mi ripugnava dapprima di accettare l' offertomi onore e di procurarmene la dotta e piacevole distrazione di un lungo viaggio interessantissimo, e proposi pure altro modo di verificazione degli strumenti e delle misure da eseguirsi fra noi, cui però e a buon dritto il Signor Biot non assentiva. Ma le persuasioni di lui, gli eccitamenti di savj ed amici, e soprattutto uno spiegato Cenno verbale del benigno Sovrano mi vinsero, ed io ne sono stato poscia ben pago di aver piegato all'altrui e superiore il mio volère. Circa il dispormi all' impresa e il soddisfarne conscienziosamente al maggior segno la contratta pubblica obbligazione, io ne debbo ancora gli opportuni ammonimenti e le tracce al senno e alla benevolenza del Biot, e mi è dolce attestargliene il mio animo riconoscente, riportando quì un brano di sua lettera colla data 30 Maggio 1850: « *Votre séjour ici, qui devra peut etre durer un mois, ne sera pas pour vous un tems d'amusement, ou de loisir, mais de travail experimental assidu. Quand nous vous aurons introduit dans l'attelier des Artistes, il faudra vous mettre en rapport avec eux par un contact intime, et presque de*

chaque jour; il faudra vous initier dans leur procédés d' éxécution et d'applications. Nous vous expliquerons ceux-cy, sans doute, et M.r Regnault surtout, plus disponible corporellement que moi, vous les exposera pratiquement sur les instruments mêmes. Tout cela joint à un éxercice personel et réitéré des opérations, vous les rendra familiéres, vous en donnera une complette intelligence de leurs details, et vous mettra en état de les éxécuter facilement, surement, avec toute la rigueur qu'elles éxigent, si vous y êtes suffisamment préparé. Mais ceci est une condition presque indispensable pour pouvoir vous les rendre propres, en si peu de tems, de maniére à les transporter utilement dans votre pays. Si vos études anterieures ont été purement abstraites, vous aurez beaucoup de peine à réussir, comme vous devez le souhaiter. Si au contraire, comme je l' éspere, vous etes exercé à la connaissance et au maniement des instruments de precision, surtout des instruments et des observations astronomiques, vous etes certain du succés . . . . Pardonnez moi, si j' ose vous parler avec tant de liberté. Je ne dirais pas autre chose à un Laplace, ou à un Lagrange (eravamo ben lungi da questo al caso mio), *et je ne croirais pas leur manquer de respect. Ce que je vois, ce que vous voyez sans doute aussi, avant toute chose, c' est l' accomplissement des vues si honorablement libérales de votre gouvernement; et il ne peut être obtenu qu' aux conditions que je viens de vous exposer.* » Che io abbia profittato di così nobile e giusta lezione, praticandola nel mio soggiorno a Parigi, era di mio stretto dovere il farlo, come d' altri è il merito di avermela data.

Da successiva lettera di M.r Biot del 7 Luglio intanto venutomi avviso esser pressocchè al termine la costruzione de' tipi di misura e delle macchine, in sul declinar di quel mese io mi posi in cammino verso la Metropoli della Francia e, soffermatomi brevemente di passaggio a Milano, Ginevra e Lione, vi arrivai felicemente il terzo giorno d' Agosto. Nel mattino seguente, non riscosso ancora dallo stupor primo alla vista per me novella di tanti magnifici oggetti e al rumor populoso di

quella grande Città, io movea tosto in traccia del mio Direttore e Maestro e, non trovatolo in ora di pomeriggio al Collegio di Francia, lo raggiunsi che passeggiava solo e ragionando, come ha costume, co' proprj pensieri sotto le ombre più tacite e romite degli annosi boschi del Lussemburgo. Accolto da lui con ogni amorevolezza, da quel punto io più non me ne divisi godendone l' istruttiva conversazione domestica, l' assistenza migliore, e i tratti più leali e cortesi della francese ospitalità. Poco appresso io m' incontrava col non meno dotto e gentile di lui Amico il Sig. Regnault che immediatamente mi accompagnò e introdusse al laboratorio meccanico del Sig. Perreaux ove, durante la mia dimora in Parigi, mi recai poscia pressocchè ogni giorno non festivo ad acquistarne cognizioni ed esercizio pratico della Macchina di divisione e del Comparatore, come più tardi fui condotto al Negozio e Gabinetto del Signor Deleuil ad apprendervi la costruzione e l'uso più delicato della Bilancia di precisione. Abbiansi a questo luogo li due egregi Artisti i miei pubblici ringraziamenti per la pazienza e bontà che mi dimostrarono, spiegandomi il magistero e maneggio delle dette macchine. Ora non è del mio assunto il trattenermi a dire di altre cose che mi colmaron di maraviglia e puro diletto nel mio soggiorno colà; ma non posso e non debbo ommettere di accennare che, alla prima settimanale Adunanza pubblica della francese Accademia delle scienze il dì 5 di Agosto, presentato innanzi dal Sig. Biot al celebre Segretario il Sig. Arago, ne venni onorato di accoglienza e seggio distinto fra quell' Areopago di moderna sapienza, dove non ha molti anni cogli stessi Arago e Biot sedevano i Laplace e i Lagrange; distinzione ed onore che compartivasi di certo, anzi che alla mia meschinità individuale, al grado e alla rappresentanza mia, qual Membro e Segretario della nostra Società Italica, e quasi che pel mio intervento personalmente si unissero e fraternizzassero gl' Istituti scientifici delle nostre Nazioni. E ben io mi compiaceva singolarmente, recandomi ogni volta in appresso a quelle tornate accademiche, di vedervi tra il fiore degli altri

Dotti gli stranieri nostri Colleghi, il venerando Chimico Thénard, il sublime Geometra Cauchy, il sagace Fisico Regnault, e per forza di mente calcolatrice il Colombo del nostro Sistema planetario, il Le-Verrier, ad uno de' quali, il Cauchy, mi strignea pur dolcemente un vincolo di antecedente amicizia, ch' egli di più grato affetto mi accrebbe nell' amena sua villa di Sceaux. Come ne avea formato pensiero, io pur nutriva in me il desiderio di chiedere in grazia la parola per aprirne i sinceri miei sensi a sì ragguardevol Consesso, e svolgerne altresì qualche mia idea di soggetto astronomico; ma ne fui rattenuto da un misto di rispetto e timore, suscitatomi quello alla presenza di tanta dovizia dell' altrui sapere, questo dall' intima persuasione della mia inopia.

Al cominciar di Settembre il sistema de' nostri campioni e strumenti metrici era compiuto. Si passava quindi per noi ad eseguire le operazioni più diligenti e scrupolose dei confronti coi simili archetipi francesi di misura. Il tipo fondamentale sì del metro che del chilogramma conservasi, com' è noto, ed è gelosamente custodito negli Archivj Nazionali. Da esso determinaronsi esattamente altri due tipi di ambe le specie da concedersi, colle debite precauzioni, all' uso e alle inchieste, e affidati in custodia, l' uno al Ministro dell' Interno, e l' altro al Direttore e Astronomo principale dell' Osservatorio di Parigi; chè trattandosi di unità primigenia di misura immediatamente dedotta da un meridiano terrestre, com' essa fu domandata alla scienza del cielo, così a questa scienza ei conveniva raccomandarne un modello per la conservazione e le verificazioni posteriori. All' istanza fattane dal Sig. Biot consentiva graziosamente il Sig. Arago di paragonar le novelle nostre misure con quelle dell'Osservatorio, e il secondo Astronomo Sig. Laugier, specialmente incaricato di queste e dell' esercizio delle relative Macchine, un eccellente Comparatore e una squisita Bilancia, l' uno e l' altra di Gambey, colle più obbliganti maniere e con zelo pari all'eminente di lui merito si associò agli esperimenti delle nostre comparazioni, e vi ebbe non poca parte.

Ripetutamente e colle maggiori cautele praticaronsi tali prove e sperienze all' Osservatorio, intervenendovi coi Signori Biot e Regnault e con me li Meccanici Signori Perreaux e Deleuil, e l' ottenutone risultamento, soddisfacentissimo, fu quale si leggerà nel compilatone processo verbale che riporterò in fine. Di presente mi torna grato il rammentarmi che, quasi a buon augurio celeste delle nostre operazioni, mentre la mattina del 10 Settembre recatomi per tempo con Perreaux all'Osservatorio vi attendeva nella grande Sala che arrivassero gli altri, scese dall' alto il valente Astronomo Sig. Mauvais che, serenata la notte alla macchina equatoriale vi avea fatto util caccia, cogliendovi la fuggitiva Cometa telescopica, scoperta però a sua insaputa, e forse per atmosfera più propizia, il 5 Settembre da Brorsen, e il 29 Agosto da Bond a Cambridge. Del rimanente, oltre i confronti eseguiti all' Osservatorio sia pei metri come pei chilogrammi, altri pure ne vennero praticati presso M.r Deleuil alla nostra Bilancia e col Chilogramma tipo del Ministero, di che sarà detto nel Processo verbale sovraccennato.

Quest' atto che in certo qual modo legalizzar dovea le istituite sperienze di verificazione, e accompagnarmi la formale consegna del nostro sistema di misure, consigliato da Biot e concorde al suo motto e procedere *per vias rectas*, venne redatto ed è pregevol opera di Regnault, apponendovi poscia ciascuno le nostre firme, a testimonianza di convincimento e giudizio comune. Conchiuso l' atto medesimo e segnato in duplice originale presso M.r Biot al Collegio di Francia la mattina dell' 11 Settembre, io lasciava colle più grate rimembranze Parigi il 13 susseguente, e pressato da forti ragioni a rimpatriare retrocedetti dirittamente sui miei passi e giunsi a casa con prospero viaggio il 24 dello stesso mese. Frattanto erano già stati presi a Parigi e a Modena gli opportuni concerti per assicurare che nel lungo cammino e trasporto quell' acquisto de' nostri tipi e meccanismi non avesse a soffrire una benchè minima scossa ed alterazione, che in oggetti di tanto riguardo e con tanto studio determinati avrebbe rendute vane le solle-

citudini e la spesa di procurarseli. Per l' imballaggio migliore e più garantito il Sig. Regnault ebbe cura gentilmente d'istruirne gli Artisti e prescriverne il modo e le precauzioni più minute. Una volta chiuse e impiombate le Casse, di ampio volume e di gran peso, alla Dogana centrale di Parigi, ottenni promessa io medesimo da quell' urbanissimo Sig. Direttor generale che esse trascorrerebbero la Francia senza che più fossero aperte; cosicchè inviandole come fissammo per Marsiglia e Livorno direttamente, in quest' ultimo porto sarebbero esse ricevute nell' integrità loro e nella perfetta condizione della loro partenza. Dal canto del mio Governo l' Eccellenza del Sig. Conte Giuseppe Forni, Ministro per gli Affari Esteri, avendo rivolto un ufficio all' I. R. Governo di Toscana e pregatolo a concedere il transito di quella spedizione di macchine pe' suoi Stati esente dal diritto di visita della Finanza, n' ebbe il più grazioso e favorevol riscontro, fino ad esserne accordato il transito stesso libero da tassa e dazio qualunque. Il convoglio avviavasi effettivamente verso la metà del Novembre, ma per una malintesa degli speditori da Marsiglia esso trasportato era e consegnato in Genova, anzichè in Livorno, e da Genova, attraversato lo Stato di Parma, esso quì arrivava il dì 7 di Dicembre. Fortunatamente il commesso errore e cangiamento dello stradale prefisso non produsse alcun sinistro effetto di apertura e visita doganale delle Casse, o le raccomandazioni altrui ne fossero rispettate, o piuttosto l' avviso del contenuto risparmiasse di lacerarne in alcuna parte i raddoppiati involucri; chè altrimenti di certo non era possibile aprirle. Di fatto all' eseguirsene presso questo Ministero di Finanza, con legale formalità e colle ordinate avvertenze indicateci dai fabbricatori francesi, all' eseguirsene diceva l' accurato riconoscimento fummo tutti lieti e concordi nel giudizio che le Casse ci erano pervenute intatte e senza il minimo indizio di esterno squarcio e lesione che accusasse il tentativo anche solo di esplorazione interna. E come ad uno ad uno ne furono estratti e riscontrati da noi colle Note di spedizione tutti gli oggetti racchiusi, così non

potemmo non ammirare l'eccellente modo usato dell' imballaggio, perchè niuno di quelli riportasse dal tragitto il più lieve detrimento. Nè si creda queste riflessioni di niuna importanza o di picciol rilievo; poichè, ripeto, anche un lontano dubbio e una tenue incertezza di alterazione ignota de'nostri archetipi di misura dalle fissate condizioni comparative a quelli di Parigi, annullava pressochè irrimediabilmente il buon esito ottenuto del mio viaggio; laonde negli archetipi stessi più non avremmo il vanto e la fiducia di possedere la precisa parte del meridiano terrestre, qual in natura si trova e ne è stata dedotta; e insomma ne avremmo gittati al vento pensieri tempo e dispendio, fallitone del pari e deluso il pubblico servigio.

Tocchiam ora di volo i singoli oggetti acquistati e componenti il nostro Sistema di misure metriche:

1. La Macchina per la division rettilinea del Perreaux, posata sopra un banco a legno di maogani con piedi o sostegni di ferro fuso, ha la vite micrometrica del passo di mezzo millimetro e lunga un metro e due decimetri: è la prima, costrutta dall'Artefice inventore, di tanta lunghezza di vite, col vantaggio di poter dividere un campione di metro senza traslocamento di questo, o *sans raccord* come dicono i Francesi. Essa porge risultamenti della massima precisione mediante l' artificio ingegnoso, che l' Autore immaginava modificandone il metodo di Ramsden, e da lui detto *Sistema a frazioni*, e consiste nella scannellatura spirale ond' è solcata la grossezza del cerchio graduato formante la testa della vite, e in una ruota dentata concentrica ad esso cerchio; artificio che è pur applicabile alla division circolare.

2. Il Comparatore, bello e grande stromento dello stesso Perreaux, posato come l'altro sopra banco a legno di maogani e con simili piedi, gareggia per isquisitezza e perfezion di lavoro con quello di Gambey all'Osservatorio di Parigi, e lo sopravvanza per l' aggiunta del moto orizzontale di separazione dei due microscopj anteriori nel senso della lunghezza della macchina, sì che i microscopj medesimi possono al bisogno

allontanarsi o avvicinarsi, e per l' aggiunta pure, in uno di essi, di picciol telajo in ferro con bulino all' uopo di tracciar qualche linea o segno arbitrario, il che molto giova in alcune delicate comparazioni.

3. Tre Archetipi del metro in ottone, diligentemente lavorati e divisi da Perreaux, tutti terminati a piani, o come dicono *à bouts*, distinguonsi uno dall' altro pei Numeri 1, 2, 3 scolpiti nella grossezza e a metà lunghezza di ciascuno. A conservazione, ciascun d' essi è adagiato lievemente, contenuto da cuscinetti di panno, e ben serrato a chiave entro propria cassettina di maogani. Appena io potrò farlo, non mancherò fra le prime cure, col mezzo del Comparatore e della macchina di divisione, di costruirmi altro campione di metro a segni, o come dicono *à traits*, che è sempre util cosa di avere e adoperare all' opportunità.

4. La Bilancia di precisione, egregio e fino lavoro di M.r Deleuil, con robusto albero e armatura d' ottone, con sospensione a coltello e punte d' acciajo sopra piani di agata, e con lungo indice a esterna vite per aprirne o chiuderne le oscillazioni, è la prima che siasi costrutta sopra base o tavola di ferro fuso, inverniciata e levigatissima, escludendone il legno per le troppo facili alterazioni. Chiusa entro cassa con pareti a cristallo, due delle quali si alzano e si calano a *coulisse* contro ciascun piattello per collocar in questo i pesi, le operazioni di equilibrio vi si effettuano in tal modo ad aria non agitata; e sensibile poi essa al mezzo milligramma può sostenere la carica di due chilogrammi in ciascun piattello. Al di sotto de' quali bacinetti essendo praticato un foro nella tavola o base di ferro, con appositi uncini è dato di sospendere inferiormente un corpo e pesarlo nell' acqua distillata o in altro liquido qualunque.

5. Tre Archetipi del chilogramma in ottone massiccio, preparati dallo stesso Deleuil, e di forma cilindrica terminata da una parte a bottone, sono esattamente rinchiusi e custoditi in altrettanti astucchi a interna fodera di velluto. Non distinguendosi essi uno dall'altro per alcun segno superficiale, che sarebbe

dannoso, e volendo tuttavia riconoscerli, noi quì abbiam apposto esteriormente all' astucchio di due de' medesimi un viglietto coi numeri I e II, che vale a non confonderli fra loro e col terzo, mancante di esterna indicazione e che appelliamo O.

6. Un Chilogramma di ottone massiccio, spezzato in una serie decrescente dal mezzo chilogramma al gramma, e dell' adottata forma comune in ciascun pezzo, è collocato e rinchiuso in una cassetta di noce a fodera interna di velluto. Aggiungesi altra cassettina di maogani, entro cui son distribuite le frazioni del gramma, dall' unità di esso al mezzo milligramma, in laminette di platino e col proprio numero scolpito in ciascuna a fine di riconoscerle. Tre più grandi custodie di noce internamente foderate a velluto rinchiudono due grossi pesi o marchi massicci di ottone, di dieci chilogrammi ciascuno, e un simile terzo di cinque chilogrammi per servire alle pesate delle cariche maggiori. E tutto ciò, a corredo della Bilancia, e di specifico valore in peso ben determinato, è opera di M.r Deleuil.

7. Tre Termometri normali, o campioni, a mercurio di M.r Fastré, colle divisioni eseguite alla macchina sul vetro e per la lunghezza del tubo, hanno la scala di parti arbitrarie, ma riducibile facilmente alla centigrada mediante i fissati estremi del disgelo e dell' ebullizione dell' acqua. Il più sensibile e a bulbo maggiore porta una gradazione di ben seicento parti che leggonsi distintamente coi loro numeri da 0 a 10 in sei rami. Gli altri due, con bulbo e scala minore possono anche servire come igrometri fra li termini assegnati di 0° e 20° del termometro centigrado.

È questa che abbiam descritta la compiuta serie dei Mezzi di misura costrutti per noi e che ci furono trasmessi nello stato più perfetto. La singolare cortesia de' Signori Biot e Regnault volle pur aggiungervi il dono di un Esemplare delle Ordinanze e de' Regolamenti francesi intorno l' attuazione colà stabilita del Sistema metrico, accompagnato dal Volume di tavole de' relativi disegni. Ne pare di poter dircene lieti e a ragione superbi di una collezione d' oggetti così ben eseguiti e scientifi-

camente preziosi. A ciò ne abbiam conforto e testimonianza dal più competente giudizio, quello del medesimo Biot che scrivevami in data del 28 Ottobre 1850: « *Si tout cela arrive à bon port, vous aurez la plus parfaite, et la plus complette collection d' instruments qui ait été jamais combinée et confectionée, pour établir un nouveau Systéme de Mesures. La Machine à diviser en particulier est d' une précision superieure à tout ce que l' on aurait pu même espérer.* »

Di seguito immediatamente al sin quì narrato la Reale Altezza del mio augusto Sovrano degnava di approvare per l' organo del Ministro di Finanza e comandava si eseguisse la mia sommessale proposta della più conveniente distribuzione e del più attendibile conservamento degli archetipi e strumenti metrici, in modo analogo al praticato dalla Francia. Disponevasi quindi che un Archetipo sì del metro che del chilogramma fosse depositato, per custodirvelo gelosamente, nell' Archivio Segreto della R. A. S., che altro Archetipo di ambe le specie rimanesse in guardia e sotto gli ordini esclusivamente dell' encomiato Ministro, e che la terza coppia di Archetipi, insieme con tutte le Macchine, fosse consegnato alla custodia e responsabilità del Direttore della Specola, per essere da lui colle debite cautele concedute agli usi e alle operazioni della Commissione de' pesi e delle misure. Non avendone trovato libera e idonea stanza nel recinto stesso della Specola, compiacevasi in persona l' A. S. R. di assegnarne all' uopo un ben riparato e decoroso appartamento del suo Palazzo, in comunicazione pure coll' Osservatorio, dove trasportata l' intera suppellettile metrologica e montativi gli stromenti, mi fu conceduto di farne tosto ricoprire da grandi casse trasparenti o a cristalli, per meglio premunirli e al pari della Bilancia, il Comparatore e la Macchina di divisione. Partecipate poi le Sovrane Risoluzioni con venerata Lettera Ministeriale al nostro Presidente, il Cav. Marianini, egli ed io, per adempierle regolarmente, ci occupammo di riscontrar con ogni attenzione e sottigliezza lo stato e valor comparativo de' nostri Archetipi di lunghezza e peso, innanzi di farne

altrui la formale consegna. Fummo però ben soddisfatti e godenti per tali prove alla Bilancia e al Comparatore, che appieno ci confermarono i risultamenti delle analoghe sperienze in Parigi; donde la fisica certezza che niun cangiamento è stato prodotto in oggetti così delicati dal non breve loro tragitto di terra e di mare. Noi abbiam trovato infatti eguali perfettamente fra loro i metri tipi, segnati 1 e 3, e soltanto quello segnato 2 un poco più lungo, ma direbbesi insensibilmente e meno di un millesimo di millimetro, a giudizio di coincidenza microscopica. E dei chilogrammi tipi abbiam trovato eguali fra loro esattamente li due O e I, e alquanto maggiore, *plus lourd*, quello segnato II, di un milligramma prossimamente, avendo avvertito innanzi che l' aggiunta di un milligramma trasporta di mezzo grado e innalza dall'altra parte il punto medio della piccola oscillazione dell' indice. Le quali osservazioni furono tutte da noi raccolte alla bassa e costante temperatura dell' ambiente di circa — 1°, 5 del termometro centesimale. Pertanto la mattina del 23 Gennajo 1851 il Presidente ed io compiemmo l' ufficio delle due Consegne, l' una del metro 1 e del chilogramma I al R. Archivio Segreto, e l' altra del metro 2 e del chilogramma II al Ministero di Finanza, accompagnando ciascuna di un' attestazione da noi firmata delle riconosciute condizioni relative dei trasmessi Archetipi. E così ebbe termine l'assunto incarico della nostra Società scientifica verso l' Autorità governativa.

Al punto di chiudere la presente qualsiasi esposizione io non posso a meno di rallegrarmi del pieno e felice successo dalla mia pubblica missione conseguito per l' onore, che ne ridonda, non al debole istromento ch' io ne fui, bensì primamente al provvido e saggio Sovrano che decretava pe' suoi Dominj l' ottimo Sistema delle misure metriche, ne divisava il tempo e i modi, ne largheggiava il dispendio, utile non che necessario, e di Sua Regale munificenza volea ringraziati delle tante loro premure e gentilezze all' intento nostro li due dottissimi Biot e Regnault, presentando per mio mezzo Quello di

una tabacchiera d'oro colla R. Cifra in grossi brillanti, e Questo di un anello a brillanti similmente prezioso. Per l'onore poscia io me ne allieto che ne discende all' autorità di un operoso Governo e di un intelligente Ministro che sanno promovere di siffatta guisa il pubblico bene e la gloria del paese. Nè ripeterò quanto io goda per l'onore che ne dividono i due gentili e sapienti di Parigi che di loro senno e consiglio cotanto nell' impresa ci giovarono, mentre ne è prova ed espressione continua questo mio scritto. Ma di certo non è ultima nè tenue la parte di onore che ne viene altresì alla nostra Società Italiana delle Scienze, al qual riflesso io mi sento pure più lusingato e giulivo.

Qual suggello e corona dell' avventuroso riuscimento io quì reco per disteso e in originale il verbale Processo delle operazioni, giudicato, e ben a ragione, del pregio e valore di una Memoria scientifica dal Sig. Cav. Biot, che accompagnavalo d'una sua compitissima al nostro Presidente Cav. Marianini, il quale in conformità rispondendogli, ne terminava da questo lato e riguardo la comunicazione accademica.

NOTA.

È duopo sapere che le Sovrane Risoluzioni dell' Editto 17 Ottobre, citato alla pag. (2) precedente, per adottare fra noi il Sistema metrico decimale, erano state prese e combinate coll'Autorità esecutiva circa cinque mesi innanzi la pubblicazione dell'Editto medesimo. Perciò l' intervenzione onorevole della Società Italiana e le primitive intelligenze coi dotti Fisici francesi precorsero di qualche tratto la detta pubblicazione, ma si riferivano e si appoggiavano ad essa per così dir virtualmente. Con quest'avvertenza dispare e cessa un anacronismo che facilmente rileverebbesi fra le date dei citati documenti e quanto io ne ho esposto alla pagina (3).

PROCÉS VERBAL

DES OPÉRATIONS DE VÉRIFICATION QUI ONT ÉTÉ FAITES SUR LES INSTRUMENTS ET SUR LES ÉTALONS DE MESURE MÉTRIQUES ET PONDÉRAUX DESTINÉS AU DUCHÉ DE MODÉNE

Les instruments commandés pour le Duché de Modéne consistent en:

1.° une Machine à diviser la ligne droite,
2.° un Comparateur,
3.° une Balance.

1.° La Machine à diviser la ligne droite porte une vis de 1,^{m}20 de longueur; elle permet, par consequent, de diviser le métre dans toute la longueur, sans raccord. Elle est munie, en outre, de tous les appareils nécessaires au calibrage des tubes capillaires, à leur division en capacités égales, et à la vérification posterieure de ces divisions.

L' exactitude de cette machine a été vérifiée en traçant des divisions millimétriques sur deux régles en biseau pouvant glisser l' une sur l' autre. On s' est assuré qu' en établissant la coïncidence entre deux divisions quelconques des deux régles, la même coïncidence éxistait pour toutes les autres divisions, lors même que l' observation était faite à la loupe. Cette épreuve suffit pour établir la précision parfaite de la vis.

2.° Le Comparateur permet de comparer entre eux, non seulement les métres à bouts, mais encore les métres à traits, et même de comparer les métres à bouts aux métres à traits. Enfin, on peut s' en servir pour comparer des mesures quelconques, de toute dimension, aux mesures métriques. On s' est assuré que cet instrument est comparable, pour la pré-

cision, aux meilleurs instruments de cette espéce. En opérant dans des conditions convenables, on peut évaluer des différences qui ne dépassent pas 0,001 de millimétre.

Ces deux instruments ont été construits par M.r Perreaux; M.r Bianchi s' est exercé à leur maniement sous la direction de cet habile Artiste.

3.° La Balance a été construite par M.r Deleuil sur le modéle qui est généralement adopté ici; cependant un perfectionnement important y' a été aporté. Dans les balances ordinaires la colonne verticale qui porte le fléau, pose sur une base en bois, laquelle en se déformant avec le temps ou par l' humidité, détruit l' ajustement de l' appareil. Dans la balance exécutée pour le Duché de Modéne, la colonne pose sur une base en fonte de fer, munie de vis calante, ce qui assure, à la fois, la stabilité et l' invariabilité de ses parties essentielles. Nous nous sommes assurés que cette balance, chargée de 1 kilogramme sur chaque plateau, accuse nettement le $\frac{1}{2}$ milligramme. Le maximum de charge sur chaque plateau ne doit pas dépasser 2 kilogrammes.

Les mesures étalons consistent:

1.° en trois métres à bouts, en laiton, construits par M.r Perreaux;

2.° en trois kilogrammes en laiton, confectionnés par M.r Deleuil, et ayant la forme adoptée en France.

Nous allons décrire les opérations de vérification aux quelles ces mesures ont été soumises.

Comparaison des Métres étalons.

Les Métres étalons ont été ajustés par l' Artiste jusqu' à ce ils ne presentassent, par rapport au métre normal, que des différences s' elevant au plus à 0, 003 de millimétre. Ils ont été comparés, ensuite sur l' excellent comparateur de Gambey appartenant à l' Observatoire de Paris,

1.° avec le métre étalon à bouts, en platine, du Bureau des longitudes,

2.° avec un métre à traits, en laiton, appartenant également au Bureau des longitudes, et qui avait été précédemment vérifié par rapport à l' étalon en platine, à une époque ou la température ambiante était trés voisine de 0°.

Comparaison des Métres de M.r Perreaux avec l' étalon en platine du Bureau des longitudes.

Chaque division du Comparateur égale $0^{mm},002$.

Métre N. 1.

1.ere Détermination — Métre N. 1. = Métre en platine + $101,^{div.}5$
2.e » » » — Métre N. 1. = Métre en platine + 101, 0
} moy = $101,^{div.}25 = 0^{mm},2025$.

Ainsi, d' aprés ces déterminations, le métre N. 1. serait plus long que l' étalon en platine de $0^{mm},2025$. Mais ces deux métres ne doivent étre égaux qu' à la température de 0°. Or la température ambiante était, au moment des observations, de 21°, 35; il faut donc retrancher de la longueur du métre en laiton la quantité dont ce métre se dilate plus que l' étalon en platine pour 21°, 35. Si l' on adopte la différence des coefficients de dilatation du laiton et du platine, telle qu' on la déduit des nombres donnés par l' annuaire du bureau des longitudes, on trouve qu' à 21°, 35 le métre en laiton doit être plus long que celui en platine de . . . . . . $0,^{mm}2181$
la mesure directe a donné 0, 2025

Différence . . . . . 0, 0156.

Le Métre en laiton N. 1. serait donc trop court à 0°, de $0,^{mm}0156$.

Métre N. 2.

Métre N. 2. = Métre de l' Observatoire + $102^{D},4 = 0,^{mm}2048$
température ambiante . . . . . 21°, 4
la différence calculée d'aprés les coefficients de dilat.... 0, 2181

la différence entre les deux métres à 0° serait donc de.... $0,^{mm}0133$.

Métre N. 3.

1.ere Détermination — Métre N. 3. = Métre en platine de l' Observatoire + $104,^{D}0$
2.e » » » — Métre N. 3. = Métre en platine de l' Observatoire + 104, 0
3.e » » » — Métre N. 3. = Métre en platine de l' Observatoire + 104, 0
} moy = $104,^{D}0 = 0,^{mm}208$[...]

température ambiante . . . . 21°, 35.

D' aprés le calcul, le métre en laiton doit être plus long que le métre en platine de 0, 2181

la différence entre les deux métres à 0° serait donc de... 0,^{mm} 0101.

En résumé, d'aprés la comparaison directe que nous avons faite des étalons en laiton avec le métre normal en platine, les étalons en laiton, pris à 0°, seraient trop courts

le N. 1. . . . . de 0,^{mm} 0156
le N. 2. . . . . de 0,^{mm} 0133
le N. 3. . . . . de 0,^{mm} 0101.

Mais cette comparaison directe ne peut pas inspirer de confiance, à cause de la température trés elevée à laquelle elle a eu lieu. Les coefficients de dilatation du laiton et du platine ne sont pas connus avec assez de précision pour qu' on puisse les employer avec sureté pour calculer les corrections qui correspondent à des grandes différences de température. Nous avons donc jugé préférable de faire la comparaison de nos étalons avec le métre à traits en laiton de l'Observatoire, lequel à été comparé, précédemment, dans des circostances trés favorables (savoir entre 1° et 2°) avec le métre en platine de l' Observatoire. Ce métre à traits en laiton présente avec le métre en platine de l'Observatoire précisément la différence de 0,^{mm} 003 dont ce dernier métre est plus long que le métre en platine des Archives, qui est le véritable métre-type. On peut donc regarder le métre à traits en laiton de l' Observatoire comme identique à 0° avec le métre-type.

Comparaison des trois Métres à bouts en laiton avec le Métre à traits en laiton de l' Observatoire.

Deux séances, à plusieurs jours d' intervalle, ont été consacrées à cette comparaison. Les métres à comparer et l' étalon ont été placés la veille sur le Comparateur, afin qu' il ne restat pas de crainte sur l' égalité de température.

Séance du 21 *Aout* 1850.

Métre N. 1. = Métre de l' Observatoire — $1,^{D}3$ = — $0,^{mm}0026$
Métre N. 1. = Métre de l' Observatoire — 0, 2 = — 0, 0004
Métre N. 1. = Métre de l' Observatoire — 1, 4 = — 0, 0028

Différence moyenne . . . . . = — $0,^{mm}0019$
température = 19°, 90.

Métre N. 2. = Métre de l' Observatoire + $0,^{D}4$ = + $0,^{mm}0008$
Métre N. 2. = Métre de l' Observatoire + 0, 6 = + 0, 0012
Métre N. 2. = Métre de l' Observatoire + 0, 9 = + 0, 0018

Différence moyenne . . . . . = + $0,^{mm}0013$
température = 19°, 87.

Métre N. 3. = Métre de l' Observatoire + $1,^{D}2$ = + $0,^{mm}0024$
Métre N. 3. = Métre de l' Observatoire + 0, 7 = + 0, 0014
Métre N. 3. = Métre de l' Observatoire + 1, 3 = + 0, 0026

Différence moyenne . . . . . = + $0,^{mm}0021$
température = 19°, 89.

Ainsi, d' aprés cette série de déterminations,

le Métre N. 1. serait trop court de $0,^{mm}0019$
le Métre N. 2. serait trop long de $0,^{mm}0013$
le Métre N. 3. serait trop long de $0,^{mm}0021$.

Séance du 10 *Septembre* 1850.

Métre N. 1. = Métre de l' Observatoire — $0,^{D}0$ = $0,^{mm}0000$
Métre N. 1. = Métre de l' Observatoire — 0, 6 = — 0, 0012
Métre N. 1. = Métre de l' Observatoire — 0, 0 = 0, 0000
Métre N. 1. = Métre de l' Observatoire — 0, 4 = — 0, 0008

Différence moyenne . . . . . = — $0,^{mm}0005$
température = 18°, 68.

Métre N. 2. = Métre de l' Observatoire + $0,^{D}15$ = + $0,^{mm}0003$
Métre N. 2. = Métre de l' Observatoire + 0, 5 = + 0, 0010
Métre N. 2. = Métre de l' Observatoire + 0, 0 = 0, 0000

Différence moyenne . . . . . = + $0,^{mm}0004$
température = 18°, 16.

Métre N. 3. = Métre de l' Observatoire + $0,^{D}3$ = + $0,^{mm}0006$
Métre N. 3. = Métre de l' Observatoire — 0, 05 = — 0, 0001
Métre N. 3. = Métre de l' Observatoire + 0, 7 = + 0, 0014

Différence moyenne . . . . . = + $0,^{mm}0006$
température = 18°, 25.

Ainsi, d' aprés cette seconde série de déterminations,

le Métre N. 1. serait trop court de $0,^{mm}0005$
le Métre N. 2. serait trop long de 0, 0004
le Métre N. 3. serait trop long de 0, 0006.

Les différences avec le Métre-type sont ici plus petites que dans la premiére série de déterminations, *d'environ* 1 *milliéme de millimétre*; c' est à peu prés le degré de précision que l' on peut atteindre dans les conditions les plus favorables et avec les instruments les plus parfaits.

Nous pouvons donc certifier que les étalons envoyés à Modéne ne different pas du Métre-type français de plus de deux milliémes de millimétre.

Comparaison des 3 *Kilogrammes de M.*[r] *Deleuil avec le Kilogramme type.*

Le Kilogramme étalon que nous avons choisi comme *type* est le kilogramme en laiton du Ministére de l' Intérieur; il a la forme assignée par l' Ordonnance qui régit les poids et les

mesures en France. Les trois kilos étalons destinés au Duché de Modéne ont reçu une forme identique; l' artiste nous les a livrés lorsqu ils avaient, chacun, une surcharge de 20 à 25 milligrammes. Par des usures successives nous les avons amenés à présenter avec le kilogramme type des différences moindres que 1 milligramme.

Nous avons procédé ensuite à la vérification définitive. Celle ci a été faite avec la balance destinée au Duché de Modéne.

Le Kilogramme type étant placé sur le plateau A de la balance, nous avons mis sur le plateau B un kilogramme étalon en laiton, appartenant à M.r Deleuil, ayant identiquement la même forme que le kilogramme type, et, par consequent, que les kilogrammes que nous avions à comparer. La balance s' est trouvée presqu' en équilibre; ce qui nous a prouvé le soin que l' artiste avait mis à approcher, autant que possible, de l' égalité parfaite des deux bras de lévier du fléau.

L' équilibre éxact ayant été obtenu par l' addition de quelques parcelles de laiton, nous avons oté le kilogramme type du plateau A, et nous avons mis à sa place, successivement, chacun des kilogrammes à comparer. Nous avons cherché à déterminer, le plus éxactement possible, les différences qui existent entre ces kilogrammes et le kilogramme type. Nous avons trouvé ainsi que

le Kilogramme N. 1. était trop lourd de $\frac{1}{2}$ milligramme
le Kilogramme N. 2. était trop lourd de $\frac{3}{4}$ milligramme
le Kilogramme N. 3. était trop léger de $\frac{1}{2}$ milligramme.

Nous n' avons pas voulu toucher à ces poids pour les rendre plus identiques avec le kilogramme type, car nous aurions produit, infailliblement, des différences du même ordre en sens contraire.

La même vérification a été faite pour un quatriéme kilogramme étalon destiné à une expérience spéciale que nous décrirons bientôt. Nous désignerons ce kilogramme par *kilogr. N.* 4.

Le procédé que nous avons employé pour faire la comparaison des kilogrammes avec le Kilo type, donne, immediatement, un résultat absolu; il n' exige aucune correction provenante de l'air déplacé ou des variations qui peuvent survenir dans la densité de cet air pendant le cours des observations; car ces variations affectent de la même maniére la tare du plateau B, qui a éxactement le même volume et la même forme que le kilo type et que les kilogrammes que nous lui comparions.

La vérification des kilogrammes étalons destinés au Duché de Modéne était donc compléte; car ces kilogrammes avaient été amenés, aussi exactement que possible, à l' identité avec le kilogramme type français, de même matiére et de même forme; et nous avions évalué les petites différences qui ne se sont pas élevées à plus de 1 millioniéme du poids total.

Nous avons fait plus; nous avons fait une comparaison nouvelle entre le kilogramme type en laiton et le kilogramme type en platine du bureau des longitudes. La saison n' était pas favorable à cette détermination; pour l'obtenir avec toute rigueur, il faudrait la faire à une température trés voisine de 0°, afin de pas avoir à tenir compte de la dilatation des deux métaux. Cependant, comme cette dilatation est extrémement petite, le changement qu' elle opére dans le volume des deux kilogrammes ne produit que des différences de poids, inappréciables à la balance, sur l' air déplacé. Il peut donc être négligé sans inconvénient.

Le Kilogramme type en platine consiste en un Cylindre ayant

à 17°, 0 pour diamétre $39,^{mm}49$
pour hauteur 39, 60.

Son Volume en centimétres cubes est donc

$$\frac{22}{7 \cdot 4} \cdot (3,949)^2 \cdot 3,960 = 48,^{cc}522.$$

Quant au Volume du kilogramme type en laiton, nous l' avons déterminé, directement, non pas sur ce kilogramme

type lui même, que nous ne pouvions pas soumettre à cette expérience de peur de l' alterer, mais sur le kilogr. N. IV. dont nous avons précédemment parlé, et dont le volume ne peut pas différer sensiblement de celui du kilo type.

Le poids absolu du kilogramme N. IV. est $1,^{k}000001$. Ce kilogramme, plongé dans l' eau distillée, à la température de $16°,97$, a perdu de son poids une partie représentée par $124,^{gr}420$ du poids en laiton. La température de l'air ambiant était de $17°,15$; le barométre, ramené à $0°$, de $766,^{mm}18$.

Mais la tare du plateau B perd, en ce moment, une partie de son poids représentée par le poids de l' air déplacé par 1 kilogr. de laiton; tandis que du coté A il n' y a qu' une perte de poids correspondant au volume d' air déplacé par $0,^{k}1244$ de laiton. Il faut donc ajouter, à la perte de poids observée, le poids de l' air déplacé par $0,^{k}8756$ de laiton. Or, d' aprés l' expérience, 1 kilogramme de laiton déplace $124,^{gr}420$ d' eau; son volume est donc de $124,^{cc}420$. Un poids $0,^{k}8756$ de laiton occupera donc un volume représenté par $124,^{cc}420 \times 0,^{k}8756$. Un centimétre cube d' air sec à $0°$ et sous la pression barométrique $0,^{m}760$ pése $0,^{gr}0012932$. Le poids de l' air déplacé par $0,^{k}8756$ de laiton dans les circonstances de notre pesée est donc exprimé par

$$0,^{gr}0012932 \,.\, 0,8756 \,.\, 124,42 \,.\, \frac{1}{1 + 0,00367 \,.\, 17°,15} \,.\, \frac{766,18}{760,00} = 0,^{gr}1336.$$

Et, parsuite, le poids absolu de l' eau déplacée par le kilogramme de laiton est

$$124,^{gr}420 + 0,^{gr}1336 = 124,^{gr}5536.$$

La densité de l'eau distillée étant 1,0000 à $4°$, et 0,9988 à $17°,0$, le volume du kilogramme de laiton, à cette température, est

$$124,^{cc}5536 \,.\, \frac{1}{0,9988} = 124,^{cc}715.$$

On a vu que le volume du kilogramme de platine, est $48,^{cc}522$.

La différence des volumes d' air déplacés par le kilogramme en laiton et par le kilogramme en platine est donc $76,^{cc}193$.

Le kilogramme en platine doit donc paraitre plus lourd, dans les circonstances de la pesée, de

$$0,^{gr}0012932 . 76,193 . \frac{1}{1+0,00367.t}\left[\frac{H_0-\frac{2}{3}f}{760}+0,622.\frac{\frac{2}{3}f}{760}\right]. \quad (A)$$

H_0 représentant la hauteur du barométre, t la température au moment ou l' on a déterminé, expérimentalement, (ainsi qu' il sera dit plus bas) la différence apparente des deux kilogrammes; f représentant la tension de la vapeur à saturation à la température t. Nous supposons ici que la fraction de la saturation de l' air est $\frac{2}{3}$, comme cela arrive généralement à Paris dans les appartements vastes et non chauffés.

La différence apparente de poids entre le kilogramme type laiton et le kilogramme type platine a été déterminée sur une excellente balance de Gambey appartenant à l' Observatoire. La tare était le kilogramme étalon en laiton qui avait joué le même rôle dans les précédentes comparaisons. On a trouvé ainsi que le kilogramme étalon en platine pése de plus que le kilogramme type laiton . . . . $0,^{gr}0895$.

la température étant de . . . . . . $18,^{\circ}90 = t$

le barométre ramené à 0° . . . . . $763,^{mm}80 = H_0$

f . . . . $16,^{mm}25$.

Si l' on calcule la formule (A) avec ces données, on trouve que le kilogramme de platine doit peser de plus que le kilogramme de laiton . . . . $0,^{gr}0921$

l' expérience directe a donné . . . . . . $0,\ 0895$

Différence . . . . . . $0,^{gr}0026$.

Ainsi, si l' on regardait le kilogramme platine comme le véritable type pondéral, le kilogramme type laiton serait trop lourd de $2,^{mm}6$.

Mais, remarquons que le kilogramme platine n' a pas été établi sur les résultats directs des expériences de la Commission française des poids et mesures; *c' est le kilogramme en*

laiton qui est la déduction la plus immédiate des faits. Le poids absolu du kilogramme en platine a été calculé, d' aprés le type normal en laiton, en admettant les données numériques, fort inexactes pour la plus part, qu' on avait alors sur les éléments physiques des Gaz. Il n' est donc pas étonnant qu' il existe une différence, de l' ordre de celle que nous venons de trover, entre ces deux types.

Il n' est pas douteux, d' ailleurs, que c' est le type laiton qui doive, aujourd' hui, être regardé, comme le *kilogramme normal.*

Le résultat général de la discussion à laquelle nous venons de nous livrer, montre, que les instruments destinés au Duché de Modéne, présentent toute la précision, et la perfection d' éxécution, que l' on peut obtenir, dans l' état actuel des arts mécaniques.

Les vérifications des appareils et des étalons métriques et pondéraux, dont le procés verbal détaillé est donné cy-dessus, ont été faites en notre présence à tous trois; et nous certifions l' éxactitude complete du dit procés verbal.

En foi de quoi nous avons signé ceci, en double expédition.

Paris ce 11 *Septembre* 1850.

J. B. BIOT. V. REGNAULT. J. BIANCHI.

Pour Copie conforme
J. Bianchi.

Précautions prises pour l' emballage des instruments.

Nous avons fait apporter à l' emballage des instruments, les précautions qui nous ont parues convenables pour éviter toute altération par les secousses ou par l' humidité.

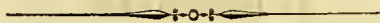
Les boîtes renfermant les métres étalons ont été placées dans une caisse double, recouverte de toile grosse. Cette caisse

a été placée dans une seconde caisse double, recouverte de toile grosse, laquelle contient en outre la machine à diviser.

Le banc du comparateur a été renfermé dans une caisse double, recouverte de toile grosse. Une caisse semblable contient le chariot du comparateur, et celui de la machine à diviser. Les thérmométrès étalons de M.r Fastré sont enfermés dans les caisses précédentes.

La balance a été renfermée dans une caisse recouverte de toile grosse.

Chaque kilogramme étalon est renfermé dans une boîte garnie de velours. Ces boîtes ont séjourné préalablement, pendant plusieurs jours, sous une cloche avec de la Chaux vive. Les trois boîtes ont été enfermées dans un étui en fer blanc, qui a été ensuite soudé hermétiquement. Les boîtes renfermant les autres poids ont été également déssechées par la Chaux. Tous les poids sont emballés dans une petite caisse recouverte de toile grosse.

Ces caisses ont été plombées à la Douane, puis remises au Roulage.

N.a Les Caisses qui portent les Numéros 1, 2, 3 et 4 composent l'énvoi de M.r Perreaux. On devra ouvrir d'abord la Caisse N.o 4. On y trouvera une instruction à suivre dans l'operation du déballage.

Les Caisses qui portent les Numéros 5 et 6 composent l'énvoi de M.r Deleuil. On devra ouvrir d'abord la Caisse N.o 5. On y trouvera une instruction à suivre dans l'opération du déballage. Il est essentiel de se conformer éxactement à ces deux instructions.

ELENCO DI LIBRI E OPERE

NEL BIENNIO 1850-1851 OFFERTE IN DONO

ALLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

CHE, PUBBLICANDONE I TITOLI, INTENDE SIGNIFICARNE AGL' ILLUSTRI DONATORI LA PROPRIA STIMA E RICONOSCENZA

Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the Year 1849. Part. II. London, 1849; in 4.°

The Royal Society. 30 November 1849; in 4.°

Address of the Right Honourable The Earl of Rosse, etc. President etc. London, 1850; in 8.°

Memoirs of the Royal Astronomical Society. Vol. XVII. London, 1849; in 4.°

The Transactions of the Royal Irish Academy. Vol. XXII. Part. I. Dublin, 1849; in 4.°

Montly Notices of the Royal Astronomical Society. Vol. VIII. London, 1848; in 8.°

Proceedings of the Royal Irish Academy. Vol. III. 1847. Vol. IV. Part. I. 1847-48. Vol. IV. P. II. 1849. Dublin; in 8.°

Abhandlüngen der Mathematisch-Physikalischen, ünd der Phylosophisch-Philologischen Classe: Fünften Bandes Erste Abtheilung. München, 1847; in 4.°

Bulletin Jahrgang, 1847. N.os 8....... 35; in 4.° München.

Lasaulx Ernst, Ueber den Entwicklungsgang des Griechischen, und Römischen. München, 1847; in 4.°

Memorie dell' Accademia d' Agricoltura Commercio ed Arti di Verona. Vol. XXI, XXII, XXIII e XXIV.

Tortolini Ab. prof. Barnaba: Sopra le supercie curve parallele all' elissoide, e sull' espressione generale della loro quadratura: Nota estratta dal Giornale arcadico, T. CXIX. Roma, 1849; in 8.°

Tortolini Ab. prof. Barnaba: Sopra le superficie parallele, ed applicazione di questa teorica all'elissoide: Ricerche, estratte dagli Annali di scienze matematiche e fisiche, T. I. Roma, 1850; in 8.°

Tardy prof. Placido: Alcune osservazioni sopra una nuova equazione in Idrodinamica. Roma, 1850; in 8.°

Sandri dott. Giulio: Sulla fersa del gelso, ed in generale sulla produzione degli esseri che vivono in altri viventi: Opuscolo premiato dall' Accademia di Agricoltura Commercio ed Arti di Verona e letto il 17 Febbrajo 1848.

Lo stesso: Sull' idrofobia e sui contagi in generale: Memoria premiata dall'Accademia di Agricoltura Commercio ed Arti di Verona.

Lo stesso: Cenni intorno all' influenza dell' aria su le malattie de' viventi.

Namias dott. Giacinto: Di una specie di atrofia della midolla spinale: Memoria.

Lo stesso: Storia di un tumore felicemente curato colle emulsioni iodate, e Studio intorno agli effetti di esse paragonati a quelli dell' idriodato di potassa.

Lo stesso: Sopra la comparsa del morbo migliare in Venezia, ed il soverchio timore che di quello si concepì: Memoria.

Medici Cav. Michele: Elogi di Matteo Bazzani, di Giuseppe di Jacopo Pozzi, e di Domenico Maria Gusmano Galeazzi, scritti dal nominato. Bologna, 1849; in 4.°

Bellini dott. Ranieri: Sulle febbri sintomatiche; Memoria. Pisa, 1850; in 8.°

Lo stesso: Dell' azion de' veleni; Memoria estratta dal giornale il *Progresso.* Firenze, 1850; in 8.°

Lo stesso: Di alcuni cambiamenti che subisce l' albumina del sangue per l' azione di certe sostanze medicamentose: Esperienze. Dal cit. *Progresso.* Firenze, 1850; in 8.°

Lo stesso: Dell'azione di alcuni rimedj, Saggio. Pisa, 1847; in 8.°

Lo stesso: Dell' azione che subiscono i globetti rossi del sangue, per l' azione di alcune sostanze medicamentose; Ricerche microscopiche. Dal *Progresso.* Firenze, 1849; in 8.°

Bellani Angelo: Se con la sola legge della tensione dei vapori e della diminuzione di temperatura prodotta dalla loro formazione si possano spiegare i fenomeni ultimamente annunziati da Boutigny e da altri: Memoria estratta dal Giornale dell' I. R. Istituto Lombardo, T. II. della nuova serie; in 4.° Milano, 1850.

Sull' integrazione dell' equazioni differenziali: Studj di Gaspare Mainardi: dagli Annali di scienze matematiche e fisiche; in 8.° Roma, 1850.

Lezioni orali di Chimica generale, del Cav. Gioacchino Taddei. Vol. I. Firenze, 1850; in 8.°

Dello stesso: Sopra un nuovo fonte di alimentazione delle piante: Memoria estratta dagli Atti della R. Accademia de' Georgofili. T. XXVIII. Firenze, 1850; in 8.°

Selmi prof. Francesco: Di alcune riazioni tra l' acido iodidrico e l' acido solforico, tanto puro quanto imbrattato dal solfato di piombo: Memoria. Torino; in 8.°

Dello stesso: Intorno all' azione di contatto, Dissertazione. Torino; in 8.°

Dello stesso: Esperienze sul latte: parti 1., 2., 3. e 4. Torino; in 8.°

Dello stesso: Studio intorno alle pseudo-soluzioni degli azzurri di Prussia, ed alla influenza dei sali nel guastarle. Torino; in 8.°

Dello stesso: Usi dell' ammoniaca e de' suoi composti in farmacia. Torino; in 8.°

Dello stesso: Intorno alla solubilità dell' ammoniuro d' oro in vari cianuri. Torino; in 8.°

Dello stesso: Monografia sulla cristallizzabilità della soluzione del solfato di soda. Torino; in 8.°

Sobrero e Selmi: Intorno all' azione del cloro sui cloruri metallici nelle soluzioni dei cloruri alcalini. Torino, 1850; in 8.°

De' medesimi: Memoria intorno ai prodotti della reciproca composizione degli acidi solforoso e solfidrico. Torino; in 8.°

Dinamica Chimica, del prof. Bartolomeo Bizio: T. I. in 3. parti. Venezia, 1850-51; in 8.°

Lezioni di Geometria descrittiva, del prof. Giusto Bellavitis: un volume in 8.° con tavole. Padova, 1851.

Studiati: Opuscoli in 4.° Pisa, 1851.

Bellini: Fascicoli due, in 8.°

Tortolini prof. Barnaba: Sulla espressione dei raggi delle due curvature di una linea geodesica tracciata sulla superficie di una ellissoide: Memoria estratta dagli Annali di scienze matematiche e fisiche; in 8.° Roma, 1851.

Dello stesso: Sul valore della curvatura totale di una superficie, e sull' uso di questo valore nella determinazione di alcuni integrali definiti duplicati: Memoria in 4.° Dagli Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Roma, 1851.

Dello stesso: Soluzione di due problemi di Geometria analitica. Dagli Annali di scienze matematiche e fisiche; in 8.° Roma, 1850.

Dello stesso: Sulla determinazione della linea geodesica descritta sulla superficie di una ellissoide a tre assi ineguali, secondo il metodo del Cav. J. Jacobi: Memoria in 4.° Dagli Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei. Roma, 1851.

Relazione delle ricerche sin quì praticate intorno la dominante malattia dell' uva, del prof. P. Cuppari; e parole dette dal march. Cosimo Ridolfi, Presidente della R. Accademia de' Georgofili. Firenze, 1851; in 8.°

Elogio del prof. Ab. Giuseppe Zamboni, scritto dall' ingegnere dott. Pietro Maggi. Verona, 1851; in 8.°

Biot: Note, sur les dispositions qui ont été prises pour la confection et l' emploi d' étalons de mesures métriques, destinés au Duché de Modéne: extraite des Comptes rendus des séances de l' Academie des sciences, T. XXXII. Paris, 1851; in 4.°

Rendiconti delle Adunanze della R. Accademia de' Georgofili. Firenze, 1851; in 8.°

Memorie della Società Medico-Chirurgica di Bologna: Vol. V., fascic. 2.° Bologna, 1850; in 4.°

Bullettino delle scienze mediche, pubblicato per cura della Società Medico-Chirurgica di Bologna; fascicoli dall' Aprile 1850 al Giugno 1851. Bologna; in 8.°

Commentari dell' Ateneo di Brescia dall' anno 1848 al 1850: un Vol. in 8.° Brescia, 1851.

Rendiconto delle Adunanze e dei lavori della R. Accademia delle scienze di Napoli: NN. 46. 47. 48. 49. 50. 51. Napoli; in 4.°

Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the Year 1850, P. II. London, 1850; un Vol. in 4.°

Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, from November 1848, to Juni 1849: Vol. IX. London, 1849; in 8.°

Memoirs of the Royal Astronomical Society: Vol. XVIII. London, 1850; in 4.°

Magnetical and Meteorological Observations: Hobarton, van Diemen Island; Vol. I. London, 1850; in 4.° con legatura.

Id. Unusual disturbances: Vol. I. P. II. London, 1851; in 4.° con legatura.

The Report of the Britsh Association for the advancement of science for 1849. London, 1850; in 8.°

Memoires de l'Académie Impériale de Saint Petersbourg, T. VI. 4.me livraison et T. VII. 3.me 4.me 5.me et 6.me livraisons. S.nt Petersbourg, 1849-50; in 4.°

Recueil des Actes des séances publiques de l' Académie Impériale des sciences de Saint Petersbourg: 1849; in 4.°

Annales de l' Observatoire physique central de Russie, par A. T. Kupffer; Année 1847. NN. I. et II., Saint Petersbourg: 1850. Due Vol. in 4.°

Rapporto della pubblica esposizione dei prodotti naturali e industriali della Toscana fatta in Firenze nel MDCCCL. Firenze, 1851; un Vol. in 8.°

Namias dott. Giacinto. Sopra alcuni effetti dell' atropina e del solfato di veratrina, Memoria. Venezia, 1851; in 8.°

Memorie dell' Accademia d' agricoltura, commercio ed arti di Verona: Volumi XXVI. e XXVII.; ossia Manuale di Chimica tecnologica di Carlo Tonini, coronato dall' Accademia suddetta. Verona, 1850-51; due Vol. in 8.°

ELENCO

DEI PIU RECENTI LAVORI DEI MEMBRI ATTUALI DELLA SOCIETÀ PUBBLICATI FUORI DEGLI ATTI DELLA MEDESIMA

(*In continuazione alla pagina* (24) *del Volume precedente, ossia del Tomo XXIV. Parte II.*)

Avogadro, Nel T. XI. Serie II. delle Memorie della R. Accademia di Torino, Troisiéme Mémoire sur les Volumes atomiques. — Determination des Nombres affinitaires des différents corps élémentaires par la seule considération de leur Volume atomique, et de celui de leurs composés.

Bellani, Nel Giornale dell' I. R. Istituto lombardo di scienze, lettere ed arti, Nuova Serie, fasc. VII, 1850, Memoria: Se con la nota legge della tensione dei vapori, e della diminuzione di temperatura prodotta dalla loro formazione, si possano spiegare i fenomeni annunziati da Boutigny e da altri.

Nel fasc. XI. 1851 dello stesso Giornale, Articolo del medesimo A. « Singolare coincidenza di una dirottissima pioggia succeduta contemporaneamente nei contorni di Brescia e nel Belgio. »

Belli, Nel Giornale anzidetto dell' I. R. Istituto lombardo, Memoria scompartita ne' fascicoli IX, X e XII. 1851, col titolo: « Pensieri sulla consistenza e sulla densità della crosta solida terrestre, e su alcuni fenomeni che vi hanno relazione. »

Bellavitis, Negli Annali di scienze matematiche e fisiche, compilati dal prof. Barnaba Tortolini in Roma, T. I. 1850, Nota sopra un teorema del Möbius riguardante la specie della sezione conica, che passa per cinque punti dati in un piano. — Ivi, Discorso sulla dottrina del calorico rag-

giante. — Nota sulla risoluzione numerica della $x^2+y^2=C$. — Discorso sulle proprietà generali dei corpi.

Del medesimo, Lezioni di geometria descrittiva, con note contenenti i principj della geometria superiore ossia di derivazione, e parecchie regole per la misura delle aree e dei volumi. Padova, 1851. Un Volume in 8.°

Bianchi, Negli Annali delle scienze matematiche e fisiche sovracitati, T. I. Roma, 1850, Articolo 3.° sopra le occultazioni lunari di Aldebaran e di altre stelle. — Lettera sopra i differenti metodi pratici di determinare la differenza de' meridiani, e Nota di trigonometria sferica. — Ivi, Tom. II. Roma, 1851, Nota sull' annua pioggia caduta in Roma e a Perugia comparata con quella simultaneamente caduta a Modena. — Relazione intorno l'eclisse Solare del 28 Luglio 1851 osservato a Modena.

Bizio, Dinamica Chimica, Parte 1.ª Venezia 1850. Un Vol. in 8.° Parte 2.ª e 3.ª Venezia, 1851.

Cenno storico degli studi propri intorno alla forza ripulsiva della materia ordinaria, in relazione a ciò che ne seppe e ne sa l'Ab. Prof. Cav. F. Zantedeschi, e risposte alle sue accuse.

Giulio, Nelle Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino, Serie II. T. XI. 1851, Di una proprietà meccanica del circolo e di altre figure, e dell' uso di questa proprietà per la costruzione di pendoli compensatori.

Maggi, Elogio del Prof. Ab. Giuseppe Zamboni: Verona, 1851, in ottavo.

Mainardi, Nei succitati Annali delle scienze matematiche e fisiche, T. I. Roma 1850, Studj sull' integrazione dell' equazioni differenziali. — Nuovi Teoremi di Analisi. — Dei poligoni massimi inscritti, e dei minimi circoscritti all' elisse, e dei poliedri analoghi dell' elissoide. — Nel T. II. dello stesso Giornale, fascicolo di Ottobre 1851, Dichiarazione dei teoremi di analisi enunciati nel T. I.

Matteucci, Negli Annali stessi di Roma T. I., Sulla materia fosforescente dei pesci e sulla fosforescenza del mare. —

Dell' influenza del magnetismo sul potere rotatorio di alcuni corpi.

Mossotti, Nei detti Annali di Roma T. I., Sulla riduzione degli angoli fatti dagli archi geodetici di un piccolo triangolo agli angoli fatti dalle loro corde, Lettera. — Nello stesso Giornale, fascicolo di Maggio 1851, Soluzione analitica del problema delle oscillazioni del pendolo avuto riguardo alla rotazione della terra. — Ivi, fascicolo di Ottobre 1851, Sull'analogia delle funzioni circolari ed iperboliche, e sulla sostituzione delle une alle altre per trasformare le quantità che si presentano sotto aspetto immaginario. — Lezioni di Meccanica razionale, Firenze, 1851, in corso di stampa.

Panizza, Nel Giornale dell' I. R. Istituto lombardo di scienze, lettere ed arti, Nuova Serie, fascic. XI. 1851, Sopra un mostro vitellino bicipite unicorporeo, con una tavola.

Piola, Negli Annali scientifici di Roma T. I., Nota sulle applicazioni del calcolo delle differenze finite alle questioni di analisi indeterminata.

Plana, Nelle Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino Serie II. T. XI. 1851, Note sur la proposition LXXI du premier Livre des Principes de Newton. — Sur les propositions LXXX et LXXXIV du premier Livre des Principes de Newton. — Mémoire sur une nouvelle solution algébrique de l' equation à deux termes $x^n - 1 = 0$, n étant un nombre premier. — Nel T. XII. sotto stampa, Note sur l' expérience communiquée par M.r Léon Foucault le 3 Février dernier (1851) à l'Académie des sciences de Paris.

Del medesimo, Articolo di annunzio, e poscia di osservazione dell' eclisse Solare, del 28 Luglio 1851, Torino; in 8.°

Santini, Negli Annali Romani delle scienze matematiche e fisiche T. I. Effemeride del nuovo pianeta *Igea*: osservazioni, elementi ellittici ed effemeride di *Partenope*, in lettera. — Nelle Notizie Astronomiche di Schumacher T. XXXI., osservazioni ed orbita di Partenope. — Ivi, Tom. XXXII.,

osservazioni dei nuovi pianeti *Egeria* e *Irene*. — Calcolo degli elementi ellittici della Cometa di Biela, perturbati da Giove, da Saturno, da Venere e dalla terra; ed effemeride di tale Cometa per la sua prossima riapparizione nel 1852.

Carlini, Nell' Appendice all' effemeridi di Milano per l' anno 1850, Nuova determinazione della rifrazione astronomica pel Clima di Milano.

Sandri, Nelle Memorie dell' Accademia di agricoltura arti e commercio di Verona, Sulla fersa del gelso ed in generale sulla produzione degli esseri che vivono in altri viventi. — Sulla idrofobia e sui contagi in generale. — Cenni intorno alle influenze dell' aria sulle malattie de' viventi.

Medici, Negli Atti del Pontificio Istituto di Bologna, Elogi di Matteo Bazzani, di Giuseppe di Jacopo Pozzi, e di Domenico Maria Gusmano Galeazzi.

Taddei, Negli Atti della R. Accademia de' Georgofili di Firenze T. XXVIII., Memoria sopra un nuovo fonte di alimentazione delle piante.

Lezioni orali di Chimica generale. Firenze, 1850. Vol. I. in 8.°

Tortolini, Nel giornale arcadico T. CXIX., Sopra le superficie curve parallele all' elissoide e sull' espressione generale della loro quadratura, Nota.

Negli Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, Anno IV., Memoria sul valore della curvatura totale di una superficie, e sull' uso di questo valore nella determinazione di alcuni integrali definiti duplicati. — Memoria sulla determinazione della linea geodesica descritta sulla superficie di un' ellissoide a tre assi ineguali, secondo il metodo del C. G. J. Jacobi.

Negli Annali delle scienze matematiche e fisiche T. I., Ricerche sopra le superficie parallele, ed applicazione di questa teorica all' ellissoide. — Memoria sulla espressione dei raggi delle due curvature di una linea geodesica tracciata sulla superficie di una ellissoide. — Soluzione di due problemi di geometria analitica.

STATUTO

DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA.

1851.

I. La Società Italiana delle Scienze residente in Modena è composta di *Quaranta* Socj Attuali, tutti Italiani, di merito maturo, e per Opere date in luce ed applaudite riconosciuto.

II. La scienza della natura è il grande oggetto, che la Società medesima si propone. Pubblicherà pertanto, sotto il titolo di *Memorie di Matematica e di Fisica*, le produzioni di chiunque de' Socj vorrà render pubblico negli Atti Sociali il frutto de' proprj studj.

III. De' quaranta Membri, uno sarà Presidente della Società, e la presidenza durerà sei anni. Questi può eleggersi e risiedere in una qualunque Città dell' Italia, ma in Modena esister deve sempre sotto gli ordini del Presidente una rappresentanza, e in Modena sempre si pubblicheranno gli Atti della Società.

IV. Avrà la Società un Segretario, ed un Vicesegretario amministratore residente in Modena. Il primo sarà partecipe di tutte le facoltà dei Quaranta, benchè non fosse uno d' essi, ed avrà diritto, non obbligo, di presentar Memorie da inserirsi negli Atti. Il secondo terrà il maneggio economico.

V. §. 1. Altra Classe vi avrà di Socj Emeriti in numero indeterminato. Essa è preparata a chiunque dei Quaranta, o per età avanzata, o per abituale mancanza di salute, o per altro motivo, non producesse verun suo lavoro in tre consecutivi Tomi delle Memorie sociali.

§. 2. Ma se un Socio Attuale passasse negli Emeriti dopo aver posto otto Memorie ne' Tomi sociali, in tal caso seguiterà a godere, quantunque Emerito, tutte le prerogative di Attuale.

§. 3. Che se un Socio Emerito ponga Memorie in tre Tomi consecutivi, sarà restituito nel ruolo degli Attuali.

VI. Un' altra Classe, parimente indeterminata, comprenderà i Socj Onorarj. A questa saranno ascritti, previo l' assenso di ventuno almeno dei Quaranta, i Compilatori, eletti dal Presidente, degli elogj de' Socj Attuali defunti. Inoltre, esso Presidente potrà aggregare a questa classe, nel suo sessenio, due Soggetti, non più, che avessero operato cosa a prò della Società, onde meritassero d' esserne onorati particolarmente.

VII. Ed altra Classe avrà finalmente il titolo di Socj Stranieri, stabilita per distinguere ed onorare il merito delle Scienze in qualunque parte fuori d' Italia. Sarà composta di dodici Soggetti, a ciascun de' quali verrà esibito in dono un esemplare d' ogni Volume, che uscirà in luce, delle Memorie Sociali.

VIII. Le aggregazioni alle classi de' Socj Attuali e degli Stranieri si faranno nel modo seguente. Per ogni posto che rimanga vacante, dovrà il Presidente, col mezzo del Segretario proporre sei nomi a ciascuno de' Socj Attuali, il qual farà scelta d' uno, e lo indicherà per lettera al Segretario. Quel de' sei, che, entro il termine di due mesi dalla proposta, avrà più suffragj, s' intenderà aggregato, e la Compagnia sarà fatta opportunamente consapevole dell' acquistato Cooperatore. Qualora accadesse che due o più Candidati avessero parità di voti maggiori, il Presidente avrà il voto di preponderanza per decidere sulla scelta.

IX. All' elezione del Presidente saranno invitati li Socj Attuali con una lettera circolare del Segretario, al quale ognuno di essi farà tenere in iscritto la nomina del Socio da sè eletto a Presidente: e la pluralità de' voti, che arriveranno al Segretario, dentro il termine di due mesi dopo la data del circolare invito, determinerà l' elezione, che dovrà esser dal Segretario annunziata ai Membri votanti.

X. Ciascheduno dei Quaranta ha facoltà d' inserire negli Atti una scoperta utile, un' importante produzione, anche di persona non aggregata ma Italiana, purchè tal produzione, o scoperta sia giudicata degna degli Atti stessi anche da un altro Socio, il qual venga destinato segretamente dal Presidente di volta in volta all' esame della cosa presentata, ed il suo nome (quando approvi) si stampi insieme con quello del presentatore.

XI. Di questi Autori non Socj dovrà il Presidente aggiungere i nomi, segnati con asterisco, ai sei che presenta, a tenor dell' articolo VIII, per l' elezione d' un Socio Attuale. Bensì questa nomina cesserà, dopo fatta sei volte, contate dalla pubblicazione d' ogni Memoria.

XII. Le Dissertazioni o Memorie da pubblicarsi ne' Volumi della Società, debbon essere scritte in lingua Italiana e in carattere chiaro. Il Segretario dovrà apporvi la data del recapito, acciocchè sieno stampate con essa in fronte e per ordine di tempo. Che se l' opera sia voluminosa, può l'Autore distribuirla in due o più parti pe' Tomi susseguenti.

XIII. Tutto ciò che è destinato pegli Atti dev' essere nuovo, inedito, importante, ed analogo all' indole scientifica di questi Volumi, che non ammette sfoggio d' erudizione, nè moltitudine di note e di citazioni.

XIV. I fogli stampati di ciascun Volume non dovranno eccedere il numero di cento. Le Memorie soprabbondanti resteranno in deposito pel Tomo susseguente, o saranno restituite agli Autori che le dimandassero. Bensì, nel caso di soprabbondanza, le Dissertazioni degli Autori non Socj dovranno cedere il luogo a quelle de' Socj.

XV. La Società non si fa risponsabile delle Opere pubblicate negli Atti. Ogni Autore dev' esser mallevadore delle cose proprie, come se le pubblicasse appartatamente.

XVI. Non permette peraltro la Società le invettive personali, e nè anche le critiche non misurate: sopra di che veglierà il Segretario, e ne farà inteso il Presidente per un acconcio provvedimento.

XVII. Il Socio Attuale, Autore d' una Memoria o d' un Elogio, avrà in dono cinquanta esemplari della sua produzione, con frontispizio apposito, e con la numerazion delle pagine ed il registro ricominciati. Ad ogni altro Autore saranno corrisposte dodici copie. Qualunque Autore ne desiderasse di più, non sarà aggravato d' alcuna spesa per conto della composizione tipografica.

XVIII. Nell' atto di queste spedizioni sarà trasmessa ai Socj, che avranno mandato il voto per le elezioni, la dimostrazione stampata del numero de' suffragj toccati ad ogni Candidato, senza il nome però de' votanti, e così ancora i conti stampati dell' amministrazione tenuta dal Vicesegretario amministratore.

XIX. Alle principali Accademie estere sarà offerto in dono un esemplare d' ogni Volume delle Memorie sociali, che andrà successivamente uscendo alla luce.

XX. I doveri del Presidente, oltre i già mentovati, sono: mantener l' osservanza dello Statuto; eleggere il Segretario ed il Vicesegretario, qualunque volta sia di bisogno; avere in governo e cura ogn' interesse della Società; rivedere, almeno una volta all' anno, i conti dell' amministrazione del Vicesegretario, alla validità de' quali fa d' uopo l' approvazione e sottoscrizione di mano propria del Presidente, e ragguagliar finalmente il Successore dello stato degli affari nell' atto di rinunziargli l' Uffizio.

XXI. Dopo il Presidente, il Segretario è la Persona propriamente deputata a mantener corrispondenza con tutti i Membri della Società, e quasi centro, ove debbono metter capo tutte le relazioni Sociali. Egli invia le patenti d' aggregazione; presiede alla stampa, ai Correttori di quella, ed all' incision delle tavole; prende cura delle spedizioni, e d' ogni altro interesse della Società, sempre però con l'approvazione del Presidente. Egli deve pure tener registro d' ogni atto che importi; custodire i voti de' Socj per le elezioni, manifestandoli al Presidente ad ogni richiesta; e finalmente eseguir tutto ciò, che ne' precedenti articoli gli è addossato.

XXII. Il Vicesegretario Amministratore e Tesoriere della Società darà una cauzione nelle regole e forme volute dalle vigenti Leggi civili per la somma che verrà dal Presidente determinata: la qual somma per altro non sarà mai minore di Lire due mila italiane a corso di tariffa legale.

XXIII. §. 1. Ad esempio delle principali Accademie, la Società Italiana delle Scienze avrà Membri pensionarj; e la pensione sarà d' annui zecchini ventiquattro, pagabili per metà allo spirare d' ogni semestre; non computate in verun caso, sia di morte, o di rinunzia, o di transito negli Emeriti, le frazioni di semestre.

§. 2. Saranno capaci della pensione li tre più anziani, e di permanenza non interrotta, nel ruolo de' Socj attuali; sin a tanto però che rimangano nel ruolo medesimo.

§. 3. Qualunque volta l'eguaglianza d'età accademica renda ambigua la scelta d' uno o più Pensionarj, sarà tolta l' ambiguità concedendo la preferenza alla maggior età naturale. Nel qual caso, il Segretario chiederà a ciascun de' coetanei come sopra, documento legale dall' epoca di sua nascita; e chi non lo faccia a lui pervenire entro mesi tre dopo la domanda, s' intenderà che rinunzj alla pensione.

§. 4. Due Socj (sia ciascun d'essi attuale o emerito) potranno inoltre goder la pensione, loro vita naturale durante, quando siano autori ciascuno di dieci o più Memorie stampate, ne' Tomi Sociali, il valor delle quali venga giudicato degno di tal premio dalla pluralità assoluta de' Socj Attuali, a proposizione del Presidente (o del Segretario, ove si trattasse del Presidente); ovvero dalla pluralità relativa, quando si tratti di giudicare del merito relativo fra più Candidati.

§. 5. In ambi questi partiti le opinioni de' Socj resteranno sempre segrete, ed a sola notizia del Presidente e del Segretario: si pubblicherà unicamente il numero de' suffragj a favore di ciascun Candidato, siccome è prescritto per le elezioni nell' articolo XVIII.

§. 6. Avranno titolo di *Pensionarj anziani* li tre del §. 2; di *Pensionarj giubilati* li due del §. 4.

§. 7. Potrà il Pensionario anziano passare a goder la pensione come giubilato, sotto le condizioni prescritte dal §. 4, e quando l' un de' due posti sia vacuo.

XXIV. A compensazion delle spese, che incontrano i Quaranta ne' porti di lettere per cagion della Società, ogni anno, nel mese di Gennajo sarà fatto l' esame, onde riconoscere i Membri attuali, che avranno corrisposto a tutte le lettere del Presidente e del Segretario nel corso dell' anno antecedente, e dentro li rispettivi termini di tempo in esse specificati; ciascuno de' quali Socj avrà diritto di esigere zecchini tre dalla cassa della Compagnia.

XXV. §. 1. Ogni volta, che la forza pecuniaria della stessa Società lo consenta, si esporranno Programmi al concorso pubblico. Risoluto ciò dal Presidente, il Segretario inviterà li Socj Attuali a proporre argomenti. Questi esser dovranno, o Fisici, o Matematici, o Fisico-Matematici, o in qualunque modo giovevoli a queste scienze, e sempre applicabili ad utile general dell' Italia. Il Segretario li manderà stampati a ciaschedun Socio, pretermettendo quelli che uscissero dalle condizioni ora prescritte. Ogni Socio spedirà al Segretario il proprio suffragio per la scelta dell' argomento, e dichiarerà insieme qual premio reputi conveniente e qual tempo alla facitura ed alla presentazione delle Memorie. Quel tema che avrà più suffragj, sarà adottato: nel caso di parità di voti, deciderà la sorte.

§. 2. Tosto si comunicherà alla Compagnia l' argomento coronato, ed il numero de' suffragj riscossi da ogni argomento. Nell' atto stesso sarà richiesto ciaschedun Socio Attuale di nominarne tre (di qualunque Classe, purchè Italiani, e dimoranti attualmente in Italia); quelli cioè, che ciascuno, osservato il quesito, stimerà più adattati a giudicar le Memorie che compariranno al concorso. Quei tre, ne' quali concorrerà maggior numero di suffragj (l' uguaglianza rimovasi con la sorte), si intenderanno destinati a pronunziare il giudizio.

§. 3. Nelle occasioni statuite sopra, saranno come non fatte le risposte de' Socj, qualora non giungano al Segretario dentro quaranta giorni dalla data della rispettiva Circolare di lui.

§. 4. Il nome de' Giudici eletti rimarrà a sola notizia del Presidente e del Segretario: se non che ciascun di quelli sarà fatto consapevole della propria destinazione, con divieto di concorrere al Programma e di manifestarla a chicchessia: niun di loro saprà i suoi Colleghi. Se qualcuno ricusasse, sarà sostituito il prossimo inferiore in quantità di voti. Ogni Giudice riceverà, dopo pronunziato il giudizio, un decente compenso dell' esclusion dal concorso.

§. 5. Il Presidente, considerati i pareri de' Socj, lo stato economico della Società, e l' importanza di moltiplicare i Programmi, stabilirà la grandezza del premio, ed il termine da assegnarsi al concorso. Sarà tosto promulgato il problema per tutta Italia. Ogni Italiano, anche Socio, potrà concorrere: rimangono esclusi li soli tre Giudici. Le Memorie dovranno essere inedite, scritte in lingua Italiana, e pervenute nelle mani del Segretario entro il termine prescritto dal Programma: il nome degli Autori sarà occulto: ogni Memoria porterà in fronte un motto, e sarà accompagnata da un biglietto suggellato, contrassegnato al di fuori dal medesimo motto, e contenente, al di dentro in maniera occultissima, nome, cognome, patria, domicilio e profession dell'Autore. Il mancare a qualunque delle antecedenti condizioni fa perdere il premio.

§. 6. Tosto che il concorso sia chiuso, il Presidente, veduto il numero e l' estensione delle Memorie, definirà il tempo, entro il quale ogni Giudice dovrà pronunziare il giudizio. Allora il Segretario trasmetterà le Memorie, tutte unite, ad uno de' Giudici: da cui restituite che siano, e notificato il proprio giudizio al Segretario, saranno da questo fatte pervenire ad altro Giudice; quindi con le regole stesse al terzo. Ogni Memoria coronata da un Giudice, sarà stampata col nome dell' Autore. Il premio sarà dato a quella Memoria, che venga coronata da tre, o da due Giudici. Se tutti e tre li giudizj fossero discordi, si dividerà il premio fra le tre Memorie coronate. Lo stesso si farà tra due coronate, qualora un Giudice neghi il premio a tutte le Memorie, e gli altri due non siano

concordi. Che se fossero due li giudizj di negativa generale del premio, in tal caso il terzo giudizio non sarà di alcun valore: si notificherà alla Compagnia l' esito del giudizio, e si passerà alla pubblicazione di nuovo Programma coi metodi stabiliti sopra.

§. 7. Ma quando sia conferito il premio, il Segretario annunzierà prontamente ai Socj ed a tutta l' Italia il nome degli Autori delle Memorie coronate, indicando quello cui spetta il premio. Esse Memorie saranno stampate senza indugio; se ne spedirà un esemplare ad ogni Socio, 12 della propria a ciascun degli Autori coronati, 38 di più al premiato: i rimanenti si esporranno a vendita pubblica.

CATALOGO

DE' MEMBRI COMPONENTI LA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA.

Anno 1852.

Rispettiva loro Residenza

PRESIDENTE

MARIANINI (Sig. Dottore Stefano) Cavaliere dell' Ordine Civile di Savoja, Membro pensionario giubilato della Società, Professore di Fisica Sperimentale e Bibliotecario nella R. Università di Modena. *Modena.*

SOCJ ATTUALI.

ALESSANDRINI (Dottor Antonio) Professore di Anatomia comparata nella Pontificia Università di Bologna *Bologna.*

AMICI (Cavaliere Gio. Battista) I. R. Astronomo nel Museo di Firenze *Firenze.*

AVOGADRO (Conte Amedeo) Professore Emerito di Fisica Sperimentale, Uditore nella R. Camera de' Conti a *Torino.*

BELLANI (Canonico Angelo) Membro effettivo dell' I. R. Istituto Lombardo, Socio di molte illustri Accademie, di Roma, Firenze, Bologna, Padova ec. e degli Atenei di Venezia, Brescia, Treviso, Bergamo ec. *Milano.*

BELLAVITIS (Giusto) Professore di Geometria descrittiva nella I. R. Università di Padova, Membro dell' I. R. Istituto Veneto *Padova.*

RESIDENZA

BELLI (Dottor Giuseppe) Professore di Fisica nella I. R. Università di Pavia, Membro effettivo Pensionato dell' I. R. Istituto Lombardo, Socio Nazionale non residente dell' Accademia R. delle Scienze di Torino, Socio straordinario dell' Accademia R. di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Membro della Facoltà filosofica di detta città *Pavia.*

BERTOLONI (Cavaliere Antonio) Professore di Botanica *Bologna.*

BIANCHI (Dottor Giuseppe) Segretario della Società Italiana, Membro pensionario giubilato di essa, Direttore del R. Osservatorio astronomico di Modena *Modena.*

BIZIO (Dottor Bartolomeo) Professore di Chimica nelle II. RR. Scuole tecniche di Venezia *Venezia.*

BORDONI (Cavaliere Antonio) Professore attuale di Geodesia nella I. R. Università di Pavia *Pavia.*

BRIGNOLI DI BRUNNHOFF (Giovanni) Professore di Botanica e Agraria nella R. Università di Modena *Modena.*

BUFALINI (Maurizio) Professore di Clinica Medica della Università di Pisa nelle Scuole Medico-Chirurgiche di compimento e perfezionamento in Firenze, Membro del Collegio Medico Fiorentino, Cavaliere dell' I. R. Ordine del Merito sotto il titolo di S. Giuseppe e di quello dell' insigne Ordine militare di S. Stefano P. M. *Firenze.*

CAPOCCI (Cavaliere Ernesto) Professore di Astronomia a Napoli *Napoli.*

CARLINI (Cavaliere Francesco) R. Astronomo, Direttore dell' I. R. Specola di Milano *Milano.*

CATULLO (Dottor Tommaso) Professore di Storia Naturale nella I. R. Università di Padova, Cavaliere di S. Silvestro, Membro dell' I. R. Istituto, delle Società Geologiche di Francia, di Jena ec. *Padova.*

	Residenza
CHIAJE (DELLE) (Dottore Stefano) Professore di Storia Naturale	*Napoli.*
FLAUTI (Cavaliere Vincenzo) Professore di Matematica e Segretario della R. Accademia di Napoli	*Napoli.*
FUSINIERI (Dottor Ambrogio) Dottore in Legge, Membro dell' I. R. Istituto di Scienze, Lettere ed Arti in Venezia e di altre Accademie	*Vicenza.*
GIORGINI (Cavaliere Gaetano) Professore Onorario della I. R. Università di Pisa, uno dei Componenti il Consiglio degli Ingegneri del Granducato di Toscana	*Firenze.*
GIULIO (Cavaliere Carlo Ignazio) Professore di Meccanica nella R. Università di	*Torino.*
MAINARDI (Dottor Gaspare) Professore di Matematica, ascritto alla R. Accademia di Upsala ed all' Istituto d' Africa	*Pavia.*
MARIANINI (Cavaliere Stefano) suddetto	*Modena.*
MATTEUCCI (Cavaliere Carlo) Professore di Fisica nella I. R. Università di Pisa	*Pisa.*
MEDICI (Cavaliere Michele) Professore di Fisiologia nella Pontificia Università di Bologna	*Bologna.*
MELLONI (Cavaliere Macedonio) Uno dei trenta Cavalieri esteri della nuova Sezione delle Scienze nell' Ordine pel Merito di Federico II. Re di Prussia, Cavaliere della Legion d' Onore e del Merito di Toscana, Socio Ordinario della R. Accademia di Scienze di Napoli, e delle Società R. di Londra e di Edimburgo, Corrispondente dell' Istituto di Francia, delle RR. Accademie di Berlino, Torino, e dell' Imperiale di S. Pietroburgo ec.	*Napoli.*
MORIS (Giuseppe) Professore di Botanica nella R. Università di Torino, Socio della R. Accademia di Scienze di essa Città ec. Cavaliere dell' Ordine	

RESIDENZA

dei SS. Maurizio e Lazzaro, Cavaliere e Consigliere dell' Ordine Civile di Savoja *Torino.*

MOSSOTTI (Cavaliere Ottaviano Fabrizio) Professore di Fisica Matematica e Meccanica Celeste nell' I. R. Università di Pisa *Pisa.*

PANIZZA (Dottor Bartolomeo) Professore di Anatomia umana nell' I. R. Università di Pavia, Cavaliere della Corona Ferrea *Pavia.*

PARETO (Marchese Lorenzo) Naturalista in Genova *Genova.*

PIANCIANI (Padre Gio. Battista) D. C. D. G. Professore di Fisica nel Collegio Romano e Membro del Collegio filosofico della Università Romana *Roma.*

PLANA (Giovanni Commendatore) Professore di Matematica nella R. Università di Torino, Regio Astronomo, Barone e Cavaliere della Legion d'Onore, Membro pensionario anziano della Società Italiana *Torino.*

RIDOLFI (Marchese Cosimo) Fisico e Agronomo, Cavaliere Commendatore, Professore di Agraria e Pastorizia nella I. R. Università di Pisa, Presidente della I. R. Accademia dei Georgofili, Direttore Proprietario dell'Istituto Agrario di Meleto ec. *Pisa.*

SANTINI (Cavaliere Giovanni) Dottore e Professore di Astronomia nella I. R. Università di Padova, Socio dell' Accademia I. R. di Scienze di detta Città, e della R. Società Astronomica di Londra, Pensionario anziano della Società Italiana *Padova.*

SAVI (Cavaliere Paolo) Professore di Zoologia nella I. R. Università di Pisa *Pisa.*

SISMONDA (Cavaliere Angelo) Professore di Geologia e Mineralogia nella R. Università di Torino *Torino.*

RESIDENZA

SPINOLA (Marchese Massimiliano) Naturalista in Genova — *Genova.*

TADDEI (Cavaliere Gioacchino) Professore di Chimica in Firenze — *Firenze.*

TENORE (Michele) Professore di Botanica e Direttore del Reale Orto botanico nella R. Università degli Studj di Napoli, Cavaliere del R. Ordine di Francesco I. — *Napoli.*

TORTOLINI (Ab. Barnaba) Professore di Calcolo Sublime nella Romana Università della Sapienza — *Roma.*

TRAMONTINI (Giuseppe) Professore di Architettura nella R. Università di Modena, Accademico di Napoli ec. — *Modena.*

MAGGI (Dottor Pietro) Ingegnere, Membro Veronese della Società — *Verona.*

SANDRI (Dottor Giulio) Medico, Membro Veronese della Società — *Verona.*

SOCJ EMERITI.

SOCJ ONORARJ.

	Residenza
BERRUTI (Dottor Secondo)	*Torino.*
CAGNOLI (Ottavio)	*Verona.*
CAMPOSTRINI DE' NOBILI (Giovanni Antonio) Presidente dell' Accademia di Agricoltura, Arti e Commercio di Verona	*Verona.*
DIETRICHSTEIN (Sua Eccellenza Conte Maurizio) Presidente della I. R. Biblioteca di Vienna e del Museo Numismatico Antiquario ec., Maggiordomo della Corte di S. M. l' Imperatrice d' Austria	*Vienna.*
FABENI (Dottor Vincenzo)	*Padova.*
LANDI (Marchese Cavaliere Ferdinando)	*Piacenza.*
LUGLI (Professor Giuseppe)	*Modena.*
PALLETTA (Dottor Marco)	*Milano.*
PEZZANA (Cavaliere Professor Angelo) D. Bibliotecario	*Parma.*
REGNAULT (V.) Professore di Fisica al Collegio di Francia	*Parigi.*
RICCARDI (Dottor Geminiano) Professore di Matematica	*Modena.*
ROVIDA (Cavaliere Professor Cesare)	*Milano.*
RUFFO (Sua Eccellenza Don Folco) Principe di Scilla, Ministro degli Affari Esteri del Re di Napoli	*Napoli.*
SCOPOLI (Conte Giovanni) Segretario perpetuo dell'Accademia di Agricoltura, Arti e Commercio di Verona	*Verona.*
VELADINI (Professor Giovanni) Ingegnere	*Milano.*

SOCJ STRANIERI.

	RESIDENZA
AIRY (Giovanni Battista) Astronomo	*Londra.*
ARAGO (Francesco Giovanni Domenico) Matematico e Fisico	*Parigi.*
BIOT (Gio. Battista) Fisico Matematico	*Parigi.*
CAUCHY (Agostino Luigi) Matematico	*Parigi.*
ENCKE, Astronomo	*Berlino.*
FARADAY (Michele) Chimico e Fisico	*Londra.*
FUSS (Paolo Enrico) Segretario della I. R. Accademia di Pietroburgo	*Pietroburgo.*
GAUSS (Carlo Federico) Matematico	*Gottinga.*
HERSCHEL (Gio. Federico Guglielmo) Astronomo	*Londra.*
HUMBOLDT (Barone Alessandro) Fisico	*Berlino.*
LEVERRIER, Geometra	*Parigi.*
THENARD (Barone) Chimico	*Parigi.*

SEGRETARIO.

BIANCHI (Professore Giuseppe) *Modena.*

VICE-SEGRETARIO AMMINISTRATORE.

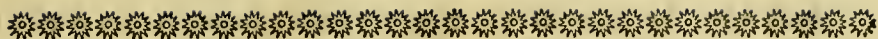
MARIANINI (Ingegnere Dottor Pietro) *Modena.*

MEMORIE

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

Tomo XXV. Parte I.ª

SU LE OPERAZIONI INVERSE DELL' ARITMETICA

MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE

PROF. GASPARE MAINARDI.

Ricevuta il 17 *Maggio* 1849.

La regola colla quale si eseguisce la divisione dei numeri richiede dei tentativi che riescono molte volte assai penosi; e siccome la grandezza delle cifre maggiori di un quoziente non dipende da quella di molte cifre minori sia del dividendo come del divisore, non poche delle operazioni che si fanno per determinare le cifre di ordine più elevato sono inutili all'oggetto immediato, e lo sono assolutamente nei calcoli approssimati. Anche la estrazione delle radici incorre nei medesimi difetti, che riescono ancora più molesti. Meditando queste imperfezioni gravissime dell'Aritmetica venni condotto a trovare dei metodi, che mi parvero assai più semplici di quelli in uso, sia perchè non richiedono che pochi e facili tentativi, sia perchè esigono le sole operazioni successivamente essenziali, epperò ne sopprimono molte inutili nei calcoli di approssimazione. Risolvo poi incidentemente alcune questioni ancora non ben dichiarate, esamino una regola dovuta al celebre Fourier, ed accenno un metodo aritmetico per risolvere le equazioni algebraiche numeriche. Nella presente Memoria considero unicamente le operazioni inverse dell'Aritmetica: altrove esporrò alcune cose su le operazioni dirette, le quali mi sembrano utili a rettificare e completare questa scienza fondamentale.

Indicherò le cifre di un numero con lettere, ponendovi al piede degli indici numerici, e distinguerò il loro ordine moltiplicandole per una debita potenza del numero 10. In conseguenza la scrittura $A_1 + A_2 .10 + A_3 10^2 \ldots$

$$+ \frac{B_1}{10} + \frac{B_2}{10^2} + \frac{B_3}{10^3} \ldots$$

esprimerà un numero composto di una parte intera della quale A_1 sono le unità, A_2 le decine, A_3 le centinaja...., e di una parte fratta di cui B_1 sono i decimi, B_2 i centesimi ec. Qualche volta ancora rappresenterò un numero scrivendo delle lettere di seguito le une alle altre.... $A_4 A_3 A_2 A_1$, quasi fossero le vere sue cifre.

Della Divisione.

Rappresento coi tre polinomj

$$A_1 + A_2.10 + A_3.10^2 + \ldots,\ a_1 + a_2.10 + a_3.10^2 + \ldots,\ x_1 + x_2.10 + x_3.10^2 \ldots$$

il dividendo, il divisore ed il quoziente, il quale suppongo esatto. Se il numero a_1 è pari o il 5, per cui il dividendo ed il divisore sarebbero entrambi divisibili per quel numero, lo sopprimo anzichè intraprenderne la divisione. Esamino il prodotto

$$a_1 x_1 + (a_2 x_1 + a_1 x_2)\, 10 + (a_3 x_1 + a_2 x_2 + a_1 x_3)\, 10^2 +$$
$$(a_4 x_1 + a_3 x_2 + a_2 x_3 + a_1 x_4)\, 10^3 + \ldots\ldots$$

e siccome $a_1 x_1$ avrà generalmente due cifre, suppongo $a_1 x_1 = \alpha_1 + b_1 .10$: sarà $\alpha_1 = A_1$ che è la cifra delle unità nel dividendo, e b_1 il porto da unire ad $a_2 x_1 + a_1 x_2$. Anche la somma $b_1 + a_2 x_1 + a_1 x_2$ sarà composta delle unità A_2 e di decine b_2, epperò suppongo

$$a_1 x_1 = A_1 + b_1 .10\,; \qquad b_1 + a_2 x_1 + a_1 x_2 = A_2 + b_2 .10\,;$$
$$b_2 + a_3 x_1 + a_2 x_2 + a_1 x_3 = A_3 + b_3 .10\,; \text{ ec. ec.}$$

Da queste equazioni raccolgo che x_1 moltiplicato per a_1, ultima cifra del divisore, deve dare un prodotto del quale

conosco le unità A_1. Siccome a_1 non è nè il 5 nè un pari, osservando la tavola di Pitagora, la quale serve alla moltiplicazione dei numeri semplici, vedo che x_1 viene ad essere determinato assolutamente. Conoscendo x_1, quindi b_1, siccome $a_1 x_2 = A_2 + b_2 . 10 - a_2 x_1 - b_1$, vengo pure a sapere quale sia la cifra delle unità del prodotto $a_1 x_2$, dunque ne determino x_2 epperò anche b_2: poi colla terza equazione trovo x_3 e b_3, quindi x_4 e b_4, ec. ec.

Dividiamo 9638784 per 2789.

Siccome $a_1 x_1 = 9.x_1 = 4 + b_1 .10$, il prodotto $9.x_1$ deve avere per cifra semplice il 4, e colla tavola di Pitagora trovo $x_1 = 6$, epperò $b_1 = 5$;

quindi $b_1 + a_2 x_1 + a_1 x_2 = 5 + 6.8 + 9.x_2 = A_2 + b_2 . 10$, ossia $53 + 9 x_2 = 8 + b_2 .10$, $9 x_2 = 8 - 3 + (b_2 - 5)\, 10 = 5 + (b_2 - 5)\, 10$ e siccome il prodotto $9 x_2$ deve avere per ultima cifra il 5 ne deduco essere $x_2 = 5$, $b_2 - 5 = 4$, $b_2 = 9$.

Trovo $b_2 + a_3 x_1 + a_2 x_1 + a_1 x_3 = 9 + 7.6 + 8.5 + 9 x_3 = 91 + 9 x_3 = A_3 + b_3 .10 = 7 + b_3 .10$, e siccome il prodotto $9 x_3$ deve avere per cifra semplice $7 - 1 = 6$, $x_3 = 4$, $b_3 = 12$

Formo $b_3 + a_4 x_1 + a_3 x_2 + a_2 x_3 + a_1 x_4 =$ $12 + 4.8 + 5.7 + 2.6 + 9 x_4 = 91 + 9 x_4 = A_4 + b_4 .10 = 8 + b_4 .10$, e perchè $9 x_4$ abbia $8 - 1 = 7$ per cifra semplice, $x_4 = 3$, $b_4 = 11$, il quoziente cercato sarà 3456; il quale abbiamo determinato senza tentativi, impiegando le quattro cifre minori del dividendo e del divisore, ed eseguendo nove moltiplicazioni di numeri semplici, e $2 + 3 + 4 = 9$ somme. Le altre equazioni

$$b_4 + a_4 x_2 + a_3 x_3 + a_2 x_4 = A_5 + b_5 .10 ,$$

$$b_5 + a_4 x_3 + a_3 x_4 = A_6 + b_6 .10 , \quad b_6 + a_4 x_4 = A_7$$

offrono un mezzo diretto di verificazione: e con esse troviamo

$$7 + 3.8 + 4.7 + 5.2 = 73 = A_5 + b_5\, 10 , \qquad A_5 = 3 ,\ b_5 = 7$$

$$7 + 7.3 + 2.4 = 36 = A_6 + b_6\, 10 , \qquad A_6 = 6 ,\ b_6 = 3$$

$$3 + 2.3 = 9 = A_7 , \qquad A_7 = 9.$$

Eseguiamo una seconda divisione disponendo la operazione coll' ordine che sembra il più comodo

Dividendo 709264029 divisore $a_4 a_3 a_2 a_1 = 1483$ / quoziente $x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 = 478263$.

Siccome $a_1 x_1 = 3x_1$ deve avere per cifra semplice $A_1 = 9$, $x_1 = 3$, $b_1 = 0$.

Formo $a_2 x_1 = 24$, levo le 4 unità da $A_2 = 2$, e non potendo levo 4 da 12, resta 8. Il prodotto $a_1 x_2 = 3x_2$ avendo per ultima cifra 8, $x_2 = 6$: $a_2 x_1 + 9_1 x_2 = 24 + 18 = 42$, $b_2 = 4$.

Formo moltiplicando in croce, $a_3 x_1 + a_2 x_2 = 4.3 + 8.6 = 60$, vi unisco il porto $b_2 = 4$, ho 64: levo 4 da $A_3 = 0$, ossia 4 da 10 ho 6, e siccome $a_1 x_3 = 3x_3$ ha per ultima cifra il 6, $x_3 = 2$; aggiungo $a_1 x_3 = 6$ ad $a_3 x_1 + a_2 x_2 + b_2 = 64$, ho 70, quindi il porto $b_3 = 7$.

Formo $a_4 x_1 + a_3 x_2 + a_2 x_3 = 1.3 + 6.4 + 2.8 = 43$, cui unito il porto 7, ho 50: levo 0 da $A_4 = 4$ e perchè l' avanzo 4 è l' ultima cifra di $3x_4$ sarà $x_4 = 8$. Aggiungo $3x_4 = 24$ a 50 ed ho il porto $b_4 = 7$.

Formo $a_4 x_2 + a_3 x_3 + a_2 x_4 = 1.6 + 4.2 + 8.8 = 78$, vi unisco $b_4 = 7$, ed ho 85: levo 5 da $A_5 = 6$ resta 1, per cui $3x_5$ ha per ultima cifra l' unità, $x_5 = 7$. Aggiungo $3x_5 = 21$ a 85 ed ottengo il porto $b_5 = 10$.

Formo $a_4 x_3 + a_3 x_4 + a_2 x_5 = 1.2 + 4.8 + 8.7 = 90$, vi unisco il porto 10, ho 100: levo 0 da $A_6 = 2$, onde da $3x_6$ desumo $x_6 = 4$. Aggiungo $3x_6 = 12$ a 100 ed ho il porto $b_6 = 11$.

Trovato il quoziente, a riprova, formo
$a_4 x_4 + a_3 x_5 + a_2 x_6 = 1.8 + 4.7 + 4.8 = 68$, cui sommato 11, ho 79, onde $A_1 = 9$, ad $a_4 x_5 + a_3 x_6 = 23$ unisco il porto $b_7 = 7$, ottengo 30 per cui $A_8 = 0$.

Ad $a_4 x_6 = 4$ aggiungo il porto $b_8 = 3$ ed ho $A_9 = 7$.

Il quoziente di sei cifre si è trovato senza tentativi, impiegando sei cifre del dividendo e tutto il divisore: abbisognarono

18 moltiplicazioni di numeri semplici, e 11 somme. Col metodo comune avremmo eseguite $4.6 = 24$ moltipliche, $3.6 = 18$ somme ed altrettante sottrazioni. Se però alla nostra regola aggiungiamo la prova, si fanno altre 6 moltiplicazioni ed altre 6 somme.

Se la divisione non si può effettuare, col nostro metodo veniamo a trovare quel moltiplicatore del divisore che dà il prodotto più piccolo, le ultime cifre del quale formano il dividendo. Adduciamone una prova di fatto.

$$\text{Dividendo} \quad 763732 \qquad \frac{\text{divisore} \quad a_3 a_2 a_1 = 329}{\text{quoto} \quad x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 = 585908}.$$

Siccome $A_1 = 2$, considerando il prodotto $a_1 x_1 = 8 x_1$ che deve avere 2 per cifra semplice, ne deduco $x_1 = 9$, $b_1 = 7$.

Formo $b_1 + a_2 x_1 = 7 + 16 = 23$: levo 3 da $A_2 = 3$, ho zero: dunque $a_1 x_2 = 0$, $x_2 = 0$, $b_2 = 2$.

Formo $b_2 + a_3 x_1 + a_2 x_2 = 3.8 + 2 = 26$: tolgo 6 da $A_3 = 7$, ho 1: onde dal prodotto $a_1 x_3 = 9 x_3$ desumo $x_3 = 9$; $b_2 + a_3 x_1 + a_2 x_2 + a_1 x_3 = 26 + 81 = 107$, $b_3 = 10$.

Formo $b_3 + a_3 x_2 + a_2 x_3 = 10 + 18 = 28$: levo 8 da $A_4 = 3$, ossia 8 da 13, ho 5: onde da $9 x_4$ desumo $x_4 = 5$, e siccome $28 + 9 x_4 = 73$, $b_4 = 7$.

Formo $b_4 + a_3 x_3 + a_2 x_4 = 7 + 2.5 + 3.9 = 44$: levo 4 da $A_5 = 6$, resta 2, per cui da $9 x_5$ deduco $x_5 = 8$, e siccome $44 + 9 x_5 = 116$, $b_5 = 11$.

Formo $b_5 + a_3 x_4 + a_2 x_5 = 11 + 2.8 + 3.5 = 42$: levo 2 da $A_6 = 7$, resta 5, onde $x_6 = 5$.

Avendo impiegate tutte le cifre del dividendo, l' operazione si arresta: ed avrò le altre cifre maggiori del vero prodotto mediante le solite equazioni.

Dal numero $42 + a_1 x_6 = 87$ ottengo $b_6 = 8$.

Da $8 + a_3 x_5 + a_2 x_6 = 42$ ricavo $A_7 = 2$, $b_7 = 4$

$4 + a_3 x_6 \qquad = 19 \qquad A_8 = 9$, $A_9 = 1$

e finalmente ho il numero $192763732 = 329 \times 585908$.

Generalmente il dividendo non contiene esattamente il divisore, e si vuole conoscere il maggior numero di volte che questo è contenuto in quello, non che l'eccesso del dividendo sul vero prodotto. Siccome le ultime cifre del dividendo dipendono in parte dalle cifre del vero prodotto, in parte da quelle della differenza incognita, la quale può essere qualunque intero più piccolo del divisore, non è possibile desumere dalle cifre minori del dividendo le minori del quoto, epperò bisogna invertere l'ordine della operazione, come insegna il metodo comune, al quale crediamo di poter surrogarne altro che prendo a dimostrare.

Devo prepararmi alcune premesse la prova delle quali si semplifica impiegando i segni dell' algebra.

Indico con A un numero maggiore di un altro B, non divisibile per questo; chiamo Q il quoto, B_1 il resto della divisione per cui $A = BQ + B_1 = B(Q+1) - (B - B_1)$.

Dimostrerò che uno almeno dei prodotti BQ, $B(Q+1)$ ha tante cifre a sinistra identiche con altrettante di A, quante sono quelle di Q meno una, ovvero due di meno.

Suppongo $BQ = a_m\, a_{m-1} \ldots\ldots a_{n+1}\, a_n \ldots\ldots a_2\, a_1$

$B_1 = b_n \ldots\ldots b_2\, b_1$.

Sommando questi numeri, se $a_{n+1} < 9$, le cifre $a_{n+2}, a_{n+3} \ldots a_m$ in numero $m-n-1$ saranno le stesse nei due numeri BQ, $BQ + B_1 = A$. Ma se B ha n cifre, Q ne ha r, BQ ne avrà $n+r$ ovvero $n+r-1$, quindi essendo $m = n+r$, $r = m-n$; se $m = n+r-1$, $r = m-n+1$. Dunque il prodotto A avrà tante cifre a sinistra identiche con altrettante cifre di BQ, quante sono quelle del quoto Q meno una ovvero meno due secondo che $m = n+r$, o $m = n+r-1$. Ma la cifra a_{n+1} del prodotto BQ, e molte altre che la precedono a sinistra ponno essere tutte eguali al numero 9, dippiù $a_n + b_n$ col porto dovuto alle somme antecedenti $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2 \ldots\ldots$ essere non minore di 10.

Supponiamo $BQ = a_{m+r_{,}+n_{,}}\ a_{m+r_{,}+n_{,}-1} \ldots a_{r_{,}+n_{,}+1}\ 9_{r_{,}+n_{,}} \ldots$

(1) $9_{n_{,}+1}\ a_{n_{,}}\ a_{n_{,}-1} \ldots a_2\ a_1$

$B_1 = b_{n_{,}}\ b_{n_{,}-1} \ldots b_2\ b_1$

ove ho messe delle lettere al piede della cifra 9 per indicarne il numero ed il posto. Sommando BQ con B_1, siccome $a_{n_{,}}+b_{n_{,}}$ non < 10, avremo il porto 1, che aggiunto a $9_{n_{,}+1}$ dà 10, quindi nuovamente il porto 1, e così più volte, per cui

$$(2)\quad A = BQ + B_1 = a_{m+r_{,}+n_{,}} \ldots (a_{n_{,}+r+1} + 1)\ o_{n_{,}+r_{,}}\ o_{n_{,}+r_{,}-1} \ldots o_{n_{,}+1}\ (a_{n_{,}} + b_{n_{,}} - 10) \ldots (a_{,} + b_{,})$$

Se $B = c_{n_{,}+s_{,}} \ldots c_{n_{,}+1}\ c_{n_{,}}\ c_{n_{,}-1} \ldots c_2\ c_1$.

Sommando $BQ = a_{m+r_{,}+n_{,}} \ldots a_{n_{,}+r_{,}+1}\ 9_{n_{,}+r_{,}} \ldots$

(3) $9_{n_{,}+s_{,}} \ldots 9_{n_{,}+1}\ a_{n_{,}}\ a_{m-1} \ldots a_2\ a_1$

$B = c_{n_{,}+s_{,}} \ldots c_{n_{,}+1}\ c_{n_{,}}\ c_{n_{,}-1} \ldots c_2\ c_1$.

Siccome è almeno $c_{n_{,}+s_{,}} = 1$, $9_{n_{,}+s_{,}} + c_{n_{,}+s_{,}}$ non < 10, da $9_{n_{,}+s_{,}+1}$ fino a $9_{n_{,}+r_{,}}$ almeno, tutte queste cifre eguali a 9 daranno tanti zeri nella somma: sarà

$$(4)\quad B(Q+1) = a_{m+r_{,}+n_{,}} \ldots (a_{n_{,}+r_{,}+1} + 1)\ o_{n_{,}+r_{,}} \ldots o_{n_{,}+s_{,}+1}\ a_{n_{,}+s_{,}}\ a_{n_{,}+s_{,}-1} \ldots a_2\ a_1,$$

epperò ascendendo dalla cifra $o_{n_{,}+s_{,}+1}$ fino ad $a_{m+r_{,}+n_{,}}$ il prodotto $B(Q+1)$ avrà $m+r_{,}+n_{,}-(n_{,}+s_{,}) = m+r_{,}-s_{,}$ cifre eguali ad altrettante del numero A. Ma per supposto A è dotato di $m+r_{,}+n_{,}$ cifre, B di $n_{,}+s_{,}$, Q ne avrà $m+r_{,}-s_{,}$, ovvero $m_{,}+r_{,}-s_{,}-1$: dunque A e $B(Q+1)$ avranno a sinistra o tante cifre identiche quante sono quelle del quoto, ovvero una di meno.

Passiamo ad una seconda preposizione. Indico con

$$a_{n+1}\,10^n + a_n\,10^{n-1} \ldots + a_{n-s+1}\,10^{n-s} + a_{n-s}\,10^{n-s-1} + \ldots + a_2\,10 + a_1$$

$$x_r\,10^{r-1} + x_{r-1}\,10^{r-2} \ldots + x_{r-s+2}\,10^{r-s+1} + x_{r-s+1}\,10^{r-s} + \ldots + x_2\,10 + x_1$$

$$(a_{n+r} + b_{n+r}\,10)\,10^{n+r-1} + a_{n+r-1}\,10^{n+r-2} + a_{n+r-2}\,10^{n+r-3} + \ldots + a_{n+1}\,10^n + a_n\,10^{n-1} \ldots + a_2\,10 + a_1$$

il divisore, il quoto ed il vero prodotto.

Siccome $a_{n+1}\, x_r$ col porto b_{n+r-1} dei prodotti antecedenti deve eguagliare $a_{n+r} + b_{n+r} \cdot 10$: il prodotto $a_n\, x_r + a_{n+1}\, x_{r-1}$ col porto b_{n+r-2} dei prodotti inferiori deve dare un numero $a_{n+r-1} + b_{n+r-1} \cdot 10$, ecc. Poniamo le equazioni

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{l}
a_{n+1}\, x_r + b_{n+r-1} = a_{n+r} + b_{n+r} \cdot 10 \\
a_{n+1}\, x_{r-1} + a_n\, x_r + b_{n+r-2} = a_{n+r-1} + b_{n+r-1} \cdot 10 \\
a_{n+1}\, x_{r-2} + a_n\, x_{r-1} + a_{n-1}\, x_r + b_{n+r-3} = a_{n+r-2} + b_{n+r-2} \cdot 10 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n+1}\, x_{r-s+1} \ldots + a_{n-s+2}\, x_r + b_{n+r-s} = a_{n+r-s+1} + b_{n+r-s+1} \cdot 10 \\
a_{n+1}\, x_{r-s} + a_n\, x_{r-s+1} \ldots + a_{n-s+1}\, x_r + b_{n+r-s-1} = \\
\qquad\qquad\qquad a_{n+r-s} + b_{n+r-s} \cdot 10 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right.$$

e sarà

$$(\beta)\left\{\begin{array}{l}
a_{n+1}\, x_r\, 10^{n+r-1} + (a_{n+1}\, x_{r-1} + a_n\, x_r)\, 10^{n+r-2} + \\
(a_{n+1}\, x_{r-3} + \ldots + a_{n-s}\, x_r)\, 10^{n+r-s} + \ldots \\
+ (a_{n+1}\, x_{r-s} \ldots + a_{n-s+1}\, x_r)\, 10^{n+r-s-1} + \\
(a_{n+1}\, x_{r-s-1} \ldots + a_{n-s}\, x_r)\, 10^{n+r-s-2} + \\
(a_{n+1}\, x_{r-s-2} \ldots + a_{n-s-1}\, x_r)\, 10^{n+r-s-3} + \ldots \\
+ (a_3\, x_1 + a_2\, x_2 + a_1\, x_3)\, 10^2 + (a_2\, x_1 + a_1\, x_2)\, 10 + a_1\, x_1 = \\
= (a_{n+r} + b_{n+r} \cdot 10)\, 10^{n+r-1} + a_{n+r-1}\, 10^{n+r-2} + a_{n+r-2}\, 10^{n+r-3} + \ldots \\
+ (a_{n+r-s+2} + b_{n+r-s+2} \cdot 10 - b_{n+r-s+1})\, 10^{n+r-s+1} + \\
(a_{n+r-s+1} + b_{n+r-s+1} \cdot 10 - b_{n+r-s})\, 10^{n+r-s} + \\
(a_{n+r-s} + b_{n+r-s} \cdot 10 - b_{n+r-s-1})\, 10^{n+r-s-1} + \\
+ (a_{n+1}\, x_{r-s-1} + a_n\, x_{r-s} + \ldots + a_{n-s}\, x_r)\, 10^{n+r-s-2} + \\
(a_{n+r-s-2} + b_{n+r-s-2} \cdot 10)\, 10^{n+r-s-3} \ldots + a_3\, 10^2 + a_2\, 10 + a_1,
\end{array}\right.$$

e siccome $10 > x_{r-s-1}$, $a_{n+1} \cdot 10 \cdot 10^{n+r-s-2} > a_{n+1}\, x_{r-s-1} \cdot 10^{n+r-s-2}$

$$a_n \cdot 10^{n+r-s-2} > a_{n+r-s-2} \cdot 10^{n+r-s-3} + \ldots + a_2 \cdot 10 + a_1,$$

quindi $(a_{n+1} . 10 + a_n) 10^{n+r-s-2} +$

$$b_{n+r-s-2} . 10^{n+r-s-2} > a_{n+1} x_{r-s-1} . 10^{n+r-s-2} +$$

$$(a_{n+r-s-2} + b_{n+r-s-2} . 10) 10^{n+r-s-3} \ldots + a_2 . 10 + a_1 .$$

Se $a_{n+r-s-1}$ è una delle cifre comuni al dividendo ed al vero prodotto, sarà $n+r-s-1 > n+2$, ossia $r > s+3$, $n+r-s-3 > n$, la parte $a_{n+r-s-2} . 10^{n+r-s-3} + \ldots + A_2 10 + A_1$ del dividendo sarà più grande del divisore $a_{n+1} 10^n + \ldots + a_2 10 + a_1$: e siccome il prodotto vero supera il dividendo diminuito del divisore sarà molto più maggiore del numero

$$(\gamma) \qquad (a_{n+r} + b_{n+r} . 10) 10^{n+r-1} + a_{n+r-1} . 10^{n+r-2} \ldots +$$
$$a_{n+r-s} . 10^{n+r-s-1} + a_{n+r-s-1} . 10^{n+r-s-2}.$$

E perchè $(\theta) = (a_{n+r} + b_{n+r} . 10) 10^{n+r-1} + a_{n+r-2} . 10^{n+r-2} \ldots +$

$$(a_{n+r-s} - b_{n+r-s-1}) 10^{n+r-s-1}$$

$$+ (a_{n+1} x_{r-s-1} + a_n x_{r-s} + a_{n-1} x_{r-s+1} \ldots + a_{n-s} x_r) 10^{n+r-s-2}$$

$$+ (a_{n+r-s-2} + b_{n+r-s-2} . 10) 10^{n+r-s-3} + a_{n+r-s-3} . 10^{n+r-s-4} \ldots +$$
$$a_2 10 + a_1$$

$$< (a_{n+r} + b_{n+r} . 10) 10^{n+r-1} + a_{n+r-2} . 10^{n+r-2} \ldots +$$
$$(a_{n+r-s} - b_{n+r-s-1}) 10^{n+r-s-1}$$

$$+ (a_n x_{r-s} + a_{n-1} x_{r-s+1} \ldots + a_{n-s} x_r) 10^{n+r-s-2} +$$
$$(a_{n+1} 10 + a_n) 10^{n+r-s-2} + b_{n+r-s-2} . 10^{n+r-s-2}$$

dunque quest' ultimo numero è maggiore di (γ), epperò

$$(\delta) \qquad b_{n+r-s-2} + a_n (x_{r-s} + 1) + a_{n-1} x_{r-s+1} \ldots +$$
$$a_{n-s} x_r > a_{n+r-s-1} + (b_{n+r-s-1} - a_{n+1}) 10.$$

Ciò premesso, supponiamo che col mezzo delle equazioni (α) siano determinate le cifre x_r, x_{r-1}, $x_{r-2} \ldots$ fino ad x_{r-s+1}; la seguente x_{r-s} dovrà rendere soddisfatte le due equazioni

$$(\varepsilon)\quad \begin{cases} b_{n+r-s-1} + a_{n+1}\,x_{r-s} + a_n\,x_{r-s+1} + a_{n-1}\,x_{r-s+2}\ldots\ldots + \\ \qquad a_{n-s+1}\,x_r = a_{n+r-s} + b_{n+r-s}\,.\,10 \\ b_{n+r-s-2} + a_{n+1}\,x_{r-s-1} + a_n\,x_{r-s} + a_{n-1}\,x_{r-s+1}\ldots\ldots + \\ \qquad a_{n-s}\,x_r = a_{n+r-s-1} + b_{n+r-s-1}\,.\,10\,. \end{cases}$$

Siccome nella prima equazione (α) il numero $a_{n+r} + b_{n+r}\,10$ rappresenta la prima o le prime due cifre del dividendo, conoscendo x_r determineremo b_{n+r-1}; quindi con x_r, x_{r-1} si trova b_{n+r-2}, ecc. per cui pervenuti alla ricerca di x_{r-s} sarà noto b_{n+r-s}.

Supponiamo conosciuto il valore di x_{r-s}: se nella prima equazione (ε) porremo $x_{r-s}+1$ per x_{r-s}, e $b_{n+r-s-1} - a_{n+1}$ in luogo di $b_{n+r-s-1}$ quella equazione sarà tutt' ora soddisfatta. Ma dalla seconda avremo

$$\begin{gathered} b_{n+r-s-2} + a_n\left(x_{r-s}+1\right) + a_{n-1}\,x_{r-s+1} + \ldots\ldots + a_{n-s}\,x_r \\ \text{non} > a_{n+r-s-1} + \left(b_{n+r-s-1} - a_{n+1}\right)10, \end{gathered}$$

la quale relazione contraddice alla condizione (δ), epperò il vero valore di x_{r-s} deve essere il più grande compatibile colle due equazioni (ε), ossia

$$(\iota)\quad \begin{gathered} b_{n+r-s-1} + a_{n+1}\,x_{r-s} + a_n\,x_{r-s+1}\ldots\ldots + \\ a_{n-s+1}\,x_r = a_{n+r-s} + b_{n+r-s}\,.\,10 \\ a_n\,x_{r-s} + a_{n-1}\,x_{r-s+1}\ldots\ldots + \\ a_{n-s}\,x_r \ \text{non} > a_{n+r-s-1} + b_{n+r-s-1}\,.\,10, \end{gathered}$$

quindi
$$\begin{gathered} \left(a_{n+1}\,10 + a_n\right)x_{r-s} + \left(a_n\,.\,10 + a_{n-1}\right)x_{r-s+1}\ldots\ldots + \\ \left(a_{n-s+1}\,.\,10 + a_{n-s}\right)x_r \end{gathered}$$
$$(\xi)\quad \text{non} > b_{n+r-s}\,.\,10^2 + a_{n+r-s}\,.\,10 + a_{n+r-s-1}\,.$$

Da queste relazioni concludiamo che per determinare x_{r-s}, oltre le operazioni eseguite antecedentemente, occorre il numero

$$(\eta)\quad a_{n-1}\,x_{r-s+1}\ldots\ldots + a_{n-s}\,.\,x_r$$

quindi s prodotti ciascuno di due cifre semplici, ed $s-1$ somme. Impiegando la relazione (ξ) dovremo formare il numero

$b_{n+r-s}\,10^2 + a_{n+r-s}\,10^2 + a_{n+r-s-1}$ e fare anche una sottrazione. Ma siccome è necessaria la cognizione del numero $b_{n+r-s-1}$ gioverà usare a preferenza le relazioni (ι) in luogo di (ξ). Dunque la cifra x_{r-s} del quoto dipende dalle cifre $a_{n+1}, a_n, a_{n-1} \ldots a_{n-s}$ del divisore, e dalle $b_{n+r}, a_{n+r}, a_{n+r-1} \ldots a_{n+r-s-1}$ del dividendo: cioè dalle $s+1$ cifre del maggior ordine del divisore, e da $s+2$ ovvero $s+3$ delle cifre maggiori del dividendo. Quella cifra x_{r-s} deve essere la più grande che moltiplicata per il numero $a_{n+1}.10 + a_n$, rappresentato dalle due cifre maggiori del quoto, dà un prodotto non maggiore di un numero dato, che è

$$b_{n+r-s}.10^2 + a_{n+r-s}.10 + a_{n+r-s-1} - (a_n.10 + a_{n-1})\,x_{r-s+1} - (a_{n-1}.10 + a_{n-2})\,x_{r+s+2} \ldots - (a_{n-s+1}.10 + a_{n-s})\,x_r.$$

Si dovranno inoltre formare tutte le somme di prodotti

$$a_{n+1}x_r;\ a_{n+1}x_{r-1} + a_n x_r;\ a_{n+1}x_{r-2} + a_n x_{r-1} + a_{n-1}x_r;\ldots..$$

$$a_{n+1}x_{r-s} + a_n x_{r-s+1} \ldots + a_{n-s+1}x_r;$$

$$a_n x_{r-s} + a_{n-1}x_{r-s+1} \ldots + a_{n-s}x_r$$

cioè un numero di moltipliche espresso da $1+2+3\ldots..+(s+1)+(s+1) = \frac{(s+1)(s+4)}{2}$ e ciascuna di due cifre semplici: e dippiù $1+2+3\ldots+s+s = \frac{s(s+3)}{2}$ somme.

Il metodo comune esige tentativi talvolta penosi, sempre assai più complicati ed un maggior numero di operazioni. Ogni cifra deve essere il numero più grande il quale moltiplicato per tutto il divisore dà un prodotto non più grande di altro numero dato, che dicesi residuo. Ognuna si moltiplica per tutto il divisore, onde si fanno $n+1$ prodotti di numeri semplici, quindi n somme, poi altrettante sottrazioni fra cifre semplici, levando il prodotto dal residuo. Per cui trovata la cifra x_{r-s} si sono eseguiti $(s+1)(n+1)$ prodotti, $(s+1)n$ somme ed $(s+1)n$ sottrazioni. Dunque si fanno $(s+1)(n+1) - \frac{(s+1)(s+4)}{2} = \frac{(s+1)(2n-s-2)}{2}$ moltiplicazioni e $\frac{4n+4sn-s^2-3s}{2}$ somme inutili all'oggetto che si

ha di mira direttamente: le quali operazioni riescono assolutamente superflue nel calcolo approssimato. Per determinare le ultime cifre del quoziente x_3, x_2, x_1 seguendo il nostro metodo, dovressimo far uso delle equazioni

$$(h)\quad \begin{cases} a_{n+1}\,x_3 + a_n\,x_4 \dots + a_{n-r+4}\,x_r + b_{n+2} = a_{n+3} + b_{n+3}\,.\,10 \\ a_{n+1}\,x_2 + a_n\,x_3 \dots + a_{n-r+3}\,x_r + b_{n+1} = a_{n+2} + b_{n+2}\,.\,10 \\ a_{n+1}\,x_1 + a_n\,x_2 \dots + a_{n-r+2}\,x_r + b_n \quad = a_{n+1} + b_{n+1}\,.\,10 \\ \qquad a_n\,x_1 \dots + a_{n-r+1}\,x_r + b_{n-1} = a_n \quad + b_n\,.\,10\,; \end{cases}$$

ma siccome l' ultima cifra del dividendo comune col divisore è a_{n+3}, le seguenti a_{n+2}, a_{n+1}, a_n saranno generalmente ignote. Intanto, ommesso a_{n+2}, troveremo un valore di x_3 che tutt'al più sarà minore del vero di un'unità. Ma per accertarci e per determinare x_2 ed x_1 siamo ricondotti al metodo comune.

Indichiamo il dividendo con

$$(b_{n+r}\,10 + a_{n+r})\,10^{n+r-1} + a_{n+r-1}\,10^{n+r-2} \dots +$$
$$a_{n+3}\,10^{n+2} + A_{n+2}\,.\,10^{n+1} + A_{n+1}\,10^n \dots + A_3\,10^2 + A_2\,10 + A_1$$

e siccome il prodotto del divisore per il numero

$$x_r\,.\,10^{r-1} + x_{r-1}\,10^{r-2} + \dots + x_4\,.\,10^3 + (x_3 + 1)\,10^2,$$

cioè
$$a_{n+1}\,x_r\,.\,10^{n+r-1} + (a_{n+1}\,x_{r-1} + a_n\,x_r)\,10^{n+r-2} \dots$$
$$+ (a_{n+1}\,x_4 + a_n\,x_5 \dots + a_{n-r+5}\,x_r)\,10^{n+3} +$$
$$(a_n\,x_4 + \dots + a_{n-r+4}\,x_r)\,10^{n+2} + (a_{n-1}\,x_4 + \dots + a_{n-r+3}\,x_r)\,10^{n+1}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ (a_2\,x_4 + a_1\,x_5)\,10^4 + a_1\,x_4\,.\,10^3 +$$
$$(x_3 + 1)(a_{n+1}\,10^n + a_n\,10^{n-1} \dots + a_2\,10 + a_1)\,10^2 =$$
$$= (a_{n+r} + b_{n+r}\,.\,10 - b_{n+r-1})\,10^{n+r-1} +$$
$$(a_{n+r-1} + b_{n+r-1}\,.\,10 - b_{n+r-2})\,10^{n+r-2} \dots$$
$$+ (a_{n+5} + b_{n+5}\,.\,10 - b_{n+4})\,10^{n+4} + (a_{n+4} + b_{n+4}\,.\,10 - b_{n+3})\,10^{n+3} +$$
$$(a_n\,x_4 + a_{n-1}\,x_5 \dots + a_{n-r+4}\,x_r)\,10^{n+2} \dots +$$
$$a_1\,x_4\,.\,10^3 + (x_3 + 1)(a_{n+1}\,10^n \dots + a_1)\,10^2$$

questo prodotto è maggiore del dividendo e molto più di ciò che resta sopprimendovi a destra le ultime due cifre, avremo quindi

$$(a_{n+1}\,10^n + a_n\,10^{n-1} \ldots + a_1)(x_3+1) > (a_{n+3} + b_{n+3}\,10)\,10^n +$$
$$A_{n+2}\,.\,10^{n-1} + A_{n+1}\,10^{n-2} \ldots + A_3$$
$$(k) \qquad - (a_n x_4 + a_{n-1} x_5 \ldots + a_{n-r+4} x_r)\,10^n -$$
$$(a_{n-1} x_4 \ldots + a_{n-r+3} x_r)\,10^{n-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- (a_2 x_4 + a_1 x_5)\,10^2 - a_1 x_4\,.\,10\,.$$

Per formare il secondo membro di questa relazione notiamo che determinando x_3 colla prima equazione (h) ci sarà occorso già di calcolare la differenza

$$(a_{n+3} + b_{n+3}\,10) - (a_n x_4 + a_{n-1} x_5 \ldots + a_{n-r+4} x_r)$$

alla destra della quale scriveremo il numero $A_{n+2}\,.\,10^{n-1} + A_{n+1}\,10^{n-2} \ldots + A_3$ che consta delle $n-1$ cifre del dividendo precedenti a sinistra le ultime due A_1, A_2. Così avremo la differenza tra la parte positiva ed il primo termine negativo del secondo membro della relazione (k). L' altra parte che chiamo (A) vale a dire

$$(A) = (a_{n-1}\,10^{n-2} + a_{n-2}\,10^{n-3} \ldots + a_2\,10 + a_1)\,10\,.\,x_4 +$$
$$(a_{n-2}\,10^{n-3} + a_{n-3}\,10^{n-4} \ldots + a_2\,10 + a_1)\,10^2.\,x_5 + \ldots$$
$$+ (a_{n-r+3}\,10^{n-r+2} \ldots + a_2\,10 + a_1)\,10^{r-3}.\,x_r$$

si ottiene moltiplicando

$$(l) \qquad a_{n-1}\,10^{n-2} + a_{n-2}\,10^{n-3} + \ldots + a_3\,10^2 + a_2\,.\,10 + a_1$$

per

$$(m) \qquad x_r.\,10^{r-3} + x_{r-1}.\,10^{r-4} \ldots + x_6.\,10^3 + x_5.\,10^2 + x_4.\,10,$$

cioè l' ultimo termine $x_4.10$ per tutto il numero (l); il penultimo $x_5.10^2$ per (l) ommesso il primo termine a sinistra; poi $x_6.10^3$ per (l) tralasciati i due primi termini, e così di seguito. Dovremo quindi soddisfare la relazione (k) che scrivo $(x_3+1)B>P$.

Ripetendo riguardo ad x_2 ed x_1 quanto si è detto per x_3 concluderemo dover essere

$$[x_3 . 10 + (x_2 + 1)]B > P . 10 + A_2,$$

epperò (p) $$(x_2 + 1)B > (P - x_3 Q)10 + A_2 = P_1$$

$$[x_2 . 10 + (x_1 + 1)]B > P_1 . 10 + A_1$$

ed (q) $$(x_1 + 1)B > (P_1 - x_2 . Q)10 + A_1 = P_2$$

ed il residuo finale sarà $P_2 - Bx_1$.

Per trovare x_4 avremo eseguite tante moltiplicazioni quante ne indica la formola $\frac{(s+1)(s+4)}{2}$ ponendovi $s = r - 4$, cioè $\frac{r(r-3)}{2}$. Per avere x_3 ne abbisognano altre

$$(n - 1) + (n - 2) + (n - r + 3) = \frac{(2n - r + 2)(r - 3)}{2}.$$

Per avere x_2 ne faremo altre $n+1$, poi $n+1$ onde trovare x_1, ed $n+1$ ancora onde conoscere l' avanzo. Dunque il numero totale delle moltipliche sarà

$$\frac{r(r-3)}{2} + n(r-3) - \frac{(r-2)(r-3)}{2} + 3(n+1) = r(n+1),$$

cioè quante ne esige il metodo comune.

Ma colla nostra regola tutte le cifre del quoto fino esclusivamente alla penultima si trovano generalmente senza riprove: non si impiegano mano mano che le cifre del dividendo e del divisore che sono essenziali: nei calcoli di approssimazione si ha un notevole risparmio di operazioni, ed avremo lo stesso vantaggio tutte le volte si sappia, o attesa la piccolezza dell' avanzo finale o per altra ragione, che anche a_{n+2}, a_{n+1}, a_n eguagliano le cifre corrispondenti del dividendo, e ciò impiegando le equazioni (h) per trovare le ultime cifre del quoziente. Anzi siccome questo caso si incontra frequentemente, e le parti note delle dette equazioni (h) abbisognano essenzialmente per trovare x_2 ed x_1, credo che gioverà spesse volte tentare l'uso dei valori che danno quelle supposizioni.

Dobbiamo ricordare un caso eccezionale che abbiamo già accennato: cioè, essendo $n_1 + s_1$ le cifre del divisore B, se alcune cifre del dividendo A le quali, partendo dall' ultima a destra, occupano i posti $n_1 + 1$; $n_1 + 2$; .....; $n_1 + r_1 > n_1 + s_1$ sono eguali a zero, il prodotto $B(Q+1)$ e non BQ potrà essere

quello che ha comuni col dividendo almeno le $m+r_{\prime}-s_{\prime}$ cifre dell'ordine maggiore. Dunque se le cifre di A sono in numero $m+r_{\prime}+n_{\prime}=n+r+1$, quelle di B sono $n_{\prime}+s_{\prime}=n+1$, e Q ne ha $m+r_{\prime}-s_{\prime}=r$, il numero delle cifre comuni ad A e B(Q+1) sarà almeno $m+r_{\prime}-s_{\prime}=(m+r_{\prime}+n_{\prime})-(s_{\prime}+n_{\prime})=r$, quindi $\alpha_{n+2}=A_{n+2}=0$. Se le cifre di A saranno in numero $m+r_{\prime}+n_{\prime}=n+r$, sarà $m+r_{\prime}-s_{\prime}=r-1$, epperò nuovamente $\alpha_{n+2}=A_{n+2}=0$. Siccome anche in questo caso si verificano le proprietà su le quali è fondata la nostra analisi troveremo collo stesso mezzo tutte le cifre del quoto Q+1 fino ad x_2 di cui si conoscerà il valore prossimo dell' unità. Ma siccome $B(Q+1)>A>BQ$ alle condizioni (p), (q) dovremo sostituire le seguenti

$$(x_2-1)B<[P-x_3(Q+1)]10+A_2=\Pi_1,$$
$$(x_1-1)B<[\Pi_1-x_2(Q+1)]10+A_1=\Pi_2$$

e l' ultimo avanzo sarà $Bx_1-\Pi_2$. Ma per toglierci dall' incertezza potremo dividere A+B per B, ed ottenuti il quoto Q ed il residuo R, siccome $A+B=B.Q+R$, ossia $A=B(Q-1)+R$ nel numero $Q-1$ avremo il quoziente cercato.

Gli esempj che soggiungo dichiareranno l'uso della regola.

Dividendo 43753 $\quad$ divisore $a_3a_2a_1=314$ / quoto $x_3x_2x_1=139$.

Scriviamo ancora le equazioni, delle quali potremo far senza in appresso,

$$a_1x_1=\alpha_1+b_1.10,\quad b_1+a_1x_2+a_2x_1=\alpha_2+b_2.10,$$
$$b_2+a_1x_3+a_2x_2+a_3x_1=\alpha_3+b_3.10,$$
$$b_3+a_2x_3+a_3x_2=\alpha_4+b_4.10,\quad b_4+a_3x_3=\alpha_5+b_5.10.$$

Sono $b_5=0$, $\alpha_5=4$, ed osservata la grandezza del divisore siamo certi che $\alpha_4=3$.

Dunque devono essere

$$b_4+3x_3=4,\quad a_2x_3=x_3 \text{ non } >3+b_4.10,\quad x_3=1,\ b_4=1.$$

Avremo poi $\quad b_3+a_2x_3+a_3x_2=b_3+1+3x_2=3+10,$

$$b_2+3x_1+x_2+4=\alpha_3+b_3.10,$$

epperò $b_3+3x_2=12$, x_2+4 non $>a_3+b_3.10$. Se faccio $x_2=4$, $b_3=0$, siccome a_3 non >7 la seconda condizione non è soddisfatta, dunque saranno al più $x_2=3$, $b_3=3$. Supposto $a_3=7$ avremo $b_2+3x_1+7=37$, ossia $b_2+3x_1=30$,
$b_1+x_1+4x_2=b_1+x_1+12=a_2+b_2.10$, quindi $x_1=9$, $b_2=3$.

A riprova formo $a_1x_1=36$, onde $A_1=6$; $b_1=3$.
Poi $b_1+x_1a_2+x_2a_1=3+9+12=24$, $A_2=4$, $b_2=2$
$b_2+a_1x_3+a_2x_2+a_3x_1=2+3.9+1.3+4.1=36$, quindi $A_3=a_3=6$, $b_3=3$. Il vero prodotto è 43646, l'avanzo 107, il quoto 139.

Dividendo 9999859806 : $\dfrac{\text{divisore}\quad a_6a_5a_4a_3a_2a_1=342168}{\text{quoto}\quad x_5x_4x_3x_2x_1=29225}$.

Finchè non siamo esercitati nell' uso della regola bisogna tenerci sott' occhio le equazioni (a).

Devono essere $3x_5+b_1=9$, $3x_4+4x_5+b_3=9+b_1.10$,
per cui $x_5=2$, $b_1=3$

$3x_4+8+b_3=39$, $3x_3+4x_4+2x_5+b_4=9+b_3.10$,
cioè $3x_4+b_3=31$, $3x_3+4x_4+b_4=5+b_3.10$,
quindi $x_4=9$, $b_3=4$.
$3x_3+36+b_4=45$, $3x_2+4x_3+2x_4+1.x_5+b_5=a_4+b_4.10$,
ossia $3x_3+b_4=9$, $3x_2+4x_3+20+b_5=a_4+b_4.10$,
onde $x_3=2$, $b_4=3$ sebbene non si conosca a_4. Se poniamo $a_4=9$
$3x_2+28+b_5=39$, $3x_1+4x_2+2x_3+1.x_4+6x_5+b_6=a_5+b_5.10$,
cioè $3x_2+b_5=11$, $3x_1+4x_2+25+b_6=a_5+b_5.10$,
dunque al più $x_2=2$, $b_5=5$.
$3x_1+33+b_6=a_5+50$, $4x_1+2x_2+1.x_3+6x_4+8x_5+b_7=a_6+b_6.10$,
ossia $3x_1+b_6=a_5+17$, $4x_1+76+b_7=a_6+b_6.10$.
Se $a_5=8$, $x_1=5$, $b_6=10$.

A riprova formo $5.8=40$, $A_1=0$ col porto 4
$4+a_1.x_2+a_2x_1=4+2.8+5.6=50$, $A_2=0$ col porto 5
$5+1.5+2.6+2.8=38$, $A_3=8$ col porto 3
$3+2.5+1.2+6.2+9.8=99$, $A_4=9$ 9
$9+4.5+2.2+1.2+6.9+2.8=105$, $A_5=5$ 10
$10+3.5+4.2+2.2+1.9+6.2=58$, $A_6=8$ come abbiamo supposto.
Dunque sarà 9999859800 il prodotto vero coll' avanzo 6.

Dividendo 1498600239: $\frac{\text{divisore}}{\text{quoto}} \; \frac{a_4 a_3 a_2 a_1 = 4875}{x_r x_{r-1} x_{r-2} x_{r-3} x_{r-4} x_{r-5} \ldots = 307405\ldots}$

$4x_r + b_1 = 14$, $4x_{r-1} + 8x_r + b_2 = 9 + b_1 . 10$; $x_r = 3$, $b_1 = 2$

$4x_{r-1} + 24 + b_2 = 29$, $4x_{r-2} + 8x_{r-1} + 7x_r + b_3 = 8 + b_2 . 10$,
ossia $4x_{r-1} + b_2 = 5$, $4x_{r-2} + 8x_{r-1} + 21 + b_3 = 8 + b_2 . 10$.

Non ponno essere $x_{r-1} = 1$, $b_2 = 1$, $4x_{r-2} + 29 + b_3 = 18$,
dunque $x_{r-1} = 0$, $b_2 = 5$

$4x_{r-2} + 21 + b_3 = 58$, $4x_{r-3} + 8x_{r-2} + 7x_{r-1} + 5x_r + b_4 = 6 + b_3 . 10$,
ossia $4x_{r-2} + b_3 = 37$, $4x_{r-3} + 8x_{r-2} + 15 + b_4 = 6 + b_3 . 10$,
onde $x_{r-2} = 7$, $b_3 = 9$

$4x_{r-3} + 71 + b_4 = 96$, $4x_{r-4} + 8x_{r-3} + 7x_{r-2} + 5x_{r-1} + b_5 = 0 + b_4 . 10$,
ossia $4x_{r-3} + b_4 = 25$, $4x_{r-4} + 8x_{r-3} + 49 + b_5 = 0 + b_4 . 10$.

Se pongo $x_{r-3} = 5$, $b_4 = 5$ la seconda non regge, dunque
$x_{r-3} = 4$, $b_4 = 9$

$4x_{r-4} + 81 + b_5 = 90$, $4x_{r-5} + 8x_{r-4} + 7x_{r-3} + 5x_{r-2} + b_6 = 2 + b_5 . 10$,
cioè $4x_{r-4} + b_5 = 9$, $4x_{r-5} + 8x_{r-4} + 63 + b_6 = 2 + b_5 . 10$,
$x_{r-4} = 0$, $b_5 = 9$

$4x_{r-5} + 63 + b_6 = 92$, $4x_{r-6} + 8x_{r-5} + 7x_{r-4} + 5x_{r-3} +$
$b_7 = 3 + b_6 . 10$,

ossia $4x_{r-5} + b_6 = 29$, $4x_{r-6} + 8x_{r-5} + 20 + b_7 = 3 + b_6 . 10$,
$x_{r-5} = 5$, $b_6 = 9$

. . . .

Siccome abbiamo supposto che il vero prodotto abbia comuni col dividendo tutte le nove cifre dell' ordine maggiore, le cifre del quoto che abbiamo ottenute sono le sei prime per ogni numero che avremo ponendo alla destra del dividendo stesso altre quattro cifre.

Essendo poi $a_1 x_{r-5} = 25$, $2 + a_1 x_{r-4} + a_2 x_{r-5} = 2 + 5.7 + 5.0 = 37$,
$3 + a_1 x_{r-3} + a_2 x_{r-4} + a_3 x_{r-5} = 3 + 4 . 5 + 7 . 0 + 5 . 8 = 63$
$6 + a_1 x_{r-2} + a_2 x_{r-3} + a_3 x_{r-4} + a_4 x_{r-5} = 6 + 5.7 + 7.4 + 8.0 + 4.5 = 89$
$8 + a_1 x_{r-1} + a_2 x_{r-2} + a_3 x_{r-3} + a_4 x_{r-4} = 8 + 5.0 + 7.7 + 8.4 + 4.0 = 89$.
Sarà 1498599375 il vero prodotto del divisore e del quoto trovato, e 864 l' avanzo.

Ora che abbiamo comprovata con esempj la speditezza, colla quale si trovano le cifre del quoto col mezzo delle equazioni (α) allorchè si conoscono i numeri $a_{n+r}\ a_{n+r-1} \ldots$; vediamo come determineremo anche le altre, cioè le tre ultime cifre del medesimo quoziente.

Riprendiamo il secondo esempio.

Dividendo 9999859806 : $\dfrac{\text{divisore} \quad 342168}{\text{quoto} \quad x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 = 29225}$.

Siamo certi che le tre prime cifre del dividendo appartengono al vero prodotto.

Dunque $3x_5 + b_9 = 9$, $3x_4 + 4x_5 + b_8 = 9 + b_9 . 10$, onde $x_5 = 2$, $b_9 = 3$
$3x_4 + b_8 = 31$, $3x_3 + 4x_4 + 2.2 + b_7 = 9 + b_8 . 10$, $x_4 = 9$, $b_8 = 4$
$3x_3 + b_7 = 9$, $3x_2 + 4x_3 + 2 . 9 + 1 . 2 + b_6 = a_7 + b_7 . 10$,
ossia $3x_2 + 4x_3 + 20 + b_6 = a_7 + b_7 . 10$.

Quindi al più $x_3 = 2$. Per accertarci riprendo la formola (k) trovata precedentemente: sarà

$(a_{n+3} + b_{n+3} . 10) 10^n + A_{n+2} . 10^{n-1} \ldots + A_3 = 49 . 10^5 + 98598 = 4998598$,

da cui devo togliere $(a_n . 10^{n-1} \ldots . + a_1)\, 10 . x_4 +$
$(a_{n-1}\, 10^{n-2} \ldots . + a_1)\, 10^2 . x_5 \ldots . + (a_{n-r+4} . 10^{n-r+3} \ldots . + a_1)\, 10^{r-2}\, x_r$,

cioè moltiplico $\begin{matrix}42168\\ 92\end{matrix}$, ossia $9\times 42168 = 379512$; $2\times 2168 = 4336$.

$$\text{Sommo}\ \begin{array}{r}379512\\ 4336\\ \hline 422872\end{array}\ ; \qquad \text{Sottraggo}\ \begin{array}{r}4998598\\ 422872\\ \hline 769878\ (k)\end{array}$$

x_3 sarà il numero di volte più grande che il divisore è contenuto in questo residuo (k), appunto $x_3 = 2$ come abbiamo trovato.

$$\begin{array}{rl}769878 & \\ 684336 & \\ \hline 855420 & (l)\\ 684336 & \\ \hline 1710846 & (m)\\ 1710840 & \\ \hline 6 & (n)\end{array}$$

Ora da (k) levo il prodotto di x_3 per il divisore, e vi scrivo a destra $A_2 = 0$: x_2 sarà il maggior numero di volte che il divisore è contenuto in (l), onde $x_2 = 2$. Levo da (l) il prodotto di x_2 pel divisore e a destra del residuo scritto $A_1 = 6$ ottengo il numero (m) e sarà x_1 il numero più grande di volte che (m) contiene il divisore, onde $x_1 = 5$. Levato ormai da (m) il prodotto di x_1 per il divisore ho l'avanzo 6: come altrimenti avevamo già conseguìto.

Prendiamo dalla preziosa Aritmetica del Sig. Bourdon un altro esempio segnato come uno che richiede penosi tentativi.

$$\text{Dividendo}\ 9639475: \ \begin{array}{l}\text{divisore}\\ \text{quoto}\end{array}\ \frac{2789}{x_4 x_3 x_2 x_1 = 3456}\,.$$

Siccome $2x_4 + b_6 = 9$, $2x_3 + 7x_4 + b_5 = 6 + b_6 . 10$,

quindi $x_4 = 3$, $b_6 = 3$

$2x_3 + 21 + b_5 = 36$, $2x_2 + 7x_3 + 8x_4 + b_4 = a_5 + b_5 . 10$,

cioè $2x_3 + b_5 = 15$, $2x_2 + 7x_3 + 24 + b_4 = a_5 + b_5 . 10$,

dunque al più $x_3 = 4$, $b_5 = 7$, $2x_2 + 52 + b_4 = a_5 + 70$,

ossia $2x_2 + b_4 = a_5 + 18$.

Generalmente resterà incerto il valore di x_3, ma nel caso presente non essendovi dubbio procediamo a trovare x_2. Sopprimo nel dividendo la parte considerata 96, ed alla sinistra l' ultima cifra, onde resta 3947. Vi pongo a sinistra $b_5 = 7$ ed ho 73947. Moltiplico $\begin{array}{r}789\\ \underline{34}\end{array}$, ossia $\begin{array}{r}4\cdot 789 = 31\ 56\\ 3\ .\ \ 89 = \underline{26\ 7\ \ }\\ 58\ 26\end{array}$ e sommo.

Sottraggo

$$\begin{array}{rl} 73947 & \\ 5826 & \\ \hline 15687 & (k) \\ 13945 & \\ \hline 17425 & (l) \\ 16734 & \\ \hline 691 & (m) \end{array}$$

la cifra x_2 indica quante volte (k) contiene il divisore, epperò $x_2 = 5$. Levo da (k) il prodotto di x_2 pel divisore e alla destra del residuo (l) scrivo l' ultima cifra 5 del dividendo. Il numero x_1 indicherà quante volte il divisore si contiene in (l), cioè $x_1 = 6$. Levo da (l) il prodotto di $x_1 = 6$ pel divisore, ed ho l' ultimo avanzo (m).

Dividendo 1498600239, divisore 4875. Siccome questo secondo numero ha quattro cifre e la terza a sinistra del dividendo è uno zero possiamo trovarci nel caso eccezionale. Ad evitare ogni molestia, sommo i numeri dati e prendo a dividere

$$1498605114 : \quad \frac{4875}{x_6\, x_5\, x_4\, x_3\, x_2\, x_1 = 307406}.$$

$$4x_6 + b_8 = 14,\ 4x_5 + 8x_6 + b_7 = 9 + b_8 . 10,\ \text{onde}\ x_6 = 3,\ b_8 = 2$$

$$4x_5 + 24 + b_7 = 29,\ 4x_4 + 8x_5 + 21 + b_6 = 8 + b_7 . 10,$$

$$\text{ossia}\ \ 4x_5 + b_7 = 5,\ 4x_4 + 8x_5 + 13 + b_6 = b_7 . 10;$$

quindi non potendo essere $x_5 = 1$, $b_7 = 1$ in forza della seconda equazione, saranno

$$x_5 = 0,\ b_7 = 5 :\ 4x_4 + b_6 = 37,\ 4x_3 + 8x_4 + 7x_5 + 5x_6 + b_5 = 6 + b_6 . 10,$$

$$\text{ossia}\ \ 4x_3 + 8x_4 + 9 + b_5 = b_6 . 10,$$

epperò $x_4 = 7$, $b_6 = 9$: $4x_3 + b_5 = 25$,

$$4x_2 + 8x_3 + 49 + b_4 = a_9 + b_5 . 10,\ \ \text{ed al più}\ \ x_3 = 4,\ b_5 = 9.$$

Sebbene possiamo aver per buono il valore di x_3, per confermarci, e trovare x_2, x_1 riccorriamo alla regola superiormente indicata. Sopprimo nel dividendo a sinistra la parte già impiegata, a destra le ultime due cifre ed ho 051. Eseguisco la moltiplicazione $\begin{array}{r} 875 \\ \underline{307} \end{array}$ vale a dire

$$\left.\begin{array}{r} 875 \times 7 \\ 75 \times 0 \\ 5 \times 3 \end{array}\right\} = \begin{array}{r} 6125 \\ 000 \\ 15 \\ \hline 7625 \end{array}.$$

Alla sinistra di 051 scrivo $a_6 + b_6 . 10 = 96$ ottengo e sottraggo (l). Sarà $x_3 = 4$ il maggior numero di volte che il divisore stà in (l). Levo da (l) il prodotto di x_3 pel divisore e a destra dell' avanzo pongo in (m) la penultima cifra del dividendo: sarà $x_2 = 0$ che indica quante volte il divisore stà in (m). Levo da (m) il prodotto del divisore per $x_2 = 0$, scrivo a destra del residuo l' ultima cifra del dividendo ho (n), e sarà $x_1 = 6$. Quanto il divisore stà in (n) ne tolgo da (n) il prodotto, ed ottengo l'ultimo avanzo (p).

$$\begin{array}{rl} 96051 & \\ 7625 & \\ \hline 19801 & (l) \\ 19500 & \\ \hline 3011 & (m) \\ 30114 & (n) \\ 29250 & \\ \hline 864 & (p) \end{array}$$

Il quoto sarà 307405: il vero prodotto 1498599375 che cade nella eccezione.

Facciamo un ultimo esempio.

Dividendo 10000201973 $\dfrac{\text{divisore} \quad 342168}{\text{quoto} \quad x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 = 29226}$.

Siccome la sesta cifra a sinistra del dividendo non è lo zero non ha luogo l' eccezione.

$3x_5 + b_9 = 10$, $3x_4 + 4x_5 + b_8 = 0 + b_9 . 10$, $x_5 = 2$, $b_9 = 4$, $3x_4 + b_8 = 32$

$3x_3 + 4x_4 + 4 + b_7 = 0 + b_6 . 10$, $x_4 = 9$, $b_8 = 5$, $3x_3 + b_7 = 10$,

$$3x_2 + 4x_3 + 20 + b_6 = a_7 + b_7 . 10,$$

al più $x_3 = 2$, $b_7 = 4$. Ma non conoscendo a_7 ricorriamo alla solita regola. Tolgo dal dividendo 02019: scrivo a destra $a_8 + b_8 . 10 = 50$ ottengo 5002019.

Moltiplico $\begin{array}{r} 42168 \\ 29 \\ \hline \end{array}$ ed ho $\begin{array}{r} 379512 = 42168 \times 9 \\ 4336 \ = \ \ 2168 \times 2 \\ \hline 422872 \end{array}$.

Sottraggo $\begin{array}{r} 5002019 \\ 422872 \end{array}$

Siccome il divisore è contenuto due volte in (l) $x_3 = 2$, ne levo il prodotto e alla destra dell' avanzo pongo la penultima cifra del dividendo ed ho (m). Il divisore è contenuto due volte in (m), epperò $x_2 = 2$; ne levo il prodotto, alla destra del residuo scrivo l'ultima cifra del dividendo ho (n), in cui il divisore si contiene 6 volte, $x_1 = 6$ e tolto il prodotto da (n) ho l'ultimo residuo (p).

$$\begin{array}{lr} (l) & 773299 \\ & 684336 \\ \hline (m) & 889637 \\ & 684336 \\ \hline (n) & 2053013 \\ & 2053008 \\ \hline (p) & 5 \end{array}$$

REGOLA DI FOURIER. (*Analyse des équations.*)

Suppongo che siano

$$p\,10^{m+r}+p_1\,10^{m+r-1}+p_2\,10^{m+r-2}\ldots,\ b.10^n+b_1\,10^{n-1}+b_2\,10^{n-2}\ldots,$$
$$a\,10^r+a_1\,10^{r-1}+a_2\,10^{r-2}\ldots$$

il dividendo, il divisore ed il quoziente.

Saranno $(a.10+a_1)(b.10^2+b_1\,10+b_2)<p.10^3+p_1\,10^2+p_2.10+10$

$a(b.10+b_1)\,10+a_1(b\,10+b_1)+a\,b_2>p.10^2+p_1.10+p_2+1,$

quindi $a_1(b10+b_1)$ non $>(p.10^2+p_1.10+p_2)-a(b.10+b_1)-ab_2=R_1$.

Avremo pure $(a.10^2+a_1\,10+a_2)(b.10^3+b_1\,10^2+b_2.10+b_3)$

non $>p.10^5+p_1\,10^4+p_2.10^3+p_3.10^2+10^2$,

onde $a(b.10+b_1)\,10^2+a\,b_2.10+a\,b_3+a_2(b.10+b_1)$

$+a_1(b.10+b_1)\,10+a_1\,b_2$ non $>p.10^3+p_1\,10^2+p_2.10+p_3$,

quindi $a_2(b.10+b_1)$ non $>[R_1\,10+p_3-a_1(b10+b_1)]-(a_1b_2+ab_3)=R_2$.

Così $(a.10^3+a_1\,10^2+a_2\,10+a_3)(b.10^4+b_1\,10^3\ldots+b_4)$

non $>p.10^7+p_1\,10^6\ldots+p_4.10^3+10^3$,

epperò $a(b.10+b_1)\,10^3+a\,b_2.10^2+a\,b_3.10+a\,b_4$

$+a_1(b\,10+b_1)\,10^2+a_1\,b_2.10+a_1\,b_3$

$+a_2(b\,10+b_1)\,10+a_2\,b_2$

$+a_3(b.10+b_1)$

non $>p.10^4+\ldots+p_4$;

quindi $a_3(b\,10+b_1)$

non $>[R_2.10+p_4-a_2(b.10+b_1)]-(a_2b_2+a_1\,b_3+a\,b_4)$

ecc. ecc.

Essendo $(a.10+a_1)(b.10^3+b_1\,10^2+b_2\,10+1)<(p.10^2+p_1\,10+p_2)\,10^2$,

onde $a(b.10+b_1)\,10^3+a_1(b.10+b_1)\,10^2+a\,b_2\,10^2+$

$(a_1\,b_2+a)\,10+a_1<(p.10\ldots+p_2)\,10^2$;

questa condizione sarà soddisfatta quando sia

$a+a_1 b_2 < [p.10^2+p_1 10+p_2-a(b.10+b_1)10-a_1(b.10+b_1)-ab_2+1]\,10,$

ossia $\quad a+a_1 b_2 < (R_1 - a_1(b\,10+b_1)+1)\,10$

e molto più se $\quad (\alpha) \quad a+a_1 < R_1 - a_1(b.10+b_1).$

Così $\quad (a.10^2+a_1\,10+a_2)(b.10^4\ldots\ldots+b_3.10+1) =$

$$= a(b.10+b_1)\,10^5 + a_1(b.10+b_1)\,10^4 + a_2(b.10+b_1)\,10^3 + (ab_2\,10^4+ab_3\,10^3+a\,10^2)+(a_1 b_2 10^3+a_1 b_3\,10^2+a_1\,10)$$

$$+(a_2 b_2\,10^2+a_2 b_3\,10+a_2) < [(p.10^2+p_1.10+p_2)\,10+p_3+1]\,10^3,$$

quindi $(a+a_1b_3+a_2b_2)10^2+(a_1+a_2b_3)10+a_2<[R_2.10-a_2(b.10+b_1)]10^3,$

la quale condizione sussisterà quando sia

$$a+a_1 b_3+a_2 b_2 < [R_2.10-a_2(b.10+b_1)]\,10,$$

e molto più se $\quad (\beta) \quad a+a_1+a_2 < R_2.10-a_2(b.10+b_1).$

Le condizioni $(\alpha), (\beta)\ldots\ldots$ sono quelle assegnate dal Fourier, e la nostra analisi insegna ad apprezzarne il vantaggio, il quale generalmente non può essere notevole. Meno inesatti, ma più complicati, sono i criterj forniti dalle relazioni antecedenti da cui abbiamo desunti quelli dovuti all' illustre Autore della Teoria del Calorico.

Della estrazione di radici.

Si voglia la $\sqrt{(17698844)}$? Indichiamola con

$a_3\,10^3+a_2.10^2+a_1.10+a_0, \qquad$ e dovrà essere

$$17698844 = a^2_0+2a_0a_1.10+(a^2_1+2a_0a_2)10^2+(2a_1a_2+2a_0a_3)10^3+(a^2_2+2a_1a_3)\,10^4+2a_2a_3.10^5+a^2_3.10^6.$$

Suppongo $\quad a^2_0=\alpha_6+b_6.10,\ b_6+2a_0a_1=\alpha_5+b_5.10,$

$b_5+a^2_1+2a_0a_2=\alpha_4+b_4.10\ldots\ldots$

$a^2_3+b_1=\alpha_0+b_0.10,\ 2a_2a_3+b_2=\alpha_1+b_1.10,$

$a^2_2+2a_1a_3+b_3=\alpha_2+b_2.10,\ 2a_1a_2+2a_0a_3+b_4=\alpha_3+b_3.10,$

e, fingendo che il numero proposto sia un quadrato, dovranno essere $\quad \alpha_0+b_0.10=17,\ \alpha_1=6,\ \alpha_2=9,\ldots.$ e $b_1, b_2, b_3\ldots\ldots$

i porti delle somme antecedenti. Assumo il principio fondamentale, dimostrato in seguito, che il valore di a_3 debba essere il più grande compatibile colle due ultime equazioni, che anche a_2 debba avere il valore più grande, il quale col valore trovato di a_3 soddisfa la penultima e terz' ultima equazione: e così di seguito.

Affinchè siano

$a^2_3 + b_1 = 17$, $2a_2 a_3 + b_2 = 6 + b_1 . 10$ devono essere $a_3 = 4$, $b_1 = 1$

Avremo poi

$8a_2 + b_2 = 16$, $a^2_2 + 8a_1 + b_3 = 9 + b_2 . 10$, quindi $a_2 = 2$, $b_2 = 0$

$8a_1 + b_3 = 5$, $4a_1 + 8a_0 + b_4 = 8 + b_3 . 10$, onde $a_1 = 0$, $b_3 = 5$

$8a_0 + b_4 = 58$, $4a_0 + b_5 = 8 + b_4 . 10$, dunque $a_0 = 7$, $b_4 = 2$,

epperò $\sqrt{(17698844)} = 4207$.

Volendo la $\sqrt[3]{(3297734021843 2)} =$

$$a_4 . 10^4 + a_3 . 10^3 + a_2 . 10^2 + a_1 . 10 + a_0,$$ sarà

$$32977340218432 = a^3_4 . 10^{12} + 3a^2_4 a_3 . 10^{11} +$$
$$(3a^2_4 a_2 + 3a_4 a^2_3)\, 10^{10} + (3a^2_4 a_1 + 6a_2 a_3 a_4 + a^3_3)\, 10^9$$
$$+ (3a^2_2 a_4 + 3a_0 a^2_4 + 6a_1 a_3 a_4)\, 10^8 +$$
$$(3a_1 a^2_3 + 6a_0 a_3 a_4 + 6a_1 a_2 a_4 + 3a^2_2 a_3)\, 10^7$$
. . . .

avremo quindi a trattare le equazioni seguenti

$a^3_4 + b_0 = 32$, $3a^2_4 a_3 + b_1 = 9 + b_0 . 10$,

dalle quali desumo $a_4 = 3$, $b_0 = 5$

$27.a_3 + b_1 = 59$, $3a^2_4 a_2 + 3a_4 a^2_3 + b_2 = 7 + b_1 . 10 = 27.a_2 + 9a^2_3 + b_2$,

onde $a_3 = 2$, $b_1 = 5$

$27.a_2 + 36 + b_2 = 57$, $3a^2_4 a_1 + 6a_2 a_3 a_4 + a^3_3 + b_3 = 7 + b_2 . 10$,

vale a dire $27.a_2 + b_2 = 21$, $27.a_1 + 36\, a_2 + 8 + b_3 = 7 + b_2 . 10$,

ed $a_2 = 0$, $b_2 = 21$

$27.a_1 + b_3 = 209$,

$3a^2_2 a_4 + 3a_0 a^2_4 + 6a_1 a_3 a_4 + b_4 = 3 + b_3 . 10 = 27a_0 + 36a_1 + b_4$.

Se pongo $a_1 = 7$, $b_3 = 20$ la seconda $27\,a_0 + 252 + b_4 = 203$ è assurda, onde $a_1 = 6$, $b_3 = 47$.

Poi $27\,a_0 + b_4 = 257$,

$3a^2_3\,a_1 + 6a_0\,a_3\,a_4 + 6a_1\,a_2\,a_4 + 3a^2_2\,a_3 + b_5 = 4 + b_4 . 10 = 36.a_0 + 72.$

Da cui ricavo $a_0 = 8$, $b_4 = 41$, e la seconda equazione essendo possibile, conchiudo essere $\sqrt[3]{(32977340218432)} = 32068.$

È tale la speditezza della nostra regola a fronte di quella in uso che stimo inutile lo instituire esame sul numero e la difficoltà delle operazioni che vengono risparmiate. Se il numero dato non è una potenza dell' ordine di cui si cerca la radice, e questa si vuole soltanto approssimata, lo stesso metodo risolve il problema senza ulteriore difficoltà: quando però ne abbisogni la radice della maggiore potenza di un certo ordine contenuta nel numero dato, accade, come nella divisione, che le cifre minori si debbano trovare col metodo comune. Ne adduco le prove con brevità essendo analoghe a quelle relative alla divisione.

La formola $(a_n . 10^n + a_{n-1} . 10^{n-1} \ldots . + a_0)^2 =$

$$a^2_n . 10^{2n} + 2a_n\,a_{n-1} . 10^{2n-1} + \ldots . . \qquad (1)$$

dimostra che il quadrato di un numero di $n+1$ cifre ne contiene $2n+1$ ovvero $2n+2$: che se al numero (1) si aggiunge $2(a_n . 10^n + \ldots . + a_0) + 1 \ldots .$ (2), onde avere il quadrato del numero maggiore di una unità verranno generalmente alterate tutte le cifre minori fino a quella dell' ordine 10^n ed anche 10^{n+1}, per il porto delle somme antecedenti: ma le cifre degli ordini superiori generalmente conserveranno il proprio valore. Ciò molto più avrà luogo se al numero (1) aggiungeremo altro numero minore di (2). Dunque il quadrato più grande compreso in un numero dato generalmente avrà comuni con questo le $n-1$ cifre dell' ordine più elevato. Se alcune cifre del numero dato antecedenti e seguenti quella che occupa il posto n, e questa stessa, saranno eguali allo zero, le $n+2$ cifre mag-

giori di quel numero potranno essere comuni ad esso ed al quadrato immediatamente più grande: lo che si prova come abbiamo fatto parlando della divisione.

Scriviamo la formola nota (Q).

$$(a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} \ldots\ldots +$$
$$a_{n-r+1} \cdot 10^{n-r+1} + a_{n-r} \cdot 10^{n-r} + a_{n-r-1} \cdot 10^{n-r-1} \ldots + a_1 10 + a_0)^2$$
$$= a^2_n \cdot 10^{2n} + 2a_n a_{n-1} \cdot 10^{2n-1} + (a^2_{n-1} + 2a_n a_{n-2}) 10^{2n-2} +$$
$$(2a_n a_{n-3} + 2a_{n-1} a_{n-2}) 10^{2n-3} \ldots\ldots$$
$$+ (2a_n a_{n-r} + 2a_{n-1} a_{n-r+1} + 2a_{n-2} a_{n-r+2} + \ldots\ldots) 10^{2n-r}$$
$$+ (2a_n a_{n-r-1} + 2a_{n-1} a_{n-r} + 2a_{n-2} a_{n-r+1} + \ldots) 10^{2n-r-1} \ldots\ldots$$
$$+ (2a_0 a_3 + 2a_1 a_2) 10^3 + (2a_0 a_2 + a^2_1) 10^2 + 2a_0 a_1 \cdot 10 + a^2_0 .$$

Supponiamo

$$\left.\begin{array}{l} a^2_n + b_{2n-1} = \alpha_{2n} + b_{2n} \cdot 10, \\ 2a_n a_{n-1} + b_{2n-2} = \alpha_{2n-1} + b_{2n-1} \cdot 10, \\ 2a_n a_{n-2} + a^2_{n-1} + b_{2n-3} = \alpha_{2n-2} + b_{2n-2} \cdot 10 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} (l)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2a_n a_{n-r} + 2a_{n-1} a_{n-r+1} + 2a_{n-2} a_{n-r+2} \ldots\ldots + \\ \qquad b_{2n-r-1} = \alpha_{2n-r} + b_{2n-r} \cdot 10, \\ 2a_n a_{n-r-1} + 2a_{n-1} a_{n-r} \ldots\ldots + \\ \qquad b_{2n-r-2} = \alpha_{2n-r-1} + b_{2n-r-1} \cdot 10, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 2a_0 a_2 + a^2_1 + b_1 = \alpha_2 + b_2 \cdot 10,\ 2a_0 a_1 + b_0 = \alpha_1 + b_1 \cdot 10, \\ \qquad a^2_0 = \alpha_0 + b_0 \cdot 10 \end{array}\right\} (m)$$

per cui sarà

$$Q = (\alpha_{2n} + b_{2n} \cdot 10 - b_{2n-1}) 10^{2n} +$$
$$(\alpha_{2n-1} + b_{2n-1} \cdot 10 - b_{2n-2}) 10^{2n-1} +$$
$$(\alpha_{2n-2} + b_{2n-2} \cdot 10 - b_{2n-3}) 10^{2n-2} \ldots \text{ ec.}$$
$$= (\alpha_{2n} + b_{2n} \cdot 10) 10^{2n} + \alpha_{2n-1} \cdot 10^{2n-1} + \alpha_{2n-2} \cdot 10^{2n-2} \ldots\ldots +$$
$$\alpha_{2n-r+1} \cdot 10^{2n-r+1} + (\alpha_{2n-r} - b_{2n-r-1}) 10^{2n-r}$$
$$+ (2a_n a_{n-r-1} + 2a_{n-1} a_{n-r} + \ldots\ldots) 10^{2n-r-1} +$$
$$(\alpha_{2n-r-2} + b_{2n-r-2} \cdot 10) 10^{2n-r-2} + \alpha_{2n-r-3} \cdot 10^{2n-r-3} \ldots + \alpha_0 .$$

Se $2n-r-1>n+1$, onde $n>r+2$, $2n-r-2>n$, a_{2n}, b_{2n}, a_{2n-1}, ..., a_{2n-r-2} sono cifre comuni al Q e ad ogni numero di cui Q rappresenta il più grande quadrato in esso contenuto: epperò se da un tal numero leveremo la parte a destra

$$a_{2n-r-2}\,.\,10^{2n-r-2}\ldots\ldots+A_1\,.\,10+A_0$$

sarà $$Q>(a_{2n}+b_{2n}\,10)\,10^{2n}+a_{2n-1}\,.\,10^{2n-1}\ldots\ldots+ a_{2n-r+1}\,10^{2n-r+1}+a_{2n-r}\,.\,10^{2n-r}+a_{2n-r-1}\,.\,10^{2n-r-1}$$

e siccome $$(2a_{n-1}+2a_n\,.\,10)\,10^{2n-r-1} >2a_n\,a_{n-r-1}\,.\,10^{2n-r-1}+a_{2n-r-2}\,.\,10^{2n-r-2}\ldots\ldots+a_1\,10+a_0$$

ne segue $$(a_{2n}+b_{2n}\,.\,10)\,10^{2n}+a_{2n-1}\,.\,10^{2n-1}+\ldots\ldots+ a_{2n-r+1}\,.\,10^{2n-r+1}+a_{2n-r}\,.\,10^{2n-r}-b_{2n-r-1}\,.\,10^{2n-r}+ (2a_{n-1}\,a_{n-r}+\ldots\ldots)\,10^{2n-r-1}+b_{2n-r-2}\,.\,10^{2n-r-1} +(2a_{n-1}+2a_n\,10)\,10^{2n-r-1}>(a_{2n}+b_{2n}\,10)\,10^{2n}\ldots\ldots+ a_{2n-r}\,.\,10^{2n-r}+a_{2n-r-1}\,.\,10^{2n-r-1},$$

ossia $$2a_{n-1}(a_{n-r}+1)+2a_{n-2}\,a_{n-r+1}+\ldots\ldots+ b_{2n-r-2}>a_{2n-r-1}+(b_{2n-r-1}-2a_n)\,10. \qquad (n)$$

Ciò premesso supponiamo determinate mediante le equazioni (l) tutte le cifre a_n, a_{n-1}.... fino ad a_{n-r+1}, e conseguentemente i porti b_{2n}, b_{2n-1}...., b_{2n-r} e che si debba trovare a_{n-r}: dovremo quindi verificare le relazioni

$$2a_n\,a_{n-r}+2a_{n-1}\,a_{n-r+1}\ldots\ldots+b_{2n-r-1}=a_{2n-r}+b_{2n-r}\,.\,10,$$

$$2a_{n-1}\,a_{n-r}+2a_{n-2}\,a_{n-r+1}\ldots\ldots+b_{2n-r-2}\ \text{non}>a_{2n-r-1}+ b_{2n-r-1}\,.\,10.$$

Se a_{n-r}, b_{2n-r-1} indicassero i veri valori di questi simboli, ponendo nella prima relazione $a_{n-r}+1$, $b_{2n-r-1}-2a_n$ in luogo di a_n e b_{2n-r-1} sarebbe tutt' ora soddisfatta, e se sussistesse anche la seconda avremmo

$$2a_{n-1}(a_{n-r}+1)+2a_{n-2}\,a_{n-r+1}\ldots\ldots+ b_{2n-r-2}\ \text{non}>a_{2n-r-1}+(b_{2n-r-1}-2a_n)\,10;$$

la quale contraddice alla condizione (n). Dunque il valore di a_{n-r} deve essere il più grande compatibile dalle condizioni (m). Questi dati bastano a trovare speditamente col soccorso delle equazioni (l) (m) tutte le cifre dell' ordine maggiore fino alla terz' ultima, da che l' ultimo dei numeri b_{2n}, a_{2n}, a_{2n-1} ..... che generalmente è dato essendo a_{n+2}, e per trovare a_{n-r} abbisogna a_{2n-r-1}, quindi se $2n-r-1=n+2$, $n-r=3$, epperò l' ultima cifra della radice che possiamo determinare con quelle equazioni è appunto a_3. Le altre si trovano colla regola comune come dichiareremo con esempj.

Tutto quanto poi ho detto per la radice seconda sussiste per la terza, e si prova collo stesso discorso.

Si cerca la radice del più grande quadrato contenuto nel numero 56828391?

Avremo $a^2_3+b_1=56$, $2a_2\,a_3+b_2=8+b_1 .10$,

$$a^2_2+2a_1\,a_3+b_3=a_4+b_4 .10.$$

Quindi $a_3=7$, $b_1=7$, $14a_2+b_2=78$, $a^2_2+14a_1+b_3=a_4+b_4 .10$, onde $a_2=5$, $b_2=8$.

Siccome $(a_3 .10^3+a_2 .10^2+(a_1+1)\,10)^2=$

$$a^2_3 .10^6+2a_2\,a_3 .10^5+a^2_2 .10^4+2\,(a_3 .10^3+a_2\,10^2)\,(a_1+1)\,10$$

$$+(a_1+1)^2 .10^2=(a_0+b_0 .10-b_1)\,10^6+(a_1+b_1 .10-b_2)\,10^5+$$

$$a^2_2 .10^4+2 .75\,(a_1+1)\,10^3+(a_1+1)^2 .10^2>$$

$$>568283=(a_0+b_0\,10)\,10^6+a_1 .10^5+283 .10^2, \quad \text{dunque}$$

$2 .75(a_1+1)10+(a_1+1)^2>b_2 .10^3-a^2_2 .10^2+283=8283-2500=5783$, mentre $2 .75 .a_1 .10+a^2_1$ deve essere minore dello stesso numero, però $a_1=3$.

Proveremo poi che $2 .753\,(a_0+1)\,10+(a_0+1)^2$

$$>(5783-(2 .75 .10+a_1)\,a_1)\,10^2+91$$

$$>(5783-4509)\,10^2+91$$

$$>127491,$$

onde $a_0=8$ e siccome $(2 .7530+a_0)\,a_0=120544$ avremo l' avanzo $127491-120544=6947$, e la radice 7538.

Ma è nel calcolo approssimato delle radici, epperò ne' bisogni più frequenti, che la nostra regola merita forse maggiormente di essere preferita a quella in uso, e valgano a conferma gli esempj, che adduco.

Si voglia il valore approssimato di $\sqrt{2}$? Considero $2 \cdot 10^{2n} = 2{,}00{,}00{,}00$: e formo le equazioni

$a^2_n + b_0 = 2$, $2a_n a_{n-1} + b_1 = b_0 \cdot 10$, da cui $a_n = 1$, $b_0 = 1$

$2a_{n-1} + b_1 = 10$, $2a_n a_{n-2} + a^2_{n-1} + b_2 = b_1 \cdot 10$,

cioè $2a_{n-2} + a^2_{n-1} + b_2 = b_1 \cdot 10$, $a_{n-1} = 4$, $b_1 = 2$

$2a_{n-2} + 16 + b_2 = 20$, $2a_n a_{n-3} + 2a_{n-1} a_{n-2} + b_3 = b_2 \cdot 10$,

vale a dire $2a_{n-2} + b_2 = 4$, $2a_{n-3} + 8a_{n-2} + b_3 = b_2 \cdot 10$,

$a_{n-2} = 1$, $b_2 = 2$

$2a_{n-3} + b_3 = 12$, $2a_n a_{n-4} + 2a_{n-1} a_{n-3} + a^2_{n-2} + b_4 = b_3 \cdot 10 =$

$2a_{n-4} + 8a_{n-3} + 1 + b_4$, onde

$a_{n-3} = 4$, $b_3 = 4$, $2a_{n-4} + 33 + b_4 = 40$, ossia $2a_{n-4} + b_4 = 7$

$2a_n a_{n-5} + 2a_{n-1} a_{n-4} + 2a_{n-2} a_{n-3} + b_5 = b_4 \cdot 10 =$

$2a_{n-5} + 8a_{n-4} + 8 + b_5$,

quindi $a_{n-4} = 2$, $b_4 = 3$, $2a_{n-5} + b_5 = 6$,

$2a_n a_{n-6} + 2a_{n-1} a_{n-5} + 2a_{n-2} a_{n-4} + a^2_{n-3} + b_6 = b_5 \cdot 10$,

ossia $2a_{n-6} + 8a_{n-5} + 20 + b_6 = b_5 \cdot 10$,

quindi $a_{n-5} = 1$, $b_5 = 4$, ...

Dunque $\sqrt{2} = 2{,}41421 \ldots\ldots$

Si debba trovare il valore approssimato di $\sqrt[3]{3}$? Considero $3 \cdot 10^{3n}$ e risolvo le equazioni

$a^3_n + b_0 = 3$, $3a^2_n a_{n-1} + b_1 = b_0 \cdot 10$, da cui $a_n = 1$, $b_0 = 2$

$3a_{n-1} + b_1 = 20$, $3a^2_n a_{n-2} + 3a_n a^2_{n-1} + b_2 = b_1 \cdot 10$,

ossia $3a_{n-2} + 3a^2_{n-1} + b_2 = b_1 \cdot 10$,

onde $a_{n-1} = 4$, $b_1 = 8$, $3a_{n-2} + 48 + b_2 = 80$,

. . . . ossia $3a_{n-2} + b_2 = 32$

$3a^2_n\, a_{n-3} + 6a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} + a^3_{n-1} + b_3 = b_2 \,.\, 10 =$
$3a_{n-3} + 24 \,.\, a_{n-2} + 64 + b_3$,

quindi $a_{n-2} = 4$, $b_2 = 20$, $3a_{n-3} + 160 + b_3 = 200$,
ovvero $3a_{n-3} + b_3 = 40$

$3a^2_n\, a_{n-4} + 6a_n\, a_{n-1}\, a_{n-3} + 3a^2_{n-1}\, a_{n-2} + 3a_n\, a^2_{n-2} + b_4 = b_3 \,.\, 10$,

cioè $3a_{n-4} + 24a_{n-3} + 240 + b_2 = b_3 \,.\, 10$,
dunque $a_{n-3} = 2$, $b_3 = 34$

$3a_{n-4} + b_4 = 52$, $3a_{n-5} + 24 \,.\, a_{n-4} + 336 + b_4 = b_3 \,.\, 10$,
$a_{n-4} = 3$, $b_4 = 43$

$3a_{n-5} + 408 + b_4 = 430$, ossia $3a_{n-5} + b_4 = 22$, ...

Dunque $\sqrt[3]{3} = 1{,}4423 \ldots\ldots$

Per eseguire speditamente questi calcoli bisogna ricordare la formola generale del cubo di un polinomio, della quale ho sottoscritti molti termini, ed esercitarsi ad esaminare contemporaneamente ciascuna coppia di equazioni, da cui dipende ogni cifra, affine di diminuire i tentativi.

Coefficienti delle potenze 10^{3n}, $10^{3n-1} \ldots$ *fino a* 10^{3n-8}.

a^3_n; $3a^2_n\, a_{n-1}$; $3a^2_n\, a_{n-2} + 3a_n\, a^2_{n-1}$;
$3a^2_n\, a_{n-3} + 6a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} + a^3_{n-1}$

$3a^2_n\, a_{n-4} + 6a_n\, a_{n-1}\, a_{n-3} + 3a^2_{n-1}\, a_{n-2} + 3a_n\, a^2_{n-2}$

$3a^2_n\, a_{n-5} + 3a^2_{n-1}\, a_{n-3} + 6a_n\, a_{n-1}\, a_{n-4} + 6a_n\, a_{n-2}\, a_{n-3} +$
$3a_{n-1}\, a^2_{n-2}$

$3a^2_n\, a_{n-6} + 3a^2_{n-1}\, a_{n-4} + a^3_{n-2} + 3a_n\, a^2_{n-3} + 6a_n\, a_{n-1}\, a_{n-5} +$
$6a_n\, a_{n-2}\, a_{n-4} + 6a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_{n-3}$

$3a^2_n\, a_{n-7} + 3a^2_{n-1}\, a_{n-5} + 3a^2_{n-2}\, a_{n-3} + 3a_{n-1}\, a^2_{n-3} +$
$6a_n\, a_{n-1}\, a_{n-6} + 6a_n\, a_{n-2}\, a_{n-5} + 6a_n\, a_{n-3}\, a_{n-4} + 6a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_{n-4}$

$3a^2_n\, a_{n-8} + 3a^2_{n-1}\, a_{n-6} + 3a^2_{n-2}\, a_{n-4} + 3a^2_{n-3}\, a_{n-2} + 3a_n\, a^2_{n-4} +$
$6a_n\, a_{n-1}\, a_{n-7} + 6a_n\, a_{n-2}\, a_{n-6} + 6a_{n-1}\, a_{n-2}\, a_{n-5} + 6a_{n-1}\, a_{n-3}\, a_{n-4}$

. . . .

Le quali formole si compongono con nota legge.

Risoluzione aritmetica delle equazioni.

La regola che espongo è, usando parole del Newton, *breviter explicatam, potius quam accurate demonstratam.* Ma in altra occasione spero di poter dichiarare ed estenderne l' applicazione. Prendo esempj già calcolati, onde evitarne la verificazione.

La equazione data sia $x^2 + 3x - 32 = 0$ (Bellavitis. Istituto Veneto. Vol. 3°.)

Pongo $\frac{1}{10} = \alpha$, $x = a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + e\alpha^4 \ldots\ldots$:
sostituisco ed ordino per α il risultato

$(a^2 + 3a - 32) + \alpha(2ab + 3b) + \alpha^2(2ac + b^2 + 3c) +$ ecc. $= 0$.

Rappresento questa equazione con.....

$$A_n \alpha^n + A_{n-1} \alpha^{n-1} + A_{n-2} \alpha^{n-2} + A_{n-3} \alpha^{n-3} \ldots = 0 .$$

Indico con b_{n+1}, il porto dei termini antecedenti ad $A_n \alpha^n$ e suppongo $b_{n+1} + A_n = a_n + b_n . 10$, $b_n + A_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1} . 10$,
$b_{n-1} + A_{n-2} = a_{n-2} + b_{n-2} . 10, \ldots\ldots$
quella equazione darà.....

$$+ a_n . 10^n + a_{n-1} . 10^{n-1} + a_{n-2} . 10^{n-2} \ldots\ldots + a_0 + b_0 . 10 = 0,$$

per cui dovranno essere $b_0 = 0$, $a_0 = 0$, $a_1 = 0 \ldots\ldots a_n = 0 \ldots\ldots$

Considero quindi le equazioni $a^2 + 3a - 32 + b_1 = b_0 . 10 = 0$, $2ab + 3b + b_2 = b_1 . 10$, ecc., cerco i valori interi più grandi di $a, b, c \ldots\ldots$ che le rendono soddisfatte, e

trovo $a = 4$, $b_1 = 4$

$11 . b + b_2 = 40$, $2ac + b^2 + 3c + b_3 = b_2 . 10$,
ossia $11 . c + b^2 + b_3 = b_2 . 10$, onde $b = 3$, $b_2 = 7$

$11 . c + 9 + b_3 = 70$, $2ad + 2bc + 3d + b_4 = b_3 . 10$,

cioè $11 . c + b_3 = 61$, $11 . d + 6c + b_4 = b_3 . 10$, d'onde $c = 5$, $b_3 = 6$,

$11 . d + b_4 = 30$, $2ae + 2bd + c^2 + 3e + b_5 = b_4 . 10$,
ossia $11 . e + 6 . d + 25 + b_5 = b_4 . 10$, $d = 2$, $b_4 = 8$

$11 . e + b_5 = 43,\ 2af + 2be + 2dc + 3f + b_6 = b_5 . 10,$

cioè $11 . f + 6 . e + 20 + b_6 = b_5 . 10,\ e = 3,\ b_5 = 10$

$11 . f + b_6 = 62,\ 2ag + 2bf + 2ec + 3g + d^2 + b_7 = b_6 . 10,$

cioè $11 . g + 6f + 30 + b_7 = b_6 . 10,$ epperò $f = 5,\ b_6 = 7$

$11g + b_7 = 10,\ g = 0,$ ecc. dunque $x = 4{,}352350 \ldots\ldots$

Si vuole risolvere $x^3 - 2x - 5 = 0$ (Lagrange. Equations numeriq.).

Sostituito in questa equazione $x = a + b\alpha + \ldots\ldots$ e raccolti i coefficienti di α

avremo $a^3 - 2a - 5 + b_1 = b_0 . 10 = 0,\ 3a^2b - 2b + b_2 = b_1 . 10,$

onde $a = 2,\ b_1 = 1$

$10 . b + b_2 = 10,\ b = 0$

$3a^2c + 3b^2a - 2c + b_3 = b_2 . 10,$ ossia $10 . c + b_3 = 100$

$3a^2d + b_3 + 6abc - 2d + b_4 = b_3 . 10,$ cioè $10 . d + b_4 = b_3 . 10,$

$c = 9,\ b_3 = 10$

$10 . d + b_4 = 100,\ 3a^2e + 3b^2c + 3c^2a + 6abd - 2e + b_5 = b_4 . 10,$

ossia $10 . e + 486 + b_5 = b_4 . 10,\ d = 4,\ b_4 = 60$

$10 . e + b_5 = 114,\ 3a^2f + 6acd - 2f + b_6 = b_5 . 10,$

cioè $10 . f + 432 + b_6 = b_5 . 10,$ onde $e = 7, \ldots\ldots x = 2{,}0947.$

Considero la equazione $x^5 + 10x^2 - 1 = 0$ (Cauchy. Sur le rapports entre le calcul des Residus..... Turin. 1831.).

$a^5 + 10a^2 - 1 + b_1 = 0,\ 5a^4b + 20 . ab + b_2 = b_1 . 10,$

$5a^4c + 10a^3b^2 + 10 . b^2 + 20 . ac + b_3 = b_2 . 10,$

$5a^4d + 20a^3bc + 10a^2b^3 + 20bc + 20ad + b_4 = b_3 . 10$

$5a^4e + 20a^3bd + 10a^3c^2 + 30a^2b^2c +$

$5ab^4 + 20ae + 20 . bd + 10c^2 + b_5 = b_4 . 10.$

Dunque $a = 0,\ b_1 = 1,\ b_2 = 10$

$10 . b^2 + b_3 = 100,\ 20 . bc + b_2 = b_3 . 10,\ b = 3,\ b_3 = 10$

$60c + b_4 = 100,\ 20bd + 10c^2 + b_5 = b_4 . 10,$

cioè $60 . d + 10 . c^2 + b_5 = b_4 . 10,\ c = 1,\ b_4 = 40$

$60 \,.\, d + b_5 = 390$, $b^5 + 2be \,.\, 10 + 2cd \,.\, 10 + b_6 = b_5 \,.\, 10$,
ossia $243 + 60e + 20 \,.\, d + b_6 = b_5 \,.\, 10$, $d = 5$, $b_5 = 90$

$6e + b_6 = 557$, $5b^4c + 20bf + 20 \,.\, ce + 10d^2 + b_7 = b_6 \,.\, 10$,
cioè $60f + 20 \,.\, e + 655 + b_7 = b_6 \,.\, 10$, $e = 9$, $b_6 = 504$, ...

Dunque $x = 0{,}3159 \ldots\ldots$

Si vuol risolvere $2x^3 + 5x^2 + 7x - 188 = 0$ (Bellavitis....).

Avremo $2a^3 + 5a^2 + 7a - 188 + b_1 = b_0 \,.\, 10 = 0$,

$b(6a^2 + 10a + 7) + b_2 = b_1\, 10$, $b^2(6a + 5) + c(6a^2 + 10a + 7) + b_3 = b_2\, 10$

$2b^3 + bc(12ab + 10b) + d(6a^2 + 10a + 7) + b_4 = b_3 \,.\, 10$,

$c^2(6a + 5) + 6d(12a + 10) + e(6a^2 + 10 \,.\, a + 7) + b_4 = b_3 \,.\, 10$

. . . .

Onde $a = 3$, $b_1 = 68$

$91 \,.\, b + b_2 = 680$, $23 \,.\, b^2 + 91 \,.\, c + b_3 = b_2 \,.\, 10$, $b = 6$, $b_2 = 134$,

$91 \,.\, c + 828 + b_3 = 1340$,
$276 \,.\, c + 91 \,.\, d + 432 + b_4 = b_3 \,.\, 10$, $c = 3$, $b_3 = 239$

$91 \,.\, d + 1260 + b_4 = 2390$, cioè $91 \,.\, d + b_4 = 1130$,
$276 \,.\, d + 91 \,.\, e + 207 + b_5 = b_4 \,.\, 10$, $d = 9$, $b_4 = 311$

$91 \,.\, e + b_5 = 419$, $e = 4$ incerto. Finalmente $x = 3{,}6394 \ldots\ldots$

Il nostro metodo si applica con vantaggio alle equazioni che presentano una sola variazione. Se i coefficienti sono fratti si ordinano preventivamente secondo le potenze di a: e si può impiegare anche alla risoluzione di più equazioni numeriche contemporanee. Sulle quali cose spero di ritornare con altro lavoro (1).

(1) Per una nota inserita dall'illustre Sig. Crelle nel giornale per l'anno 1846, pag. 167 ora conosco che il Capitano Francese Sig. Guy ha pubblicato un metodo per la divisione numerica abbreviata, ma da quanto pare le nostre regole devono essere affatto diverse.

DI UN FACILE PROBLEMA DI GEOMETRIA
RIMARCABILE PER LA NOVITÀ DELLE CONSEGUENZE
ESAME.

DEL SOCIO ATTUALE

PROF. GASPARE MAINARDI.

Ricevuta il 28 *Luglio* 1849.

Il problema che mi propongo consiste nella ricerca di quei punti del piano di un poligono dai quali condotte le perpendicolari a tutti i lati la somma delle loro lunghezze abbia un dato valore. In una operetta sulla Geometria analitica in piano, nella quale credo di avere riunite molte cose non immeritevoli di osservazione, ho fatto cenno della questione che riprendo: ivi ebbi di mira specialmente la interpretazione dei segni da cui sono affette certe espressioni analitiche: nel presente scritto mi propongo di far notare la discontinuità variabile del luogo di risoluzione, il quale può essere immaginario, consistere in un unico punto, ovvero nel perimetro di un poligono ed anche in una superficie limitata. La novità di queste conseguenze mi sembrò degna di qualche attenzione tanto più dopo di essermi convinto che un più diligente esame di altre questioni note che riguardano poligoni e poliedri conduce a questo genere notevole di risoluzioni varianti e discrete; epperò di buon animo offro alla gioventù studiosa questo scritto che apre la via a non poche nuove ed utili meditazioni.

Immagino un poligono rettilineo, piano, saliente, e percorrendone il perimetro secondo una direzione, ne segno i vertici successivi coi numeri naturali 1, 2, 3, 4.....: indico pure coi

numeri 1, 2, 3.... i lati che hanno per estremi i vertici segnati dai numeri 1, 2; 2, 3; 3, 4;.....: figuro nel piano del poligono una retta terminata ai punti A, B la quale non seghi il contorno: rappresento coi segni A(1), A(2), A(3)..... le perpendicolari condotte dal punto A ai lati 1, 2, 3.....: con B(1), B(2)... quelle condotte da B: con S(A), S(B) le somme A(1) + A(2) + A(3)....., B(1) + B(2) + B(3)..... Se da un punto M intermedio fra A e B e da questi estremi si conducono ad un lato r le perpendicolari M(r), A(r), B(r), fra esse avrà luogo la equazione

$$\frac{A(r) - M(r)}{A(r) - B(r)} = \frac{AM}{AB}, \qquad \text{ossia} \quad M(r) = A(r) - \frac{AM}{AB}[A(r) - B(r)]$$

$$= B(r) + \frac{BM}{AB}[A(r) - B(r)],$$

e quindi

$$(1) \quad S(M) = S(A) - \frac{AM}{AB}[S(A) - S(B)] = S(B) + \frac{BM}{AB}[S(A) - S(B)].$$

Se il punto M, interno al poligono, sarà nel prolungamento di AB da B verso A

$$(2) \qquad S(M) = S(A) + \frac{AM}{AB}[S(A) - S(B)],$$

e trovandosi nel prolungamento da A verso B

$$M(r) = A(r) - \frac{AM}{AB}[A(r) - B(r)] = B(r) - \frac{BM}{AB}[A(r) - B(r)];$$

$$(3) \qquad S(M) = S(B) - \frac{BM}{AB}[S(A) - S(B)].$$

Supposto che la retta AB prolungata da A verso B incontri un lato r, preso M dalla parte di questo lato opposta all' altra in cui si trova AB, avremo

$$(4) \quad \frac{A(r) + M(r)}{A(r) - B(r)} = \frac{AM}{AB}, \quad \text{ed} \quad M(r) = -A(r) + \frac{AM}{AB}[A(r) - B(r)]$$

$$= -B(r) + \frac{BM}{AB}[A(r) - B(r)].$$

Dunque, supposto S(A) > S(B) ed M intermedio fra A e B, S(M) cresce avvicinandosi M ad A e viceversa, e può assumere

tutti i valori dal più grande S(A) al più piccolo S(B). Essendo M interno al poligono sarà $S(M) > S(A)$ se si prende nel prolungamento di AB da B verso A, e viceversa. Se il punto M si trova dalla parte di un lato r opposta a quella dalla quale giacciono i punti A, B alle equazioni (3) sostituiremo le (4). Se la retta AB è talmente disposta che siano $S(A) = S(B)$ ovunque si prenda M nell'interno del poligono sarà $S(M) = S(A) = S(B)$. Le somme S(1), S(2),.... che corrispondono ai vertici 1, 2, 3.... non possono crescere e decrescere più volte, cioè non ponno esistere molti vertici ai quali corrispondano valori massimi e minimi di quella sommatoria discontinua: perchè se due somme $S(r)$, $S(r+t)$ fossero minime per cui

$$S(r-2) > S(r-1) > S(r) < S(r+1) < S(r+2) \ldots\ldots$$

$$S(r+t-2) > S(r+t-1) > S(r+t) < S(r+t+1) < S(r+t+2) \ldots,$$

siccome $S(r+1)$, $S(r+2) \ldots\ldots$ crescenti nella direzione dei vertici r, $r+1$, $r+2 \ldots\ldots$ si fanno poi decrescenti, essendo $S(r+t-1) > S(r+t)$, fra il vertice r ed $r+t$ ve ne sarà almeno uno di massimo tanto nella direzione r, $r+1$, $r+2\ldots$ come nella direzione opposta $r-1$, $r-2$, $r-3 \ldots\ldots$ Il primo massimo corrisponda al vertice $r+t-u$ ed il secondo al vertice $r+t+v$. Immagino le diagonali del poligono che uniscono ogni vertice di minimo con ogni vertice di massimo. Siccome il valore della sommatoria S corrispondente ai varj punti di ognuna delle diagonali

$$r,\ r+t-u;\quad r,\ r+t+v;\quad r+t,\ r+t-u;\quad r+t,\ r+t+v$$

varia rispettivamente fra i limiti

$$S(r),\ S(r+t-u);\quad S(r),\ S(r+t+v);\quad S(r+t),\ S(r+t-u);\quad S(r+t),\ S(r+t+v),$$

se $S(r+t)$ non $< S(r)$, $S(r+t+v)$ non $< S(r+t-u)$; indicata con X una quantità positiva e tale che sia

$$X > S(r+t) > S(r);\quad X < S(r+t-u) < S(r+t+v),$$

in ciascuna di quelle diagonali esisterà un punto suscettibile di una somma della grandezza X: epperò tanto alle rette che

uniscono quei punti, come a tutte le infinite che le incontrano, e ad ogni punto preso nell'interno e nel contorno del poligono corrisponderebbe una somma del valore costante X: il che ha luogo unicamente nei poligoni regolari. Dunque percorrendo il contorno del poligono o troveremo un solo punto di massimo ed uno di minimo, conseguenti, cioè corrispondenti agli estremi $1, m$ di uno stesso lato $\overline{1, m}$, se $S(1) < S(2) < S(3) \ldots < S(m)$, oppure essendo $S(1) < S(2) \ldots < S(r) > S(r+1) > S(r+2) \ldots > S(m) > S(1)$ i valori massimo e minimo $S(r)$, $S(1)$ corrisponderanno ai termini di una diagonale $\overline{1, r}$. Ma i punti di massimo e minimo potranno essere due per ciascuna specie ed ogni copia corrisponderà agli estremi di un lato.

Queste considerazioni dimostrano ancora che a nessun punto interno del poligono può corrispondere una somma minore della minima $S(1)$, nè maggiore della massima $S(r)$, perchè unito quel punto, che chiamo M col vertice 1 e prolungata la retta congiungente fino ad incontrare un lato $\overline{t-1, t}$ in un punto N, se $S(M) < S(1)$ la somma decresce dal punto 1 verso M, sarà $S(1) > S(M) > S(N)$, ed $S(N)$ non è media fra $S(t-1)$ ed $S(t)$.

Indicata con S una quantità maggiore della minima $S(1)$ e minore della massima $S(m)$ ovvero $S(r)$, nel primo caso S sarà compresa fra due valori conseguenti $S(1), S(2), S(3) \ldots$: se $S(t), > S > S(t-1)$ tanto nel lato $\overline{t-1, t}$ come nell' altro $\overline{1, m}$ esisteranno due punti, che indico rispettivamente con M, N suscettibili della somma S, la quale avrà lo stesso valore per tutti i punti intermedj della retta che li congiunge. Siccome

$$S = S(t-1) + \frac{\overline{t-1, M}}{\overline{t-1, t}} [S(t) - S(t-1)] = S(1) + \frac{\overline{1, N}}{\overline{1, m}} [S(m) - S(1)],$$

ove i segni $\overline{t-1, M}$; $\overline{1, N}$ rappresentano le lunghezze delle rette terminate ai punti $t-1$, M; 1, N; ne segue

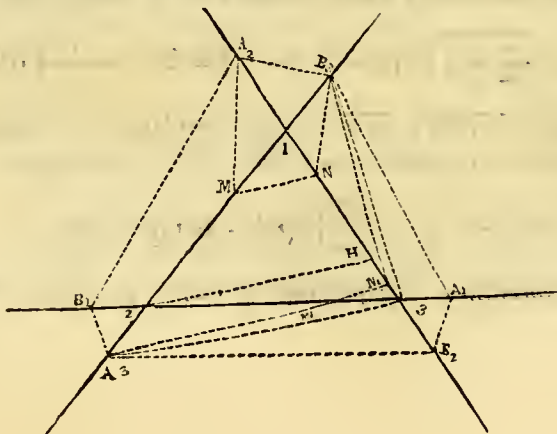
$$\frac{\overline{t-1, M}}{\overline{t-1, t}} [S(t) - S(t-1)] - \frac{\overline{1, N}}{\overline{1, m}} [S(m) - S(1)] + [S(t-1) - S(1)] = 0,$$

la quale equazione, indipendente dalla grandezza S, insegna

che tutte le rette, alle quali corrisponde una somma costante, sono parallele fra loro ed incontrano il lato $\overline{1,m}$.

Il poligono in questo caso è intercetto fra due parallele che passano per gli estremi del lato $\overline{1,m}$; cosicchè la somma dei due angoli interni corrispondenti a quegli estremi non è maggiore di due retti. Generalmente i valori massimo e minimo fra gli S(1), S(2).... corrispondono ad una diagonale $\overline{1,r}$: ogni somma S media fra S(1) ed S(r) lo sarà pure fra due copie S(t—1), S(t); S(u—1), S(u): in ciascuno dei lati $\overline{t-1,t}$; $\overline{u-1,u}$ e nella diagonale $\overline{1,r}$ esisteranno tre punti in linea retta cui corrisponderà la somma S. Queste rette sono tutte parallele fra loro, e le somme che ad esse corrispondono vanno aumentando quanto più ogni retta si avvicina al vertice r. Il poligono è compreso fra due parallele che passano per gli estremi 1, r.

In qualche caso in luogo di un solo punto di massimo o di minimo, o dell' una e dell' altra grandezza, ne avremo due, corrispondenti ad un lato, il quale sarà parallelo al solito sistema di rette: il che ha luogo essendo il poligono simmetrico intorno ad un asse.

Anche nell' esterno del poligono si trovano più rette capaci di somme medie fra S(1) ed S(r), ed anche più grandi di S(r) senza limitazione. I luoghi geometrici dei punti ai quali corrisponde una somma S di valore prefisso sono contorni di poligoni di diversa natura dipendente dalla grandezza di quel parametro e dalla natura del poligono: le quali circostanze giova studiarle su di ogni figura: come farò per il triangolo.

Il triangolo sia 1, 2, 3: Suppongo $S(1) < S(2) < S(3)$: nel lato $\overline{1,3}$ esisterà un punto H cui corrisponde $S = S(2)$, e che troveremo col mezzo della equazione

$$S(2) = S(1) + \frac{\overline{1,H}}{\overline{1,3}}[S(3) - S(1)], \quad \text{ossia} \quad \frac{\overline{1,H}}{\overline{1,3}} = \frac{S(2) - S(1)}{S(3) - S(1)}:$$

e siccome

$$\overline{2,3}\,.\,S(1) = \overline{1,3}\,.\,S(2) = \overline{1,2}\,.\,S(3), \quad \overline{1,H} = \frac{\overline{2,3} - \overline{1,3}}{\overline{2,3} - \overline{1,2}}\,.\,\overline{1,2}$$

tutte le rette a somme costanti il cui valore è medio fra $S(1)$ ed $S(3)$ sono parallele alla $\overline{2,H}$; e questo valore aumenta quanto più la parallela si discosta dal vertice 1 verso il vertice 3.

Nel lato	$\overline{1,2}$	esteso da 1	verso 2	fisso un punto	A_3
	$\overline{2,3}$	2	3		A_1
	$\overline{3,1}$	3	1		A_2
nel lato	$\overline{1,2}$	esteso da 2	verso 1	fisso un punto	B_3
	$\overline{2,3}$	3	2		B_1
	$\overline{3,1}$	1	3		B_2

condotte da ognuno di quei punti le perpendicolari ai lati, troviamo

$$\frac{\overline{1,A_2}}{\overline{1,3}} = \frac{A_2(1)}{S(3)} = \frac{A_2(2) - S(1)}{S(1)}, \qquad A_2(1) = \frac{\overline{1,A_2}}{\overline{1,3}} S(3),$$

$$A_2(2) = S(1) + \frac{\overline{1,A_2}}{\overline{1,3}} S(1)$$

$$S(A_2) = S(1) + \frac{\overline{1,A_2}}{\overline{1,3}}[S(1) + S(3)].$$

Troviamo pure $S(B_3) = S(1) + \frac{\overline{1,B_3}}{\overline{1,2}}[S(1) + S(2)]$

$$S(A_1) = S(3) + \frac{\overline{3,A_1}}{\overline{2,3}}[S(2) + S(3)],$$

$$S(B_2) = S(3) + \frac{\overline{3,B_2}}{\overline{1,3}}[S(1) + S(3)]$$

$$S(A_3) = S(2) + \frac{\overline{2,A_3}}{\overline{1,2}}[S(1) + S(2)],$$

$$S(B_1) = S(2) + \frac{\overline{2,B_1}}{\overline{2,3}}[S(2) + S(3)],$$

dalle quali caviamo

$$\overline{1,A_2}=\frac{S(A_2)-S(1)}{S(1)+S(3)}\overline{1,3}; \qquad \overline{1,B_3}=\frac{S(B_3)-S(1)}{S(1)+S(2)}\overline{1,2}$$

$$\overline{3,A_1}=\frac{S(A_1)-S(3)}{S(2)+S(3)}\overline{2,3}; \qquad \overline{3,B_2}=\frac{S(B_2)-S(3)}{S(1)+S(3)}\overline{1,3}$$

$$\overline{2,A_3}=\frac{S(A_3)-S(2)}{S(1)+S(2)}\overline{1,2}; \qquad \overline{2,B_1}=\frac{S(B_1)-S(2)}{S(2)+S(3)}\overline{2,3};$$

epperò: A nessun punto del piano del triangolo corrisponde una somma minore di S(1): ed al solo vertice 1 compete una somma del valore S(1). I punti che danno una somma S media fra S(1) ed S(2) sono quelli di una retta MN parallela alla $\overline{2,H}$ interna al triangolo della quale troviamo gli estremi N, M colle equazioni

$$\overline{1,M}=\frac{S-S(1)}{S(2)-S(1)}\overline{1,2}; \qquad \overline{1,N}=\frac{S-S(1)}{S(3)-S(1)}\overline{1,3}.$$

Poi tutti i punti di una retta esterna terminata ai prolungamenti dei lati intorno all' angolo 1 della quale troviamo gli estremi A_2, B_3 colle equazioni

$$(\alpha) \qquad \overline{1,A_2}=\frac{S-S(1)}{S(1)+S(3)}\overline{1,3}; \qquad \overline{1,B_3}=\frac{S-S(1)}{S(1)+S(2)}\overline{1,2}.$$

Finalmente i punti delle due rette terminate MA_2, NB_3: per cui il luogo geometrico cercato è il perimetro del quadrilatero $A_2B_3NMA_2$. Se $S=S(2)$ la retta interna al triangolo coincide colla $\overline{2,H}$.

I punti ai quali corrisponde una somma S media fra S(2) ed S(3) sono quelli di una retta M_1N_1 interna al triangolo, parallela alla $\overline{2,H}$, i cui estremi M_1N_1 posti nei lati $\overline{1,3}$; $\overline{2,3}$ si hanno colle equazioni

$$\overline{1,N_1}=\frac{S-S(1)}{S(3)-S(1)}\overline{1,3}; \qquad \overline{3,M_1}=\frac{S(3)-S}{S(3)-S(2)}\overline{2,3}.$$

Altri punti sono quelli di una retta esterna terminata ai prolungamenti dei lati dell'angolo 1, i di cui termini A_2, B_3 sono dati dalle stesse equazioni (α), attribuendo ad S il nuovo valore.

Altri punti ancora sono quelli di una retta terminata ai prolungamenti dei lati intorno all' angolo $\underline{2}$, della quale fisseremo i termini colle equazioni

$$(\beta)\qquad \overline{2,A_3} = \frac{S - S(2)}{S(1)+S(2)}\,\overline{1,2}\,;\qquad \overline{2,B_1} = \frac{S - S(2)}{S(2)+S(3)}\,\overline{2,3}\,.$$

Alle tre rette nominate si aggiungono ancora le tre A_2B_1; A_3M_1; B_3N_1: e siccome i punti A_3, M_1, N_1 non sono in linea retta, il luogo geometro dei punti ai quali corrisponde una somma S media fra S(2), S(3), è il contorno dell' esagono $A_2B_3N_1M_1A_3B_1A_2$.

Se S = S(3) la retta M_1N_1 si riduce al solo vertice $\underline{3}$, e l' esagono si converte nel pentagono $A_2B_3\,3A_3B_1A_2$.

Se la somma $S > S(3)$, qualunque ne sia la grandezza, anche nell'angolo compreso dai prolungamenti dei lati formanti il vertice $\underline{3}$ esiste una retta A_1B_2 ad ogni punto della quale corrisponde la somma S, ed il luogo discreto è il perimetro di un esagono $A_2B_3A_1B_2A_3B_1A_2$. Siccome poi per uno stesso valore di S, sono

$$\frac{\overline{1,A_2}}{\overline{1,B_3}} = \frac{S(1)+S(2)}{S(1)+S(3)}\cdot\frac{\overline{1,3}}{\overline{1,2}}\,;\qquad \overline{1,A_3} = \frac{S+S(1)}{S(1)+S(2)}\,\overline{1,2}\,;$$

$$\overline{1,B_2} = \frac{S+S(1)}{S(1)+S(3)}\,\overline{1,3}\,,$$

quindi $\dfrac{\overline{1,A_2}}{\overline{1,B_3}} = \dfrac{\overline{1,B_2}}{\overline{1,A_3}}$; cioè i lati A_2B_3, A_3B_2 sono paralleli; e lo sono pure A_1B_2, A_2B_1; B_1A_3, B_3A_1.

I quadrilateri del primo sistema, e gli esagoni del secondo e terzo hanno i lati posti nei medesimi angoli rispettivamente paralleli.

Se il triangolo è isoscele, ed S(2) = S(3), la retta $\overline{2,H}$ è la stessa base $\overline{2,3}$.

Essendo $\dfrac{\overline{1,A_2}}{\overline{1,B_3}} = \dfrac{\overline{1,3}}{\overline{1,2}}$ le rette A_2B_3, A_3B_2 sono parallele a quella base.

Siccome poi $\overline{3,A_2} = \dfrac{S+S(2)}{S(1)+S(2)}\,\overline{1,2}\,;\quad \overline{3,B_1} = \dfrac{S+S(2)}{2.S(2)}\,\overline{2,3}$

$$\overline{2,A_1} = \frac{S+S(2)}{2.S(2)}\,\overline{2,3} = \overline{3,B_1}\,;\qquad \overline{2,B_3} = \frac{S+S(2)}{S(1)+S(2)}\,\overline{1,2} = \overline{3,A_2}\,,$$

le rette $A_2 B_1$, $B_3 A_1$ sono egualmente inclinate alla base del triangolo.

Se il triangolo è equilatero, a tutti i punti interni e del perimetro corrisponde una somma costante $S(1) = S(2) = S(3)$, ed i poligoni esterni sono esagoni equiangoli di cui i lati opposti sono paralleli ad uno dei lati del triangolo equilatero.

Non prendo ad esaminare altre figure, essendo agevole il farlo: ma svolgerò in seguito non poche questioni le quali conducono ad analoghe conseguenze.

TAVOLA SINOTTICA

DEI GENERI SPETTANTI ALLA CLASSE

DEGLI INSETTI ARTROIDIGNATI, FLEMIPTERA, LINN. LATR. — RHYNGOTA, FAB. — RHYNCHOTA, BURM.

MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE

SIGNOR MARCHESE MASSIMILIANO SPINOLA.

Carus & Engelmann & Hagen, both state that Spinola's two papers were issued as separates in 1850
W.S.

'avola sinot-
o farla pre-
rsi seguitare
da una più
delle parti
che mi hanno somministrato i caratteri essenziali dell' ordine.

Il primo passo, nello studio della natura, sta in riconoscere gli esseri da studiarsi, e il primo atto di ricognizione non può aver luogo che alla vista dei *Caratteri* o delli *Atti esterni.*

L' importanza dei *Caratteri esterni* delli animali è proporzionata alla loro possibile influenza sulli atti della *Vita esterna.*

La *Vita esterna*, che può dirsi pure la *Vita di relazione* presa nel suo più lato senso, si è quella che ripone l'animale in necessaria relazione coi corpi esteriori, e quindi può comprendere diversi atti che i fisiologisti vogliono riferire alla vita organica. A guisa d' esempio, nel fenomeno della nutrizione, l'assimiliazione del cibo pertiene alla *Vita interna*, ma la presa dell' alimento e la dejezione delle feci sono della *Vita esterna.*

le rette $A_2 B_1$, $B_3 A_1$ sono egualmente inclinate alla base del triangolo.

Se il triangolo è equilatero, a tutti i punti interni e del perimetro corrisponde una somma costante. $S(1) = S(2) = S(3)$, ed i poligoni esterni sono esagoni equiangoli di cui i lati opposti sono paralleli ad uno dei lati del triangolo equilatero.

Non prendo ad esaminare altre figure, essendo agevole il farlo: ma svolgerò in seguito non poche questioni le quali conducono ad analoghe conseguenze.

TAVOLA SINOTTICA

DEI GENERI SPETTANTI ALLA CLASSE

DEGLI INSETTI ARTROIDIGNATI, HEMIPTERA, LINN. LATR.

— RHYNGOTA, FAB. — RHYNCHOTA, BURM.

MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE

SIGNOR MARCHESE MASSIMILIANO SPINOLA.

Ricevuta il 7 Dicembre 1849.

INTRODUZIONE

Per l' intelligenza e per la giustificazione della *Tavola sinottica*, oggetto precipuo della presente Memoria, devo farla precedere da un transunto delle leggi che stimo doversi seguitare nella classificazione degli oggetti naturali, non che da una più minuta descrizione e più filosofica nomenclatura delle parti che mi hanno somministrato i caratteri essenziali dell' ordine.

Il primo passo, nello studio della natura, sta in riconoscere gli esseri da studiarsi, e il primo atto di ricognizione non può aver luogo che alla vista dei *Caratteri* o delli *Atti esterni*.

L' importanza dei *Caratteri esterni* delli animali è proporzionata alla loro possibile influenza sulli atti della *Vita esterna*.

La *Vita esterna*, che può dirsi pure la *Vita di relazione* presa nel suo più lato senso, si è quella che ripone l'animale in necessaria relazione coi corpi esteriori, e quindi può comprendere diversi atti che i fisiologisti vogliono riferire alla vita organica. A guisa d' esempio, nel fenomeno della nutrizione, l'assimiliazione del cibo pertiene alla *Vita interna*, ma la presa dell' alimento e la dejezione delle feci sono della *Vita esterna*.

Nell'altro fenomeno della generazione, la separazione del licore seminale in un sesso, la fecondazione e lo sviluppo delle ova nell' altro, sono della *Vita interna*, ma l' accoppiamento e il parto sono della *Vita esterna*.

Un *Carattere esterno* si dice *naturale*, quando si può ritenerlo indizio sicuro o probabile di una qualunque modificazione nell' esercizio di una data fonzione vitale, o nell' esecuzione dell' atto di una data volontà.

Il *Carattere* è in pari grado *naturale*, comunque accenni a diversa fonzione di una medesima parte del corpo, o a una diversa parte incaricata di una medesima fonzione.

Se il valore del *Carattere* sarà manifesto o dimostrato, lo diremo *naturale in primo grado*, e sosterremo non potersi ommettere in un *Sistema razionale*.

Se il valore del *Carattere* sarà solamente probabile, sarà utile osservarlo tuttavia a titolo di *naturale in secondo grado*, e tenerlo in vista nel sistema razionale siccome soggetto di esperienza e di osservazione.

Non vi sono che i *Caratteri naturali di primo o di secondo grado* che si possano impiegare alla formazione di un qualunque gruppo d' animali: tutti gli altri sono *Caratteri specifici*.

I gruppi sistematici si diramano e si moltiplicano, partendo dall' *Animale* preso in astratto e come tipo di *Regno*, sino al *Genere*, dopo del quale non vi è più che *la Specie*. Ogni gruppo è determinato da un complesso di caratteri naturali che comprende il proprio distintivo particolare, ma pur anco quelli di tutti i gruppi che il precedono e dai quali discende per non interrotta filiera.

I *Caratteri specifici*, quando anco fossero comuni a molte specie, non dovrebbero mai essere adoperati ad aggrupparle, perchè il gruppo risultante sarebbe *artifiziale*, cioè una arbitraria creazione del nostro intelletto senza base e senza corrispondenza nelle leggi e nelle condizioni dell' animalità. Indegni di stare nelle file dei gruppi materiali, dovrebbero starsene alla coda dei generi, e allora s' interporrebbero a titolo di

Sotto-generi, come terzi di capriccio e di comodo, fra i due che devono seguitarsi senza un intermediario, cioè fra il genere e la specie.

Gli *Artroidignati*, non che tutte le altre divisioni principali delli *Insetti propriamente detti* (*Endomyaria hexapoda* della mia tavola), ricavano il loro distintivo particolare dalle particolarità del loro *Sistema manducatorio*. Ma i generi compresi nell'ordine sono poi determinati da caratteri pur naturali esistenti indifferentemente in tutte le parti esterne del corpo.

Ma i caratteri distintivi degli strumenti cibarj sarebbero inapprezzabili in quanto al loro valore se non se ne fosse acquistato il previo ed adeguato concetto, e se non si fosse instituito il loro confronto coi loro analoghi nella bocca meglio conosciuta degli animali superiori. Dunque *la conoscenza delle analogie deve precedere quella delle differenze.*

Ora queste analogie che vogliamo ricercare, o non furono studiate, o rimasero disconosciute dai molti che ci precedettero. Nominatamente il Fabricius che era stato il primo ad avvisare gli entomologisti del partito che era da tirarsi dalla bocca degli insetti, e che aveva inteso fondare il suo sistema quasi esclusivamente sopra le varie forme di questo organo, mostrò di non averne veruna idea, ed attese nei suoi scritti a spezzare i fili e a cancellare le traccie di tutti i rapporti naturali.

Intanto, dal canto mio, a riprendere le orme che ritenevo essere le uniche da seguitarsi e che mi sembravano smarrite, mi è toccato aprirmi una strada quasi nuova che mi ha condotto alla scoperta di qualche fatto anch' esso nuovo, onde ho creduto di essere giunto in punto da poter proporre migliore definizione delle singole parti, e di sostituire, ai vecchi nomi arbitrarj e decipienti, altri più significanti suggeriti dall' analogia e conformi alle definizioni.

« Si on cherchait, dans les insectes (dicevo io sino dal « 1837, nel mio *Essai sur les Flemipteres hétéroptères*, p. 19), « l' analogue de la *Machoire inférieure des quadrupèdes* et des « autres ordres supérieurs, il faudrait la reconnaître dans une

« piece attachée au dessous de la tête et mobile dans un
« sens oblique ou vertical: dans une piece qui entoure le des-
« sous de la bouche, et sur la quelle les autres organes man-
« ducatoires prennent naissance ou viennent s'appuyer. » Questa parte, soggiungevo pure poco dopo, esiste nel maggior numero degli insetti, in molti ella è sufficientemente sviluppata e assai apparente. Eppure quasi dappertutto è stata battezzata con altri nomi che hanno variato all'avventura delle sue varie forme, mentre il nome di *Mascella* era stato trasportato ad altre parti secondarie, che non erano nè gli analoghi, nè gli omologhi delle vere mascelle.

Dirò altrove delle *Mascelle* degli altri ordini. Ora mi tocca parlare di quella degli *Artroidignati*. Ella è di quelle che s'incontrano appunto perfettamente sviluppate e molto apparenti. Attese le sue dimensioni sottili e allungate, presenta una remota somiglianza con un becco d'uccello, ed autori rispettabili le diedero il nome di *Rostro* a dispetto della sua manifesta inconvenienza. Essendo scavata a mezzo tubo nella fronte rivolta verso le altre parti della bocca, e potendole ricevere nella sua cavità, fu paragonata a una *Guaina*, e alcuni la chiamarono *Linguae vagina*, nome meno inconveniente del primo, ma buono solamente in questo caso e inapplicabile alli omologhi degli altri ordini.

La forma sub-lineare e la superficie scavata a mezzo tubo, non sono però esclusivi di questo ordine. Ricompariscono nei nostri *Solenognati* (*Solenognatha*, m.) che sono gli *Imenotteri* del Linneo e del Latreille, e i *Piezati* del Fabricius, e nei nostri *Antliognati* che sono pure i *Ditteri* dei due primi, e gli *Antliati* dell' ultimo. La particolarità veramente esclusiva dell' ordine, quella che mi sembra segregarla decisamente da tutti gli altri, si è che *questa mascella è composta di più articoli similari, disposti in serie longitudinale, mobili indipendentemente l' uno dall' altro*, e tali che l' angolo compreso fra due articoli consecutivi è risultante, nel loro movimento, dalla loro contraria direzione è sempre rettilineo e tanto più acuto quanto

che l' insetto sente il bisogno maggiore di deviare la sua mascella dalla retta che è la linea normale della sua stazione e del suo riposo. Questo insigne carattere comune ed esclusivo di tutto l'ordine mi sembra giustificare la preferenza accordata al nome significativo *Arthoidignatha.* (Animali con mascella articolata) sopra quelli di *Rhyngota* Fab. o *Rhynchota* Burm. che suppongono l' impossibile esistenza di un *becco*, e di *Flemiptera* Linn. che allude a parti non contemplate nella definizione dell' ordine.

Certi *Omalognati* (*Coleoptera*, Linn. ec.) sembrano avere la mascella fatta di più pezzi, e si potrebbe volerla dire *articolata*. Ma questi falsi articoli non hanno nessuna mobilità indipendente, e la mascella si muove tutta d' un pezzo.

È stato scritto che anco gli *Antliognati* avessero due o tre articoli nella loro pretesa *proboscide*, che stimo essere la loro vera mascella inferiore. Ma questo è un errore. Questi supposti articoli non hanno la stessa sostanza e non sono similari. Il basilare, quando è distinto, non è altro che un legamento muscolare che unisce la mascella alla testa. Il terminale è un organo distinto, che ha le sue funzioni particolari le quali non sono in tutti le stesse, ma che in taluni somigliano tanto a quelle delle labbra che la proboscide ne fu detta *labiato*, e cessò dal dirsi *biarticolata*.

Si obbietta contro alla generalità del carattere, che certi *Gallinsetti*, ovvero *Coccina*, Burm. hanno questa mascella senza articolari divisioni. Non lo contrasto, ma osservo questa anomalia seguire solamente nelle femine che acquistano la facoltà generativa senza passare dallo stato di larva a quello d' imago, e la cui bocca rimane, in perpetuo, nello stato rudimentario primitivo. Non così segue dei maschi. Se si osserveranno col microscopio, si conteranno almeno tre articoli nella loro mascella.

La mascella inferiore suole essere la base mobile sopra cui s' appoggiano i veri agenti della manducazione, ma il principale stromento di questa operazione, sì nell' uomo che nei quadrupedi, è *la lingua*, sede peculiare del gusto, muscolo

potente, abile sotto certe condizioni alla presa e all' introduzione del cibo; abilissima alla sua preparazione nella cavità orale e alla sua trasmissione nel canale digestivo.

Però la lingua, così valente nei *Mammalia*, viene meno nelli altri *Exomyaria*. Principia a degradarsi nei *Amfibii Saurii* ed *Ofidi*, va scemando della sua mobilità nei *Chelonii*, e la perde in tal punto fra i *Pesci* e fra gli *Uccelli*, che resa inutile alla presa e alla introduzione del cibo, concorre appena alla deglutizione mediante la depressione successiva delle sue fibre transversali, eseguita dall'alto al basso, e continuata dall' avanti all' indietro.

Una simile degradazione progressiva si verifica pure nelli *Endomyaria hexapoda*. In molti, la lingua perviene al suo maggiore sviluppo, non meno che nei quadrupedi i più favoriti dalla natura, ed è manifestamente atta all'adempimento di tutti i suoi uffizi. Questi gli ho chiamati *Dexioglossata*, e corrispondono a quelli che furono detti *Mandibulata*, nome improprio siccome procurerò dimostrarlo a poche pagine in appresso. In altri, la lingua rimane in uno stato rudimentario e può dirsi quasi abortita. Questi gli ho chiamati *Extramoglossata* e corrispondono a quelli che furono battezzati per *Haustellata*, nome che gareggia in improprietà con quello di *Mandibulata*.

Gli *Artroidignati* appartengono alla seconda classe. L'Omologo della lingua si riduce in essi ad una picciola membrana libera e mobile, posata di campo sopra lo stipite osseo del capo, visibilmente dietro all' origine della mascella inferiore e giungendo appena a cingere l' orlo pure inferiore dell' orefizio dell' esofago. Dobbiamo la scoperta di questa curiosità anatomica al Sig. Savigny. Egli ne diede la descrizione e la figura nella sua *Mem. sur les Anim. invertébrés*, 1.^{re} *part.* 1.^{er} *fascic. pl. v. fig.* 2 *et* 3. Le connessioni di questa membrana col faringe e colla mascella la palesano benissimo per l' *Omologo della lingua*, ma non posso per ciò vederne in essa il vero *Omologo* in quanto alla parte da prendersi ai primi fatti esterni della nutrizione.

Suppliscono all' insufficienza di questo organo abortito quattro di lui dipendenze ch' io intitolerò *Linguae appendices*, perchè questa denominazione non anticipa nessun giudizio e perchè conviene alla loro posizione, mentre non disconviene nè alla loro forma, nè alle loro funzioni.

Gli *Appendici della Lingua* sussistono in più ordini e in ciascheduno hanno forme e destinazioni distinte. Nelli *Artroidignati*, essi consistono in quattro filetti setacei, lunghi, sottili, nascenti sulla superficie della lingua, presso a poco sulla medesima linea transversale e in gran prossimità dell' apertura faringiana. Ogni filo è semplice, cioè senza articolazioni, muscoloso e quindi più o meno estensile e retrattile, libero in tutta la sua estensione, cioè, senza aderenza colla mascella e collo stipite del capo. La facciata interna è longitudinalmente scavata. I due estremi sono più lunghi, ma non più larghi degli interni, li abbracciano lateralmente e gli difendono a guisa di mezzi stucci. Tutti finiscono in una punta acuta fatta spesse volte a lamina tagliente o dentata, e disposta in modo da potersi riunire e formare, col loro insieme, una solo arma offensiva valsente a penetrare in certi corpi di una data resistenza. I loro margini laterali sogliono essere fregiati da file di barbettine flessibili, brevissime, poco apparenti all' occhio nudo, e destinate, per quanto mi sembra, a turare la fessura permanente nel canale interno dell' apparato.

Ciò premesso, e dopo avere avvertito che non solamente la mascella non ha appendici, ma che il capo delli *Artroidignati* non ha altro pezzo che possa intervenire nella manducazione, ci sarà facile il prendere un giusto concetto di questa operazione e indi vedere se abbia circostanze particolari all' ordine, se le particolarità delle circostanze sono collegate alle particolarità delle forme, e se le particolarità delle forme sono debitamente messe in chiaro nei caratteri da noi assegnati.

Primieramente l' *Artroidignato* avrà da spingere il suo apparato linguale oltre l' estremità della mascella, se vorrà agire senza sortire dal canale mascellare, e l' apparato penetrerà da

se solo nella strada che gli si sarà aperta, la mascella non potendo accompagnarlo per avere il suo ultimo articolo talora incurvato ad arco o mozzato in linea retta, talora smarginato, sempre ottuso e essenzialmente inoffensivo. Potrà, occorrendo, cacciar liberamente lo stesso apparato linguale fuori dal canale mascellare, abbandonare la direzione talora obbligata della mascella e operare a visibile distanza della medesima. I quattro appendici che si erano strettamente congiunti per la loro più facile introduzione, avranno da disgiungersi alquanto al doppio fine di acquistarsi l' opportuna libertà di agire e di dare al loro canale interno un diametro proporzionato al volume della molecula alimentare che il deve tragittare. Gli appendici, movendosi liberamente, spingeranno nel canale l' alimento che sarà frequentemente liquido, ma che potrà essere solido, se sarà stato ridotto in piccolissimi frantumi. L' alimento scorrerà il canale dall' una all' altra estremità, non in forza di un succhiamento, perchè questo supporrebbe la formazione di un vuoto e perchè la formazione del vuoto è inconcepibile in una cavità che non comunica con un polmone o con altro organo faciente le parti di una macchina pneumatica, ma per essere continuamente sospinto nell' opportuna direzione dalle fibre transverse dell' apparato, le quali si succedono una ad una in ristringersi e dilatarsi alternativamente, insino che abbiano trasportato il loro fardello all' apertura dell' esofago, punto in cui cessa la manducazione ed incominciano i fatti della nutrizione che sono della vita interna e quindi fuori al presente dall' assunto dei nostri studi.

Se non vi è succhiamento, non vi è stromento da succhiare; se non vi è stromento da succhiare, non vi è *haustellum*; se non vi è *haustellum*, non vi sono *Insecta haustellata*. Si sbandiscano dunque queste voci improprie, siccome dicenti mere contro-verità.

Sono propenso a credere che il senso del gusto risiegga meno sopra la pochissima superficie della lingua rudimentaria che sulle pareti interne de' suoi appendici. Questa ipotesi che

attribuisce la sede del piacere compensativo al luogo del maggior lavoro, mi sembra la più facile a conciliarsi coi bisogni naturali e a servire alle mosse dell'*Instinto* che intendo essere *l' attrattiva primigenia di ogni animale per l' adempimento di tutti gli atti comandati dalle condizioni della sua vita.*

Gli insetti degli altri ordini hanno altri sistemi di manducazione che si meriterebbero pure una lunga e minuta descrizione, *sed non est hic locus*, e deggio per ora limitarmi ad indicare i tratti caratteristici che gli contraddistinguono dai nostri *Artroidignati.*

Negli *Agnathostomati* manca interamente l' omologo della mascella inferiore, e gli strumenti cibarj non hanno base ossea o cornea.

Fra i *Gnathostomati*, i *Dexioglossati* hanno la loro lingua sufficiente a disimpegnarsi dalle sue funzioni senza il soccorso de' suoi appendici. Questi mutati di forma e di uffizio, sono stati diversamente battezzati sempre senza riguardo ai loro rapporti e con rispetto esclusivo alle loro eccezionali singolarità. Gli interni semplici, molli e membranosi, furono chiamati, ora *paraglossae*, ora *laciniae linguae exteriores.* Gli esterni cornei articolati, somiglianti a piccole antenne, ne ebbero qualche volta il nome di *antennulae*, ma più generamente ritennero quello in oggi invalso di *palpi labiales.* La mascella inferiore non si rimane immobile durante la manducazione, perchè partecipa necessariamente ai vari movimenti della lingua aderente, e può anco prendere una parte indiretta ai suoi preliminari per mezzo de' suoi proprj appendici, i quali, in numero di due, tengono un largo posto, nella classificazione moderna, sotto il nome usitato di *palpi maxillares.*

Fra gli *Ectinoglossati*, gli *Antliognati* hanno la mascella inferiore munita pure di due appendici mobili e articolate che ritengono il nome prevalso di *palpi.* Ella è tubulosa presso alla base, e il tubo chiuso da tutte le parti, per breve che sia, è sufficiente ad impedire l' apparato linguale di uscire dal canale mascellare. Meno solida che negli ordini precedenti, la

sua porzione basilare e tubulosa è capace di erettilità, talchè suole mantenersi in uno stato di tensione durante l' atto della manducazione.

I *Micrognathi* hanno una mascella senza appendici, piccolissima e inoperosa. I quattro appendici della lingua non sono fra loro conformi. Gli esterni sottili articolati, e detti perciò *palpi labiales*, non spuntano immediatamente dalla superficie della lingua, ma bensì dal fianco esterno degli appendici interni adjacenti. Questi suscettivi di singolar volume, mal difesi dalla mascella, si ripiegano sopra se stessi nei tempi di riposo, involgendosi a guisa di spirali, sprovveduti di soccorso dalle altre parti, si hanno da distendere e da formare una specie di proboscide muscolare, di straordinaria potenza, e racchiudente in se stessa quel canale orale che la sostanza alimentare deve transitare dal punto della sua introduzione sino al suo arrivo all' apertura dell' esofago.

L' esistenza di una mascella inferiore sembrerebbe tirar seco quella di un' altra mascella superiore corrispondente colla prima, tanto per simmetria di posizione, quanto per simultaneità di azione. La sua presenza si verifica nell' uomo, nei quadrupedi e in tutti gli *Exomyaria*. L' analogia c' indurrebbe a supporla parimente negli altri animali. Eppure se dietro al premesso supposto, andassimo in cerca di questo analogo negli *Endomyaria hexapoda*, la nostra ricerca riuscirebbe senza frutto. Ma se per lo contrario, dietro alla scorta della legge delle connessioni, cercassimo, non l' analogo dello stromento manducatorio, ma l' omologo dell' osso dello scheletro, allora potressimo riscontrarlo, ma il troveremmo sempre vestito d' altre forme e delegato ad altri uffizj.

Il problema, piantato in questi termini, avrà ancora molte e molte difficoltà, imperocchè la sua piena soluzione sarebbe subordinata a quella di un altro problema più generale e più complicato. Si tratterebbe diffatti di assicurarsi, se la testa di un insetto contiene gli omologhi di tutte le ossa cefaliche degli animali superiori.

A prima vista, il problema sembrerebbe o assurdo o insolubile. Si contrapporrebbe l'enorme differenza nel numero dei pezzi. La testa di un insetto pare così semplice a confronto di quella di un mammifero, che si vorrebbe crederla disegnata dietro ad un altro modello. Ma una attenzione più matura ci fa tosto nascere il sospetto che questa apparente semplicità possa procedere, siccome procede, dall' intima saldatura delle ossa contigue aventi un diverso centro di ossificazione, saldatura che io sostengo essere l' ultimo termine dello sviluppo normale, quando non è impedito o controbilanciato da quello di un viscere in confine, per esempio, dall' encefalo dirimpetto alle ossa del cranio. Però, presso i più fra gl' insetti, queste saldature sono tali che le traccie delle suture primitive sono o appajono cancellate o così debolmente impresse da essere state prese, per righe insignificanti quando erano risaltanti e figurate in coste o in carene. Insisto sopra questo fatto, perchè in seguito a questo mio modo di vedere, mi è sovente avvenuto di assegnare a diversi gruppi, e nominatamente a molti generi della seguente *Synopsis*, certi caratteri tenuti prima d' ora in minor conto e messi appena a taglio nella diagnosi delle specie.

Attenendomi per ora ai soli *Artroidignati*, dironne che tutte le loro ossa encefaliche, a partire dall' occipitale sino a quelle della faccia, tranne l' osso *nasale* e il *sopra-mascellare*, formano un aggregato unico solido compatto e omogeneo che si merita il nome di *Osso grande del cranio*. Le ossa delle guancie, confuse cogli orbitali senza traccia d' intermedia divisione, sono da ciascuno lato distinti, ma non disgiunti dall'osso grande, mediante una sutura apparente, risaltante e careniforme nelle sole *Fulgorite*, scavato a solco in tutte le altre famiglie. Più di rado, un' altra sutura transversale segrega e circoscrive *l'osso unico della faccia*. In alcuni generi anormali, scrupolosamente annoverati nella nostra tavola sinottica, altre suture transversali pur s' interpongono, ora fra l'occipitale e lo stipite osseo del capo ch' io credo corrispondere alle vertebre della

midolla allungata, e allora si dice che l'insetto ha un collo distinto: ora fra il *coronale* e l' *occipitale*, ora fra la porzione dell' osso grande che corrisponde al vertice del capo e l' osso della faccia, circoscrivendo allora il vero omologo dell' *osso frontale*, di rado in un solo pezzo, più sovente soddiviso in due pezzettini, non sempre congiunti sulla linea mediana, anzi talvolta notevolmente distanti e allora ridotti alle apparenze di due fossette laterali.

Non era tanto facile rinvenire, in queste fossette, gli omologhi della fronte, onde non dobbiamo meravigliarci che questa denominazione sia stata applicata alla parte anteriore e mediana del capo, che era piuttosto corrispondente alla faccia. La necessità di essere inteso, mi ha deciso a non discostarmi dalla nomenclatura consecrata dall' uso. Mi è sembrato che l' errore, che poteva nascere dall' improprietà dei vocaboli, non fosse di tanto da mettermi nell'obbligo di singolarizzarmi e da impegnarmi in una strada nella quale moltissimi avrebbero rifiutato di seguitarmi.

La più complicata spezzatura dell' *Osso grande* non ha però, negli *Artroidignati*, il benchè menomo rapporto col volume del loro encefalo e quindi col gradino occupato dall' animale nella scala ascendente organica. Le *Tettigonite* e le *Fulgorite*, molto meno avvanzate delle *Reduvite* e delle *Pentatomite*, hanno il loro cranio soddiviso in un maggior numero di compartimenti. La causa ne sta nel rovesciamento del capo all' ingiù e all' indietro, onde ne risultano ingrandimento della mole e allontanamento fra loro dei diversi centri d'ossificazione.

Secondo la legge delle connessioni, non che secondo le regole dell' analogia, l' *osso nasale* avrebbe da essere un osso dispari mediano e aderente per sutura semplice alle ossa della faccia. Appunto un osso consimile esiste presso i più fra gli *Endomyari*, e questo osso non differisce dal suo omologo negli *Exomiari*, fuorchè 1° per aderire alla faccia dal solo orlo anteriore della medesima, 2° per poter raggiungere la bocca, senza l' ostacolo frapposto da una mascella superiore. Negli *Artroidi-*

gnati, questo pezzo che avrebbe dovuto dirsi *Nasus* costituisce la parte superiore della cavità della bocca che non dobbiamo confondere nè col canale mascellare, nè colla cavità canaliforme dell' apparato linguale, ed ha la sua origine esattamente sopra l' apertura dell' esofago. Gli autori l' hanno chiamato ora *Epistoma*, ora *Clypeum* (Clipeo). Anteporrò il secondo nome perchè più usitato, e perchè avendo un significato meno circoscritto, riesce meno disconveniente nella moltiplicità dei casi vaghi e diversi.

Il *Clipeo* non suole essere scompagnato di un' appendice mobile ed estensibile, evidente prolungamento libero della di lei tonaca interna. Questo appendice, suscettivo negli altri ordini di molte varietà di forme e di gradi molto diversi di sviluppo, è sempre negli *Artroidignati* allungato, terminato in punta, e di tale sottigliezza da potersi alloggiare nel canal mascellare al di sopra dell' apparato linguale, coprendolo e difendendolo in parte, onde avevo imaginato imporle il nome di *Operculum oris*, in rimpiazzo dell' usata denominazione di *labrum*, che mi è sembrata e mi sembra tuttavia di una inammissibile improprietà. Ma fatto il riflesso, che il canale della mascella è intieramente fuori della bocca, e che l' appendice, lungi dal coprire tutto l' apparato linguale, non giunge neppure all' estremità della mascella, ho riconosciuto il nuovo nome non meno improprio del vecchio, ed ho pensato, badando per ora più alla situazione che all' uffizio, di starmene alla denominazione di *Appendix clypealis*, finchè si possa passare a quella di *Appendix nasalis*, alla quale mi sarei appigliato tanto più volontieri quanto che ho le mie fortissime ragioni per supporvi la sede dell' olfato, e per considerarne la tonaca interna siccome l' omologo e l' analogo della *membrana olfativa.*

L' *Appendice clipeale* nè prende, nè può prendere la benchè menoma parte nell' atto della manducazione, ed è stato un gravissimo errore l' annoverarlo fra gli stromenti cibarj. L' equivoco non sarebbe accaduto, se gl' insetti avessero avuto una mascella superiore interposta fra il naso e la bocca. L' as-

senza di questo osso intermedio è bastata, non solamente per mettere al servizio della nutrizione certe parti che le sono straniere, ma pur anco a fare perdere le traccie della vera mascella che si voleva cercare laddove non si trovava. Sono convinto e spero di poter dimostrare che questa ricerca sarebbe stata meno infelice se fosse stata diretta altrove.

Sappiamo che la mascella superiore dei quadrupedi è un osso pari, che i suoi due rami partono dai lati opposti del capo, si congiungono sulla linea mediana, occupando tutto il contorno osseo superiore della bocca, corrispondendo coll' altra mascella che occupa in simil modo il contorno inferiore, e concorrendo con essa, però passivamente in ragione della propria immobilità, a diversi atti della manducazione. Sappiamo pure che quest' osso pari ha avuto diversi centri di ossificazione, che vi è stata un' epoca dell' esistenza fetale, in cui non era ancora che un aggregato di pezzettini distaccati. Ora dico che l' inuguale sviluppo di questi diversi ossettini, è la causa principale della varietà di forma e delle varie degradazioni che la mascella incorre nelle varie suddivisioni dei nostri *Ostiati*.

Primieramente, l' arresto dello sviluppo, comunque notabile dappertutto, può non giungere al segno che sparisca qualcheduno dei pezzi integranti. Allora l'aggregato è ancora completo, ma discontinuo, e la mascella è trasformata in una serie transversale di ossettini moltiplici. Nei Pesci e negli Amfibi, si danno esempj di questa combinazione. Ma non si è mai osservato niente di consimile negli insetti il cui sistema osseo suol essere anzi rimarcabile per la sua anomala semplicità.

In secondo luogo, vi può essere aborto completo di alcune parti, e allora possono darsi due casi opposti. Nel primo, mancano le parti laterali, e sussistono le intermedie, o riunite in un corpo, o divise a pezzi distinti. Questa combinazione è anch' essa straniera agli insetti. Nel secondo, mancano le intermedie, e restano le estreme. Questa è la combinazione della quale si dà esempio negli insetti, e che si può dire la loro regola più frequente.

Ridotta a tal condizione, questi resti isolati cessano dall' essere gli analoghi di forma e d'uffizio della mascella superiore degli *Exomiari*, e ne sono solamente gli omologhi riconoscibili dalle loro connessioni. Ora nei più alti gradi dell'animalità, la mascella superiore si connette alla sua origine con una delle ossa laterali che stanno fra le faciali e il temporale, anzi più frequentemente con quello che gli anatomici francesi hanno chiamato l'*Os de la pomette*. Se l' omologo di questa mascella esiste pertanto in qualche insetto, deve ritrovarsi annesso colla porzione del cranio che più s' approssima a una guancia, cioè con quella a cui i più moderni e i più dotti entomologisti hanno dato meritamente il nome di *Gena*. Adunque ogni qual volta troveremo, a fianco di una *Gena*, un pezzo distinto, qualunque ne sia la forma, qualunque ne sia l' impiego, saremo autorizzati a ravvisarvi le vestigia trasformate dell'*Osso sopra-mascellare*.

Ora questi pezzi disposti a paja possono essere mobili o immobili, possono essere destinati a operare di conserva e in compagnia, oppure di fare ognuno da se a guisa di palpo, di chela o d' altro. Questo secondo caso non ha luogo negli *Endomiari esapodi* e non ho occasione di discuterlo. L' altro, supponendo che i due pezzi debbano coagire nello stesso luogo o allo stesso fine, esige che le loro estremità si possano raggiungere, che si raggiungano in un punto da non incomodare gli altri agenti mobili incaricati di altra missione, e quindi che stieno o sopra o davanti alla bocca e sempre fuori dal teatro della manducazione. Esigesi pure che possano a volontà avvicinarsi e allontanarsi l'uno dall'altro, e quindi che si muovano in senso laterale e orizzontale, e non in senso obliquo o verticale, siccome spetta alla mascella inferiore. Destinati ad agire sopra i corpi estranei, la loro forza e la loro mole saranno proporzionate alla solidità e alla resistenza dei corpi che avranno da attaccare, e la loro forma sarà adattata all' azione da esercitarsi. Così saranno fatte a pinze inermi, se avranno solamente da prendere e da conservare; a palette e a seggiuole, se avranno da prendere e da trasportare; a cesoie, se avranno

da prendere e da tagliare; in somma, infinitamente varia può essere la loro missione, quindi infinitamente varia può essere la loro forma. Per accidente, la sostanza assoggettata alla loro azione è stata talvolta una sostanza alimentare. Questa circostanza è bastata a stabilirli stromenti esclusivi d' una supposta masticazione e a proclamarli sotto il nome di *Mandibole* gli attributi distintivi degli *insecta mandibulata* che sono stati pur giudicati gli unici capaci di vivere di sostanze solide. Tutto questo è inesatto. Gli insetti in realtà nè succhiano, nè masticano, ma inghiottiscono con ingegnoso artifizio e con vario meccanismo il loro cibo tale e quale è stato introdotto o nella cavità della bocca o nella cavità dell'apparato linguale. L'azione delle supposte *mandibole* segue in altro luogo e in altro tempo. Desse non sono dunque strumenti cibarj, a meno che non si voglia che lo sieno, come il sarebbero la mano armata del beccajo quando taglia gli stalli della bestia da macello o le unghie della belva quando straccia la pelle della sua preda. Mi avrebbe ripugnato di mantenere una nomenclatura tanto viziosa. Alla parola *Mandibula*, feconda di troppi errori, ho sostituito *Appendices supra-maxillares* che dice poco, ma non dice niente di falso.

Se gli *Appendici sopra-mascellari* saranno immobili, li troveremo aderenti alla guancia (*Gena*), mediante una sutura semplice, transversale e comunemente solciforme, gli vedremo prolungati a fianco al *Clipeo*, distinti da una sutura pur anco semplice ma longitudinale, ed or solciforme o careniforme. Tali gli ho riscontrati in tutti gli *Artroidignati*, e tali non si presentano mai quando si osservano le specie di qualsiasi altra divisione. Possiamo pertanto considerare questa peculiare forma degli *Appendici sopra-mascellari*, siccome un secondo carattere comune ed esclusivo di quest' ordine. Altri li dissero *fulcra rostri* ossia *sostegni del becco*, ma non vi è il becco, e non vi può essere un sostegno quando non vi è niente da sostenere. Il Signor Burmeister li ha chiamati *lora*, ossia *briglie* o *freni*; anco questa voce mi pare che manchi di generalità e che

rompa tutti i fili dell' analogia. Nel mio *Essai sur les Hémipt. heteropt.*, a riguardo della loro essenziale connessione, gli avevo chiamati *secondes pièces des lobes latéraux*. Ma al presente quella designazione di *lobi* sembrandomi troppo vaga ed insignificante, ho dovuto abbandonarla. I *lobi laterali* sono le *gene*, e l' intermedio è quello che s' intende per *fronte*, tuttochè sarebbe forse meglio dirlo *faccia*.

Finalmente in terzo ed ultimo luogo, comunque la *Gena* sia ancora distinta, o comunque siasi confusa nell' osso grande, questi appendici possono svanire affatto oppure ridursi a rudimenti appena visibili e di niun servizio. Un tale estremo è appunto la regola nei nostri *Esapodi agnathostomati*, cioè sprovveduti di mascella inferiore. Fra i *Gnothostomati* è meno frequente. Nondimeno nei *Dexioglossati*, lo troviamo manifesto ed essenzial carattere degli *Anapognatha* (G. *Thrips* etc.). Negli *Ectramoglossati*, vediamo gli appendici dei *Micrognati* ridursi a due munchetti liberi e mobili, ma troppo deboli per servire separatamente e troppo corti per raggiungersi ed agire di concerto, e quelli degli *Authognati* annichilarsi o almeno sottrarsi intieramente alle nostre ricerche.

Con ciò pongo termine alla rivista delle innovazioni che ho creduto indispensabili e delle parole alle quali ho dovuto assegnare un nuovo significato. Ma per l' intelligenza della tavola, gioverà il quadro di sinonimia comparativa che inserisco in questa introduzione.

1. Maxilla inferior seu Maxilla . .	*Rostrum*, in *Hemipteris*, Lin. aut *Rhyngotis*, Fab. — *Mentum* interdum *labium* in *Coleopteris*, Lin. — *Proboscis*, in *Dipteris*, id. et *Antliatis*, Fab.
2. Canalis maxillaris	*Canal rostral*, olim *mihi*.
3. Lingua	Saepius *Labium* ubi manifestum, rarius *Lingua*. Sed in *Hemipteris*, Lin. *Rhyngotis*, Fab. *Arthroidignatis*, m. membrana interne recondita, a D. Savigny nuper detecta et usque adhuc in systematibus praetermissa.

4. Apparatus lingualis	*Haustellum*, Fab. — *Lingua* olim *mihi*.
5. Appendices linguae interiores . .	*Setae linguae* in plerisque insectis vulgo dictis *Haustellata*. *Proboscis* in *Lepidopteris*, Lin. *Glossatis*, Fab. — *Paraglossae* in *Hymenopteris*, Lin. *Piezatis*, Fab.
6. Appendices linguae exteriores . .	*Setae linguae* in *Hemipteris* et etiam in *Dipteris*. *Palpi labiales* in plerisque aliis.
7. Appendices maxillae inferiores. .	*Palpi maxillares*, vel etiam *Maxillae*.
8. Clypeum (melius *Nasus*)	Saepius *Clypeum*, rarius *Epistoma*, rarissime *Labrum*.
9. Appendix clypealis (melius *Nasalis*).	*Labrum*.
10. Frons (melius *Facies*)	*Lobe intermêdiaire de la tête, mihi* olim.
11. Genae	*Premiere pièce des lobes latéraux de la tête, mihi* olim.
12. Appendices supra-maxillares (vestigia maxillae superioris)	*Fulcra rostri*. — *Lora*, Burm. — *Seconde pièce des lobes latéraux de la tête*, *mihi* olim in *Hemipteris*, Lin. — *Mandibulae* in *Coleopteris*, in *Hymenopteris*.
13. Appendices maxillae inferioris . .	*Palpi maxillares*.

Se non m'inganno ne risulta che la nomenclatura vigente non essendo fondata nè in verità di fatto, nè in unità di principio, implica le più strane contraddizioni, cioè il nome d'una cosa data ad un' altra, lo stesso nome dato a cose diverse e i diversi nomi dati alle stesse cose.

Non mi diffonderò egualmente sopra i caratteri ottenuti dalle altre parti del corpo ed impiegati alla soddivisione dell' ordine in *sotto-ordini, tribù, famiglie* e all' ultimo in *generi* (ma non in sotto-generi), perchè stimo di aver trattato quanto basta queste quistioni, prima nel mio *Saggio sopra gli Emitteri eterotteri*, più tardi nella *Memoria sopra le folgorelle*, recentemente sotto un aspetto più generale nella *Storia dei Cleriti*. Dirò solamente, in conferma o in rettificazione di quanto avevo scritto prima d'ora, che turbato dal dissenso imponente

dell' autorevole Dott. Burmeister, mi sono fatto un premuroso dovere di rivedere scrupolosamente la testa delle *Folgorelle* non che quella di tutti gli altri generi del medesimo ordine, e che le mie ripetute osservazioni mi hanno riconfermato la verità dei fatti presi per base della mia classificazione e la costanza dei caratteri sopperiti dalla struttura esterna del *Cranio*. Voglio pertanto persuadermi che se il sapiente Naturalista si degnerà applicare a questo soggetto una parte dell' attenzione che gli ha tanto profittato nello studio dei *Coleopteri lamellicorni*, egli non se ne rimarrà così mal prevenuto contro ai miei conscienziosi risultamenti.

Che la particolarità della testa rovesciata o non rovesciata è un carattere naturale in primo grado. Oltre alle molte conseguenze che ne ho rilevate, nel mio *Saggio sulle folgorelle p.* 150 *e segg.*, è particolarmente da notarsi la sua influenza sulla posizione della bocca. Posso pertanto compiacermi di essermene prevalso per dividere l' ordine in due sotto-ordini contraddistinti dai due nomi significativi *Prostomophora* e *Catostomophora*, cioè *Porto-la-bocca-davanti* e *Porto-la-bocca-dissotto*.

Che la distanza qualche volta molto apparente dell' origine della mascella all' origine dell' apparato linguale, è una circostanza particolare agli *Artroidignati*, la quale allude ad una circostanza pure particolare della loro manducazione, cioè all' indipendenza dell' *apparato linguale*, in tutta la durata di questa operazione. Anche questo carattere è da ritenersi *naturale in primo grado*.

Che in ordine alle antenne, ai tarsi, e generalmente a tutti i pezzi esterni, liberi e articolati, mentre stimerei di valore, perfino alla cieca, tutte le differenze delle forme pel solo dubbio che non fossero indifferenti al costume dell' insetto, altrettanto tengo in infimo conto il numero degli articoli, carattere artifiziale, il cui merito illusorio consiste unicamente nel suo facile riscontro.

Che riguardo agli organi del moto, non meritano attenzione che le deformazioni che rendono lo stromento meno servibile al suo uffizio primitivo, perchè indicano l' esistenza di un altro impiego e quindi una notabile singolarità di abitudini. Tali non crederei certamente le tante minute differenze dell' innervazione alare. Direi di questo carattere quanto dissi del numero degli articoli tarsali, comodissimo in pratica, infimo o nullo in teoria.

Che ogni carattere che fosse proprio di un solo sesso, siccome non servirebbe alla determinazione dell' altro, si dovrebbe rigettare; mi compiaccio che mi sia riuscito il farne pochissimo uso nella classificazione delle famiglie che ho trattate.

Che la struttura delle parti non dotate di mobilità propria e indipendente non può influire sulle abitudini degli insetti, fuorchè per via indiretta, cioè limitando la portata e determinando la direzione delle parti mobili adjacenti. Quindi non ho potuto ammettere per caratteri naturali e caratteri da gruppi i denti e le spine marginali del prottorace e le ineguaglianze del suo dorso. Viceversa, non ho creduto di trascurarne il mostruoso sviluppo, quando l' ho veduto oltrepassare il proprio confine ed usurpare dominio sulle ale, sul capo e sopra l' abdome. *A fortiori*, mi sono fatto una legge di badare alle particolarità del petto che avessero qualche influenza sopra la stazione della mascella e sopra i movimenti dell' organo manducatorio.

Fedele a questi principj, mi è toccato rigettare varj gruppi proposti in questi ultimi tempi, e segnatamente molti di quelli che i Sigg. Amyot e Serville hanno instituito nella loro *Hist. des Ins. Hémiptères, Paris* 1848. Non mi pento del gran taglio, per aver fatto troppo. Ma bensì mi rimprovero di non aver fatto abbastanza. Derogando, anzi contraddicendo, alle mie stesse massime, ho ammesso pur troppo certi gruppi artifiziali tutti, dedotti, costoro dal numero degli articoli delle antenne o dei tarsi, coloro dalle areole delle ali superiori. Ma che deggio dire? Questi gruppi erano stati creati dai gran maestri della scienza.

Alcuni datavano dal Linneo, altri dal Fabricius, dal Latreille o dal Burmeister. L' ammetterli non fu per parte mia, nè una inconseguenza, nè una concessione di tolleranza: fu una abnegazione di me medesimo, intesi sacrificare la mia opinione all' altrui autorità. Con tutto ciò, sono tuttora e sarò sempre sinceramente disposto ad applaudire *toto corde* a quello fra' miei successori, il quale animato da più giovanile ardire, farà appello dalla cosa giudicata e riuscirà a saltare il fosso nel quale ho temuto d' inciampare.

La Tavola sinottica seguente è stata redatta secondo il metodo detto del Decandolle, o perchè l' eccelso Botanico ne sia stato l' autore, o perchè ne abbia fatto uso familiare nelle sue opere magistrali. La necessità di fissare il posto naturale dell' ordine contemplato, mi ha obbligato a risalire sino alle prime divisioni delle cose create. Ma siccome non entrerà nel mio piano la pubblicazione di un *Systema naturae*, ho guardato di non distaccarmi dalla retta discendenza degli *Artroidignati*, ed ho contrassegnato coll'asterisco * tutti i gruppi laterali de' quali ho appositamente preterite le soddivisioni.

Con sommo mio rincrescimento, ho dovuto apporre lo stesso asterisco * a una tribù intiera degli stessi *Artroidignati*, cioè ai miei *Catostomophori apocephaloceri*. Ne risulta, nella *Tavola sinottica*, una considerevole lacuna. Questo è un gran male. Ma quando si conosceranno i miei motivi, si vedrà che non potevo fare diversamente e sarò compatito.

Sono vecchio e prossimo a finire il quattordecimo lustro della mia vita. Da varj anni la decadenza della vista ed altre croniche infermità non mi permettono più la caccia degli insetti. Concentrato nello studio del gabinetto, ho da consultarvi una collezione che non è più il frutto delle mie fatiche, ma bensì il prodotto di una corrispondenza estesa, lunga e dispendiosa. Con moltissimo stento, ero riuscito a riunire, in un cartone, una centinaja di *Apocephaloceri*. Dico a stento, attesochè questi nani dell' ordine, poco ricercati dagli amatori, sogliono essere negligentati e mal conosciuti dai raccoglitori. Ora il con-

tenuto di questo cartone è stato lordato dalla muffa, flagello delle collezioni al quale non conosco nè riparo, nè rimedio. Eccomi dunque spogliato dell' opportuno materiale. Mi è forza o tacere, o fare il papagallo a chi ha la fortuna di aver veduto da se. Preferisco il primo partito che mi sembra il più decente e il meno avventuroso.

TABULA SYNOPTICA INSECTORUM ARTHROIDIGNATHORUM.

Numeri d' ordine.	Numeri di riporto antecedente.	Numeri di riporto susseguente.		
1	..	.....	* CORPORA, *dono vitae* non dotata. — *REGNUM PRIMUM*.	AZOTICA, m. O.
2	..	.....	CORPORA, *dono vitae* dotata. — *REGNUM SECUNDUM* .	ZOTICA, m.
3	2	.....	* ZOTICA, sui conscientiae motusque voluntarii incapaces. — *SUB-REGNUM PRIMUM*	VEGETALIA. O.
4	2	5-6	ZOTICA, sui conscientiae motusque voluntarii capaces. — *SUB-REGNUM SECUNDUM*	ANIMALIA.
5	4	.....	* ANIMALIA, *sceletro solido* destituta. — *TRUNCUS PRIMUS*. (*Molluscha, Annelides, Radiarii, Acalephi*, etc.)	ANOSTIATA, m. O.
6	4	7-8	* ANIMALIA, *sceletrum solidum* gerentia. — *TRUNCUS SECUNDUS*	OSTIATA, m.
7	6	.....	* OSTIATA, *musculis* ab externâ sceletri superficie prodeuntibus. — *RAMUS PRIMUS* .... (*Mammalia, Aves, Amphibii, Pisces.*)	EXOMYARIA. O.
8	6	9-1	OSTIATA, *musculis* ab internâ sceletri superficie prodeuntibus. — *RAMUS SECUNDUS*	ENDOMYARIA.
9	8	.....	* ENDOMYARIA, *pedibus* novem vel amplius. — *SECTIO PRIMA* .... (*Myriapoda, Crustacea*, etc.)	POLYPODA. O.
10	8	.....	* ENDOMYARIA, *pedibus* octo. — *SECTIO SECUNDA* . (*Acaridii, Arachnidae*, etc.)	OCTOPODA. O.
11	8	12-13	ENDOMYARIA, *pedibus* sex. — *SECTIO TERTIA*. .... (*Insecta propriè dicta.*)	HEXAPODA.
12	11	.....	* HEXAPODA, *maxillis* omnibus destituta. — *CLASSIS PRIMA* .... (*Pediculi*, etc.)	AGNATHOSTOMATA, m. O.
13	12	14-15	HEXAPODA, *maxillâ inferiore* saltem munita. — *CLASSIS SECUNDA*	GNATHOSTOMATA, m.
14	13	16-17	GNATHOSTOMATA, *linguam* gerentia conspicuam extra os producendam et manducationis immediatè participem. — *SUB-CLASSIS PRIMA*	DEXIOGLOSSATA, m.

15 12 20-22 GNATHOSTOMATA, *linguâ minimâ aegrè perspiciendâ et solummodo appendicibus affixis mediatè manducationis participe. — SUB-CLASSIS SECUNDA* . . . . . Ectramoglossata, m.

16 14 . . . . . * DEXIOGLOSSATA, *appendicibus supra-maxillaribus* nullis. — *TRIBUS PRIMA* . . . . Anyperognatha, m.

(*G. Thryps*, Lin. - *Thrypsitae*, Burm.)

17 14 18-19 * DEXIOGLOSSATA, *appendicibus supra-maxillaribus* magnis mobilibus, ultra os producendis, apice saepius conjunctis et conjunctim laboriosis. — *TRIBUS SECUNDA.* Phoryperognatha, m.

(*Insecta mandibulata* plerorumque auctorum recentiorum.)

18 17 . . . . . PHORYPEROGNATHA, *maxillâ inferiore* planè neutiquam tubulosâ. — *ORDO PRIMUS* . . . . Omalognatha, m.

(*Maxilla inferior* saepius articulis plurimis instructa, articulis singulis cum textâ maxilla movendis et motû peculiari sejunctim destitutis. *Lingua*, paginò totâ inferiore maxillae adhaerens. *Appendices linguae* quatuor, interiores parvi membranacei lacinias linguae laterales simulantes, exteriores cornei articulati antennaeformes. *Appendices maxillares* maxillae basis vaginantes, articulati et etiam antennaeformes. (*Coleoptera, Orthoptera, Neuroptera*, Lin. Latr. - *Eleutherata, Ulonata, Odonata* et *Synistata*, Fab.)

19 17 . . . . . PHORYPEROGNATHA, *maxillâ inferiore* semi tubulosâ, subtùs convexâ, supra canaliculatâ. — *ORDO SECUNDUS.* Solenognatha, m.

(*Appendices maxillares* elongati apice attenuati, intùs canaliculati et maxillam utrinque vaginantes, extùs *appendicem* alterum vulgò *Palpum* emittentes mobilem articulatum antennaeformem. *Lingua*, maxillae margini laterali adhaerens, plus minusve protractilis, interdum in quiete retrorsum reflexa, appendicibus quatuor suffulta: interiores uti et in *Omalognathis* membranacei et exteriores linguae lacinias effingentes; exteriores solidi articulati antennaeformes. In solâ *Apisidarum* familiâ, articuli duo primi semi-tubulosi, intùs excavati et linguam ultrà maxillam vaginantes. — *Hymenoptera*, Lin. Latr. - *Piezata*, Fab.)

20 15 23-24 ECTRAMOGLOSSATA, *maxillâ inferiore* conspicuâ et pluri-articulatâ, articulis sejunctim mobilibus. — *ORDO TERTIUS* . . . . Arthroidignatha,

(*Maxilla*, in paginâ inferiore capitis originem suscipiens, plus minusve oris aperturae posterior, appendicibus omnibus destituta, supra canaliculata, in quiete lineam rectam servans et *apparatum lingualem* recipiens, in actu manducationis otiosa et interdum infracta. *Lingua*, rudimentaria, propè pharingem recondita, labori manducationis immediatè inepta, sed appendicibus suis mediatè laborans. *Appendices linguae* quatuor, conformes, a maxillâ remotae, elongatae, subfiliformes, in latere interno longitudinaliter excavatae; exteriores duo, interiores vaginantes; cunctae, apparatum unicum conjunctim efficientes apice armatum in solidis introducendum et in totâ longitudine satis dilatandum ad verum canalem manducatorium extra os efformandum. *Appendices supra-maxillares*, immobiles et utrinque cum genis et cum clypeo suturâ simplici arctè connexi. — *Hemiptera*, Lin. Latr. - *Rhyngota*, Fab. - *Rhynchota*, Burm.)

21 15 . . . . . * ECTRAMOGLOSSATA, *maxillâ inferiore* conspicuâ inarticulata. — *ORDO QUARTUS* . . . . ANTLIOGNATHA, m.

(*Maxilla* basi tubulosa et *apparatum lingualem* includens, valdè protractilis et in actû manducationis non quiescens, *appendicibus quatuor* difformibus suffulta: primi duo basilares liberi mobiles et antennaeformes; alteri, terminales carnosi et sublabriformes. *Lingua* et *apparatus lingualis* ut in *Arthroidignathis*. *Appendices supra-maxillares*, nulli vel inconspicui. (*Diptera*, Lin. Latr. - *Antliata*, Fab.)

22 16 . . . . . * ECTRAMOGLOSSATA, *maxillâ inferiore* parvâ ac vix conspicuâ. — *ORDO QUINTUS* . . . . MICROGNATHA, m.

(*Maxilla* inferior minima, cum *linguâ* confusa et cum ipsâ in actû manducationis, ferè otiosa: *Appendices linguae* quatuor, difformes: *exteriores* duo propè basin a latere externo aliorum prodeuntes, liberi mobiles articulati et antennaeformes: *interiores*, maximi et validissimi, in quiete in spiralem involuti, in actu manducationis longè protractiles, speciem proboscidis conjunctim simulantes, in latere interno profundè excavati et canalem manducatorium extra os etiam conjunctim efformantes. *Appendices supra-maxillares*, liberi, fortè mobiles, sed parvitate sejuncti et debilitate inutiles. — *Lepidoptera*, Lin. Latr. - *Glossata*, Fab.)

23 20 22-35 ARTHROIDIGNATA, capite sub-horizontali, nec retrorsum, nec deorsum reflexo. *Oris apertura*, in extremitate corporis anteriore. — *SUB-ORDO PRIMUS* . . PROSTOMOPHORA, m.

24 20 36-46 ARTHROIDIGNATA, capite plus minusve deorsum ac retrorsum reflexo. *Apertura oris* sive *canalis manducatorii*, a capitis vertice, idest, ab apice corporis plus minusve remotâ. — *SUB-ORDO SECUNDUS* . . . . . . HYPOSTOMOPHORA, m.

25 24 27-30 PROSTOMOPHORA, maxillâ articulis quatuor visibiliter instructâ. — *TRIBUS PRIMA* . . . . TETRATOMOGNATHA, m.

26 24 31-37 PROSTOMOPHORA, maxillâ articulis tribus conspicuis tantummodo instructâ. — *TRIBUS SECUNDA* . . . . TRITOMOGNATHA, m.

27 25 47-30 TETRATOMOGNATHA, capitis paginâ superiore ab inferiore abruptè separata: *capite* marginato, margine vel rotundato incrassato vel carinato. — *FAMILIA* 1ª . PENTATOMITAE.

28 26 231-57 TETRATOMOGNATHA, capite immarginato, paginâ superiore ab inferiore non abruptè separatâ. *Antennarum origo*, in paginâ inferiore capitis, id est, sub rectâ a centro oculorum ad apicem capitis ductâ. — *FAMILIA* 2ª. LYGEITAE.

29 25 258-355 TETRATOMOGNATHA, capite immarginato: *origine antennarum*, in paginâ superiore, id est, neutiquam sub rectâ a centro oculorum ad apicem capitis ductâ: *alis anterioribus* bipartitis. — *FAMILIA* 3ª . . . . COREITAE.

30 25 356-68 TETRATOMOGNATHA, capite immarginato, *origine antennarum* neutiquam sub rectâ a centro oculorum ad apicem capitis ductâ, *alis anterioribus* tripartitis. — *FAMILIA* 4ª. CAPSITAE.

31 26 369-76 TRITOMOGNATHA, *canali infero*, id est, canale medio paginae inferiori corporis refugium praestante maxillae

			inferiori quiescenti, sub capite saltem decurrente et saepe sub pectore producto: *pedibus* anticis, neutiquam raptoriis; *prothoracis dorso*, posticè ultrà metathoracem producto et scutellum obtegente. — *FAMILIA* 5ª.	Tingiditae.
32	26	377-87	TRITOMOGNATHA, *canali infero* sub capite saltem decurrente, *pedibus anticis* non raptoriis, *scutello* detecto. — *FAMILIA* 6ª	Araditae.
33	26	388-bis	TRITOMOGNATHA, *canali infero* sub capite saltem decurrente, *pedibus anticis* raptoriis, chelis duabus femoribus tibiisque ejusdem paris conjunctim efformatis. — *FAMILIA* 7ª	Phymatitae.
34	27	389-460	TRITOMOGNATHA, *canali infero* obliterato, *maxillâ* quiescente ab ipsâ origine admodum liberâ, *pedibus* gressoriis. — *FAMILIA* 8ª	Reduvitae.
35	27	461-71	TRITOMOGNATHA, *canali infero* obliterato, *maxillâ* quiescente ab origine liberâ, *pedibus* natatoriis. — *FAMILIA* 9ª	Hydrocorisiae.
36	24	40-41	HYPOSTOMOPHORA, *capite* deorsum inflexo sed non retrorsum reflexo, *fronte* ferè verticali. — *TRIBUS TERTIA* .	Hybridae.
37	24	42	HYPOSTOMOPHORA, *capite* aequè retrorsum ac deorsum reflexo, *fronte* inferâ et ferè horizontali, *pedibus* natatoriis. — *TRIBUS QUARTA*	Aquicolae.
38	24	43-46	HYPOSTOMOPHORA, *capite* aequè retrorsum ac deorsum reflexo, *fronte* inferâ et ferè horizontali, *pedibus* gressoriis, *antennis* inferis, id est, insertis in parte genarum deorsum inflexâ. — *TRIBUS QUINTA*	Hypocephalocera, in.
39	24	. . . . .	* HYPOSTOMOPHORA, *capite* aequè retrorsum ac deorsum inflexo, *fronte* inferâ et ferè horizontali, *pedibus* gressoriis, *antennis* superis, id est, insertis in parte capitis usque adhuc non inflexâ. — *TRIBUS SEXTA* .	Apocephalocera.
40	36	472-75	HYBRIDAE, *pedibus* non raptoriis et formae consuetae. — *FAMILIA* 10ª	Pelegonitae.
41	36	476-76*bis*	HYBRIDAE, *pedibus* raptoriis. — *FAMILIA* 11ª	Galgulitae.
42	37	477-87	AQUICOLAE. (Familia unica). — *FAMILIA* 12ª. . . .	Notonectitae.
43	38	488-89	HYPOCEPHALOCERA, *ocellis* tribus. — *FAMILIA* 13ª . .	Cicaditae.
44	38	490-561	HYPOCEPHALOCERA, *ocellis* vel nullis vel tantum duobus, *genis* a fronte separatis suturâ costaeformi vel carenaeformi. — *FAMILIA* 14ª	Fulgoritae.
45	38	568-615	HYPOCEPHALOCERA, *ocellis* aut nullis aut tantum duobus, *genis* a fronte separatis suturâ excavatâ et sulciformi, *parte posteriore et superiore capitis* a margine postico sensim obliquè declivi. — *FAMILIA* 15ª	Centrotitae.
46	38	616-95	HYPOCEPHALOCERA, *ocellis* aut nullis aut tantum duobus, *genis* a fronte separatis suturâ excavatâ et sulciformi, *parte posteriore ac superiore capitis* plus minusve convexâ, sed semper horizontali. — *FAMILIA* 16ª. . .	Tettigonitae.

47	27	48-72	PENTATOMITAE, *alarum superiorum parte coriaceá* ultra cubitum intùs non extensâ. — *SUBFAMILIA* 1ª	SCUTELLEROIDEAE.
48	47	49-50	SCUTELLEROIDEAE, *canalis inferi parietibus elevatis* sub pectore decurrentibus et ad ultimum abdominis segmentum stigmatiferum usque productis	1. G. ELVISURA, m.
49	48	. . . . .	———————, *canalis inferi parietibus* ultrà posticum metasterni marginem productis . . (*G. Caeloglossa*, Gr.)	2. G. SOLENOSTHEDIUM, m.
50	48	. . . . .	———————, *canalis inferi parietibus elevatis* ultrà posticum capitis marginem neutiquam productis.	
51	50	57-64	———————, *prosterni margine antico* bilobo, lobis anticè prominulis antennarum originem in quiete obtegentibus: *genis*, fronte longioribus.	
52	51	. . . . .	———————, *genis*, ultra frontem coalitis (*G. Psacasta*, Gr.)	3. G. TETYRA, Fab.
53	51	. . . . .	———————, *genis*, ultra frontem sejunctis (*G. Bellocoris*, Hn.)	4. G. EURYGASTER, Lap.
54	50	. . . . .	———————, *prosterni margine antico* bilobo, lobis anticè promiaulis antennarum originem in quiete obtegentibus: *genis*, fronte brevioribus	5. G. ODONTOTARSUS, Lap.
55	50	. . . . .	———————, *prosterni margine antico* nec bilobo nec antennarum originem obtegente.	
56	55	57-62	———————, *genis*, fronte longioribus.	
56 *bis*	. . . .	59-bis	———————, *oculis*, sessilibus.	
57	56	. . . . .	———————, *prosterni margine antico* sub capitis medio plus minusve producto . . . (*G. Ventocoris*, Hn.)	6. G. TRIGONOSOMA, Lap.
58	56	59-62	———————, *prosterni margine antico* sub capitis medio neutiquam producto.	
59	58	. . . . .	———————, *genis*, fronte latioribus . . (*G. Canopus*, Lap. - *G. Thyreocoris*, Burm.)	7. G. PLATASPIS, Westw.
59 *bis*	56 *bis*	. . . . .	———————, *oculis*, pedunculatis . . .	7. *bis* G. CATERNAULTIELLA, m. Species inedita e Guineâ.
60	58	61-62	———————, *genis*, vix latitudinis frontis.	
61	60	. . . . .	———————, *alarum superiorum parte coriaceá* coarctatâ sub-lineari, radio cubitùque sub parallelis, *scutello* rotundato . . . . . (*G. Globocoris*, Hn. - *G. Tyreocoris*, Burm.)	8. G. COPTOSOMA, Lap.
62	60	. . . . .	———————, *alarum superiorum parte coriaceá* latiore triangulari, radio cubitùque ab origine divergentibus, *scutello* posticè coarctato acuminato . . . . (*G. Trigonosoma*, Burm. - *G. Ancyrosoma*, A. S.)	9. G. GRAPHOSOMA, Lap.

63	55	64-71	SCUTELLEROIDEAE, *genis*, aut fronte brevioribus aut vix longitudinis frontis.	
64	63	. . . . .	————————, *ventre* concavo, in cavitate pedes quiescentes occultante et super solum immediatae stationis capace	10. G. CANOPUS, Fab.
65	64	66-71	————————, *ventre* convexo pedes quiescentes neutiquam occultante et super solum immediatae stationis incapace.	
66	65	. . . . .	————————, *pedibus*, spinis plurimis armatis. (*G. Ursocoris*, Hn. - *G. Arctocoris*, Gr. - *G. Odontoscelis* et *Tyreocoris*, m. olim. - *G. Tyreocoris*, Lap. - *G. Coreomelas*, *White*. - *G. G. Coreomelas*, *Galgupha* et *Odontoscelis*. A. S.)	11. G. ODONTOSCELIS, Lap.
67	65	68-71	————————, *pedibus*, muticis.	
68	67	. . . . .	————————, *maxillâ inferiore*, metasterni marginem posticum non superante . . . . (*G. Pettophora*, Burm. - *G. Callidea*, Lap. - *G. Scutiphora*, Guer. - *G. Hotea* et *Captochilus*. A. S.)	12. G. PACHYCORIS, Burm.
69	67	70-71	————————, *maxillâ inferiore*, plus minusve sub ventre productâ.	
70	69	. . . . .	————————, *antennis* quadriarticulatis . . (*G. Calliphora*, Gr. - *G. Cantao*, *Galostha* et *Eucoryses*. A. S.)	13. G. SCUTELLERA, Lam.
71	69	. . . . .	————————, *antennis*, triarticulatis . . .	14. G. AUGOCORIS, Burm.
72	27	73-78	PENTATOMITAE, *alarum parte coriaceâ* ultrà cubitum intùs extensâ et disci partem occupante. *Canalis inferi parietibus* elevatis, ultrà capitis marginem posticum non protensis.	
73	72	79-88	————————, *scutello* rotundato posticè vix coarctato abdomen totum obtegente. *Canali infero*, ut in *Sub-familiâ* praecedente. — *SUB-FAMILIA* 2ª.	PSEUDO-SCUTELLEROIDEAE.
74	72	89-96	————————, *scutello* breviore posticè coarctato acuminato, abdominis apice detecto : *maxillae inferioris articulo basilari* lato, parietibus incrassatis in canali infero non recipiendis, maxillâ quiescente ab origine liberâ. — *SUB-FAMILIA* 3ª . . .	ASOPOIDAE.
75	72	97-118	————————, *scutello*, ut in *Asopoideis*; *maxillâ inferiore* minus crassâ, in canali infero recipiendâ, canalis parietibus elevatis sub pectore nunquam productis: *ventre*, lineâ mediâ sulco exaratâ. — *SUB-FAMILIA* 4ª	HALYSOIDEAE.
76	72	119-54	————————, *lineâ ventris mediâ*, nec sulcatâ, nec concavâ, saepius contra carinatâ: *maxillâ inferiore* brevi et ultrà posticum mesosterni marginem non accedente. Caetera ut in *Halysoideis*. — *SUB-FAMILIA* 5ª	EDESSOIDEAE.
77	72	155-205	————————, *maxillâ inferiore* elongata et ad posticum metasterni marginem saltem accedente :	

			tibiis inermibus ad fodiendum ineptis. Caetera ut in *Edessoideis*. — *SUB-FAMILIA* 6ª	PENTATOMIDEAE.
78	72	208-17	PENTATOMITAE, *tibiis* spinosis fossoriis. Caetera ut in *Pentatomideis*. — *SUB-FAMILIA* 7ª	CYDNOIDEAE.
79	73	80-83	PSEUDO-SCUTELLEROIDEAE, *canali infero* maxillae totius excipiendae capace.	
80	73	81-82	———, *genis*, fronte longioribus.	
81	80	. . . . .	———, *abdominis segmentis quarto et sequentibus* sursùm reflexis, *ano* dorsali . .	15. G. OXYNOTUS, Lap.
82	80	. . . . .	———, *abdominis segmentis posterioribus* neutiquam sursùm reflexis, *ano* apicali.	16. G. PODOPS, Lap.
83	79	. . . . .	———, *genis*, vix frontis longitudinis	17. G. PHYMODERA, G.ʳ
84	73	85-88	PSEUDO-SCUTELLEROIDEAE, *canali infero* ad recipiendam totam maxillam inepto, maxillae articulo basilari crassiore ut in *Sub-familia* tertià (*Asopoideae*), maxillà quiescente ab origine liberâ.	
85	84	. . . . .	———, *ventre* mutico . . .	18. G. DISCOCERA, Lap.
86	84	87-88	———, *ventre* spinoso, spinà e primâ laminà ventrali prodeunte et ultra pedum tertii paris originem anticè productà.	
87	86	. . . . .	———, *tibiis anticis*, compresso-dilatatis lamellaeformibus	19. G. STIRETUS, Lap.
88	86	. . . . .	———, *tibiis anticis*, prismaticis, nec compressis nec dilatatis	20. G. STIRETROSOMA, m.
89	74	90-93	ASOPOIDEAE, *ventre* mutico vel sub-mutico.	
90	89	. . . . .	———, *genis*, fronte longioribus	21. G. PHYLLORCHERIUS, m.
91	89	92-93	———, *genis*, aut fronte brevioribus aut vix frontis longitudinis.	
92	91	. . . . .	———, *tibiis anterioribus* compresso-dilatatis, lamellaeformibus	22. G. ASOPUS, Burm.
			(*G. Cascia* et *Platynopus*, A. S.)	
93	91	. . . . .	———, *tibiis anterioribus* prismaticis . . .	23. G. JALLA, H.ⁿ
			(*G. Arma*, id. - *G. Piezomerus* et *Ricrona*, A. S.)	
94	74	95-96	ASOPOIDEAE, *ventre* spinoso, spinà ventrali ultrà pedum posteriorum originem anticè productà.	
95	94	. . . . .	———, *tibiis anticis*, lamellaeformibus . .	24. G. CORYZORHAPHIS, m.
96	94	. . . . .	———, *tibiis anticis*, prismaticis	25. G. OPLOMUS, m.
			(*G. Arma*, Hn. - *G. Asopus*, Burm. - *G. Catostyrax*, Burm.)	
97	95	. . . . .	HALYSOIDEAE, *antennis* triarculatis	26. G. PHLEA, Encyl.
			(*G. Paracoris*, Hn. - *G. Phleocoris*, Burm.)	
98	75	99-118	———, *antennis* saltem quadriarticulatis.	
99	98	100-107	———, *maxillae inferioris origine*, longe retrò ab origine antennarum remotâ.	
100	99	. . . . .	———, *genis*, sejunctim ultra frontem productis	27. G. SYMPIEZORHINCHUS, m.
			(*G. Rachava*, A. S.)	

101	98	102-103	HALYSOIDEAE, *genis*, ultra frontem conjunctis.	
102	101	.....	———, *exteriore genarum margine*, profundè emarginato . . . . (*G. Sachana*, A. S.)	28. G. Coryplatus, *White.*
103	101	.....	———, *exteriore genarum margine*, integro.	
104	103	105-107	———, *antennis*, quadri-articulatis . . . (*G. Dinocoris*, Burm. - *G. Empicoris*, Hn. et mihi olim.)	29. G. Dinidor, Lap.
105	103	106-107	———, *antennis*, quinque-articulatis.	
106	105	.....	———, *genis*, ultrà frontem rectà coalitis et neutiquam cruciatim implicatis	30. G. Cataulax, m.
107	105	.....	———, *genis*, ultrà frontem liberis et cruciatim implicatis . . . . (*G. Seiocoris*, Burm.)	31. G. Discocephala, Lap.
108	98	109-118	———, *maxillae inferioris* origine sub lineâ transversâ ferè eâdem ac origo antennarum.	
109	108	110-111	———, *antennis*, quadri-articulatis.	
110	109	.....	———, *sulco ventrali*, ultrà segmentum primum non decurrente, antennarum articulis cylindricis, *pedibus* tenuibus cursoriis	32. G. Omyta, m. *Typus* - species inedita e nova Hollandia.
111	108	.....	———, *sulco ventrali* plus minusve ultrà segmentum abdominale primum decurrente. *Antennarum articulis primis*, depresso-dilatatis. *Pedibus* validis gressoriis	33. G. Atelicera, Lap.
112	108	.....	———, *antennis*, quinque-articulatis.	
113	112	114-115	———, *genis*, fronte longioribus.	
114	113	.....	———, *alarum superiorum parte membranaceâ*, reticulatâ, cellulis clausis, rotundatis	34. G. Brochymena, A. S.
115	114	.....	———, *alarum superiorum parte membranaceâ*, neutiquam reticulatâ, cellulis plerisque plus longioribus quam latioribus sub-parallelis posticè apertis . . . . (*G. Gastraulax*, Herr. Sch. - *G. Apodiphya*, *Thelima* et *Mastha*, A. S.)	35. G. Apodiphus, m.
116	112	117-118	———, *genis*, vel fronte brevioribus, vel ejusdem longitudinis.	
117	116	.....	———, *tibiis anticis*, compresso-dilatatis, lamellaeformibus	36. G. Erthesina, m.
118'	116	.....	———, *tibiis anticis*, prismaticis . . . . (*G. Halys. Nevroscia Batycalia*. A. S.)	37. G. Halis, Fab.
119	76	120-121	EDESSOIDEAE, *ventre* armato, spinâ ventrali antrorsum reflexâ et pedum tertii paris originem saltem attingente.	
120	116	.....	———, *antennarum articulo primo*, capitis apicem attingente vel superante	38. G. Oncomeris, Lap.
121	119	.....	———, *antennarum articulo primo*, capitis apicem non attingente	39. G. Platacantha, H. Sch.

122	76	. . . . .	EDESSOIDEAE, *ventre* mutico, protuberantiâ primae laminae ventralis vel nullâ vel inermi, vel antrorsum non reflexâ, vel ad originem pedum tertii paris non accedente.	
123	122	124-33	————, *metasterno* prominulo.	
124	123	125-130	————, *metasterni protuberantiâ*, antice liberâ et sub mesosterno itidem prominulo plus minusve productâ.	
125	124	126-121	————, *protuberantiâ mesosternali*, integrâ.	
126	125	. . . . .	————, *eâdem*, basi horizontaliter depressâ, apice conico-acutâ	40. G. ENCOSTERNUM, m. *Typus* - species inedita o Portu Natal.
127	125	. . . . .	————, *eâdem* utrinque compressâ, apice obtusâ rotundatâ . . . . (*G. Tesseratoma, Mucanum, Eusthenes* et *Hypencha.* A. S.)	41. G. TESSERATOMA, Enc.
128	124	129-130	————, *protuberantiâ mesosternali* emarginatâ.	
129	128	. . . . .	————, *antennis*, quadri-articulatis . .	42. G. PEROMATUS, A. S.
130	129	. . . . .	————, *antennis*, quinque-articulatis . . (Div. 1.ª sinûs emarginaturae mesosternalis angularis acutus. — *G. Edessa, Hypoxis, Pygoda* et *Aceràtode*, A. S.) (Div. 2.ª sinûs emarginaturae mesosternalis, minus profundus et leviter arcuatus. — *G. Brachystethus*, Lap.)	43. G. EDESSA, Fab.
130*bis*	123	130-33	————, *metasterni protuberantiâ*, nec anticè liberâ, nec sub mesosterno productâ.	
130*tres*	129	131-132	————, *mesosterno*, prominulo.	
131	130	. . . . .	————, *protuberantiâ mesosternali*, utrinque compressâ et in laminâ carinatâ sub prosterno prolongatâ	44. G. PLACOSTERUM, A. S.
132	130	. . . . .	————, *eâdem*, neutiquam sub prosterno productâ, costaeformi et subtùs canaliculatâ ad extremitatem maxillae quiescentis recipiendam .	45. G. MATTIPHUS, A. S.
133	129	. . . . .	————, *mesosterno*, neutiquam prominulo, plano vel paulo convexo . . . . (*Myota, Motya, Omyta*, inclyti nominis AMYOT anagrammata faecundissimo polyglotto nosologo reverenter D. D. D. M. Sp.)	46. G. MYOTA, m. *Typus* - species inedita e Brasiliâ.
134	122	. . . . .	————, *metasterno* neutiquam prominulo.	
135	134	136-41	————, *antennarum articulo primo* capitis apicem attingente vel superante.	
136	139	137-38	————, *antennis* quadri-articulatis.	
137	136	. . . . .	————, *alarum superiorum parte membranaceâ* reticulatâ, cellulis clausis diformibus saepius rotundatis vel ovatis	47. G. PYCANUM, A. S.

138	136	. . . . .	EDESSOIDEAE, *alarum superiorum parte membranaceâ* neutiquam reticulatâ, cellulis plerisque plus longioribus quam latioribus sub-parallelis ac posticè apertis	48. G. Cyclopelta, A. S.
139	133	140-41	——————, *antennis* quinque-articulatis.	
140	139	. . . . .	——————, *tarsorum articulo ultimo* appendicibus duobus instructo sub-uncinalibus mollibus ac carnosis	49. G. Spongopodium, m.
			(G. *Aspongopus*, Lap. et A. S.)	
141	139	. . . . .	——————, *tarsorum articulo ultimo* appendicibus sub-uncinalibus destituto	50. G. Aspongopus, Lap.
142	135	143-54	——————, *antennarum articulo primo* capitis apicem haud attingente.	
143	142	. . . . .	——————, *genis*, vix frontis longitudinis . .	51. G. Delegorguella, m.
			(Species plurimae Natalenses, ex itinere D. Delegorgue.)	
144	142	145-54	——————, *genis* fronte longioribus.	
145	144	146-53	——————, *maxillâ inferiore* prosterni marginem posteriorem ultra decurrente et pedum secundi paris originem saltem attingente.	
146	145	147-50	——————, *genis* extùs profundè emarginatis vel bilobatis, lobis foliaceis.	
147	146	. . . . .	——————, *genarum foliolo antero-interno* elongato, lanceolato	52. G. Amaurus, Burm.
148	146	149-50	——————, *earumdem foliolo antero-interno* latiore rotundato.	
149	148	. . . . .	——————, *antennis* quinque-articulatis . .	53. G. Storthia, P.by
			(G. *Dryptocephala*, Lap.)	
150	148	. . . . .	——————, *antennis* quadri-articulatis . . .	54. G. Sagriva, m.
			(Typus, species inedita e Bengalà. *Sagriva*, nomen indicae mythologiae.)	
151	145	152-54	——————, *genis* extùs integris.	
152	150	. . . . .	——————, *iisdem* rectis parallelis: *capite* bifido.	55. G. Schizops, m.
			(G. *Tetroda*, A. S.)	
153	151	. . . . .	——————, *iisdem* arcuatim convergentibus: *capite* rotundato	56. G. Phyllocephala, Lap.
			(G. *Basicryptus*, Herr. Sch. - G. *Phyllocephala*, *Dalsira* et *Diplochirus*, A. S.)	
154	144	. . . . .	——————, *maxillâ inferiore* ultrà pedum primi paris originem haud producendâ	57. G. Megarhinchus, Lap.
			(G. *Marina*, A. S.)	
155	77	156-65	PENTATOMOIDEAE, ventre spinoso, spinâ e segmento primo exortâ antrorsum porrectâ et pedum posteriorum originem superante.	
156	155	157-60	——————, *metasterno* protuberante.	
157	156	158-59	——————, *tarsis* bi-articulatis.	
158	157	. . . . .	——————, *metasterni protuberantiâ* altius elevatâ spinam ventralem ac mesosternalem protuberantiam intercipiente	58. G. Acanthosoma, Curtis.
			(Typus, *Cimex lituratus*, Fab.)	

159 157 ..... PENTATOMOIDEAE, *metasterni protuberantiâ* minus eminente, spinâ ventrali sub metasterno liberè productâ et mesosterni protuberantiam attingente. 59. G. CLINOCORIS, Fall.
(Typus, *Cimex haemmorohoidalis*, Lin.)

160 156 161-65 ——————, *tarsis* tri-articulatis . . . . 60. G. ARVELIUS, m.

161 155 162-65 ——————, *metasterno* haud protuberante.

162 161 ..... ——————, *tibiarum anteriorum costâ exteriore* compresso-dilatatâ lamellaeformi . . . 61. G. CATACANTHUS, m.

163 161 ..... ——————, *tibiarum posteriorum costâ exteriore*, formae consuetae, tibiis prismaticis.

164 163 ..... ——————, *genis* vix frontis longitudinis . 62. G. RHAPHIGASTER, Lap.
(*G. Raphigaster* et *Vussireae*, m. olim.)

165 163 ..... ——————, *genis* fronte longioribus . . 63. G. THOREYELLA, m.
(Typus, species inedita, e Brasilia, D. Thorey.)

166 77 167-211 PENTATOMOIDEAE, *ventre* mutico, spinâ ventrali aut nullâ aut pedum posteriorum originem haud attingente.

167 166 168-73 ——————, *metasterno* protuberante.

168 167 ..... ——————, *metasterni protuberantiâ* compresso-lamellosâ in medio carinatâ . . . . 64. G. TAUSOCERUS, A. S.
(*Arvelius edessoides*, m. olim.)

169 168 170-73 ——————, *metasterni protuberantiâ* haud compressâ, latiore convexiusculâ.

170 169 ..... ——————, *mesosterno protuberante*, protuberantiâ compressâ lamellaeformi sub prosterno liberè productâ . . . . 65. G. HOFFMANSEGGIELLA, m.
(Species inedita, ex Indiâ, a D. de Hoffmansegg.)

171 169 172-73 ——————, *mesosterno* haud abruptè protuberante aut deplanato aut uniformiter convexo.

172 170 ..... ——————, *alarum superiorum parte membranaceâ* reticulatâ, cellulis clausis difformibus : *genis* ante frontem haud conjunctis, capitis margine anteriore emarginato . . . . 66. G. EVOPLITUS, A. S.
(*Arvelius laciniatus*, m. olim.)

173 170 ..... ——————, *alarum superiorum parte membranaceâ* haud reticulatâ, cellulis longioribus sub-parallelis posticè apertis: *genis* ante frontem conjunctis, capitis margine anteriore rotundato . 67. G. PLATENCHA, m.
(Species inedita, e Brasilia.)

174 166 167-211 ——————, *metasterno* haud protuberante, deplanato.

175 174 176-83 ——————, *maxillae inferioris articulo primo* capitis marginem posteriorum superante et plus minusve sub prosterno in quiete protenso.

176 175 177-78 ——————, *genis* vix frontis longitudinis.

177 176 ..... ——————, *alarum superiorum parte membranaceâ*, consuetae magnitudinis, laevi translucidâ, cellulis longioribus sub parallelis posticè apertis . . . . 68. G. OCHLERUS, m.

178	176	.....	PENTATOMOIDEAE, *alarum superiorum parte membranaceâ*, parvâ rudimentariâ, opacâ, rugosâ, nervis tortuosis, cellulis difformibus confusis . . . . (Species inedita, e nova Hollandiâ.)	69. G. Hypocomphus, m.
179	175	180-81	————————, *genis* fronte longioribus.	
180	179	181-82	————————, *ocellis alis inferioribus* manifestè conspicuis.	
181	180	.....	————————, *oculis* in posterioribus capitis angulis, istis obtusè rotundatis	70. G. Macropygium, m.
182	180	.....	————————, *iisdem* ab angulis posterioribus capitis visibiliter remotis, istis acutis prominulis . (Species inedita, e Brasiliâ.)	71. G. Audinetella, m.
183	179	.....	————————, *ocellis* nullis: *alis inferioribus* rudimentariis ac volatui ineptis	72. G. Diemenia, m.
			(Species inedita, e Van-Diemen.)	
184	175	185-211	————————, *maxillae inferioris articulo primo* caput baud superante et sub prosterno neutiquam protenso.	
185	184	186-200	————————, *genis* fronte longioribus.	
186	185	186-91	————————, *iisdem* rotundatis ante frontem conjunctis, capitis margine anteriore integro.	
187	186	.....	————————, *alarum superiorum parte membranaceâ*, cellulis paucis magnis difformibus clausis . (*G. Dorydores*, A. S. - *G. Sciocoris*, Burm.)	73. G. Dyrodores, m.
188	186	189-94	————————, *alarum superiorum parte membranaceâ*, cellulis plurimis longioribus sub-parallelis posticè apertis.	
189	188	190-93	————————, *capitis paginâ superiore* planâ vel concavâ sub-horizontali.	
190	189	.....	————————, *antennis filiformibus*, articulis ultimis nec incrassatis nec dilatatis	74. G. Eurydema, Lap.
191	189	192-93	————————, *antennarum articulis duobus ultimis* majoribus, aut incrassatis aut depresso-dilatatis.	
192	190	.....	————————, *genis* extùs laciniatis, antennarum articulis ultimis depresso-dilatatis . . . . . . (*G. Stenotoma*, Westw.)	75. G. Phricodus, m.
193	191	.....	————————, *genis* extùs rotundatis integris, antennarum articulis ultimis crassioribus . . .	76. G. Sciocoris, Fall.
194	188	.....	————————, *capitis paginâ superiore* convexâ et anticè declive	77. G. Cysarcoris, H.
195	185	.....	————————, *genis*, ante frontem separatim rotundatis, capitis margine anteriore bilobo . . .	78. G. Galadanta, A. S.
196	185	.....	————————, *iisdem*, ante frontem fissurâ rectâ horizontali separatis, apice acutis, capitis margine anteriore angulatim emarginato . . . . (Species inedita, e nova Hollandiâ.)	79. G. Orthoschisops, m.
197	185	198-99	————————, *iisdem* ultra frontem rectâ conjunctim productis, capitis margine anteriore angulato acuto.	

198	197	.....	PENTATOMOIDEAE, *capitis paginâ superiore* convexâ et anticè declive	80. G. AELIA, Fab.
199	197	.....	————, *eâdem* planâ, vix concavâ, sub-horizontale. . . . . (*Aelia lanceolata*, Fab)	81. G. ACOLOBA, m.
200	185	.....	————, *genis* ante frontem immediatè conjunctis, apice separatim attenuatis, capitis margine anteriore bifido . . . . (*G. Dichelops*, A. S.)	82. G. DIACUS, m.
201	184	202-11	————, *genis* haud fronte longioribus.	
202	201	203-10	————, *iisdem* vix frontis longitudinis, capitis margine anteriore aut recto truncato aut laeviter arcuato.	
203	202	.....	————, *antennis* quadri-articulatis . .	83. G. EPIPEDUS, m.
204	203	205-10	————, *antennis* quinque-articulatis.	
205	204	206-7	————, *tibiis* cylindricis.	
206	205	.....	————, *tarsis* bi-articulatis . . . . . (Species chilenses, ex itinere D. Gay.)	84. G. DITOMOTARSUS, m.
207	205	.....	————, *tarsis* tri-articulatis	85. G. AGMOSCELIS, m.
208	204	209-10	————, *tibiis* prismaticis triedris.	
209	208	.....	————, *alarum superiorum parte membranaceâ* reticulatâ, cellulis clausis rotundatis . . .	86. G. HYMEÑARCIS, A. S.
210	208	.....	————, *alarum superiorum parte membranaceâ* haud reticulatâ, cellulis plurimis longioribus sub-parallelis posticè apertis . . . . (*G. Cimex*, Fab. - *G. Strachia*, Hn. - *G. Arocera*, m. - *G. Mormidea*, *Nezara*, *Aedosoma*, A. S.)	87. G. PENTATOMA, Oliv.
211	201	.....	————, *genis* fronte valdè brevioribus, fronte acuminatâ spinaeformi	88. G. PROXIS, m.
212	78	207-218	CYDNOIDEAE, *oculis* nullis vel inconspicuis . . .	89. G. CEPHALOCTEUS, L. Duf.
213	78	.....	————, *iisdem* plus minusve conspicuis.	
214	213	.....	————, *iisdem* partim vertice coopertis . .	90. G. AMBLYOTUS, A. S.
215	213	.....	————, *iisdem*, capitis margine laterali inclusis.	91. G. HYPERAS, A. S.
216	213	217-18	————, *iisdem* prorsùs detectis.	
217	216	.....	————, *tibiis anticis* arcuatis unciniformibus .	92. G. SCAPTOCORIS, K.by
218	216	.....	————, *tibiis anticis* depressis dilatatis . . . (*G. Brachypelta*, *Cyrtomerus*, A. S.)	93. G. CYDNUS, Fab.
219	216	220-23	————, *tibiis anticis* rectis prismaticis.	
220	219	221-22	————, *scutello* triangulare.	
221	220	.....	————, *alarum superiorum parte membranaceâ*, cellulis plurimis longioribus sub-parallelis posticè apertis . . . . (*G. Schizops*, A. S.)	94. G. TRITOMEGAS, A. S.
222	220	.....	————, *alarum superiorum parte membranaceâ* reticulatâ, cellulis rotundatis.	95. G. DISMEGISTUS, A. S
223	219	.....	————, *scutello* rotundato	96. G. PODODUS, A. S.

224	27	225-230	PENTATOMITAE, *canalis inferi parietibus elevatis* sub pectore prolungatis et saltem pedum intermediorum originem attingentibus. — *SUB-FAMILIA* 8ª . .	MEGYMENOIDEAE.
225	224	226-27	MEGYMENOIDEAE, *genis* fronte longioribus et ante frontem conjunctis.	
226	225	.....	—————, *maxillà inferiore* pedum intermediorum originem haud superante . . . . . . (*G. Amaurus*, Burm.)	97. G. MEGYMENUM, Guer.
227	225	.....	—————, *maxillà inferiore* ad extremitatem posteriorem metasterni perveniente . . . . . (Species inedita, e Promontorio bonae spei, a D. Drege.)	98. G. HYPAULACUS, m.
228	224	229-30	MEGYMENOIDEAE, *genis* frontem longitudine aequantibus.	
229	228	.....	—————, *canali infero* metasternum totum decurrente posticè aperto, ventris segmentis anterioribus in medio concavis . . . . (Species inedita, e Caffriâ, D. Delegorgue.)	99. G. AESCHRUS, m.
230	228	.....	—————, *canali infero* posticè clauso, ventre uniformiter convexo . . . . (Species inedita, e Promontorio bonae spei, a D. Drege.)	100. G. TYOMA, m.
231	28	232-56	LYGAEITAE, *oculis* lateralibus, rotundatis.	
232	231	233-55	—————, *iisdem* sessilibus.	
233	232	234-37	—————, *femoribus anterioribus* incrassatis.	
234	233	235-36	—————, *genis* aut frontis longitudinis, aut fronte brevioribus.	
235	234	.....	—————, *antennarum articulis duobus ultimis* tenuioribus setaeformibus	101. G. XYLOCORIS, L. Duf.
236	234	.....	—————, *antennarum articulis duobus ultimis* alios saltem crassitudine aequantibus	102. G. ANTHOCORIS, Fall.
237	232	.....	—————, *genis* fronte longioribus . . . . . (*G. Aphanus*, Lap. - *G. Platygaster*, Schill. - *G. Plociomerus*, Say. - *G. Rhyparochroma*, Curtis. - *G. Stenogaster*, Herr. Sch. - *G. Polyacanthus, Beosus, Pterotmetus*, A. S.)	103. G. PACHYMERUS, Enc.
238	232	239-	—————, *femoribus anterioribus* haud incrassatis.	
239	238	239-41	—————, *vertice* trapezoideo posticè attenuato.	
240	239	.....	—————, *canalis inferi parietibus elevatis* ad posteriorem capitis marginem usque productis . .	104. G. NIESTHREA, m.
241	239	.....	—————, *canalis inferi parietibus elevatis* originem propè obliteratis. . . . . (*G. Leptocoris*, Hn.)	105. G. SERINETHA, m.
242	238	243-3	—————, *vertice* transversim rectangulare neutiquam posticè attenuato.	
243	242	.....	—————, *maxillae inferioris articulo primo* sub pectore haud producendo et in canali infero toto recondendo.	
244	243	245-46	—————, *antennarum articulis intermediis* 2° *et* 3° tenuioribus.	

245	244	247-247	LYGAEITAE, *canali infero* sub pectore obsoleto . . (*G. Artheneis, Div.* 1° m. olim.)	106. G. HETEROGASTER, Scb.
246	244	. . . . .	————, *canali infero* originem pedum tertii paris superante . . . . (*G. Artheneis, Div.* 2° m. olim.)	107. G. ARTHENEIS, m.
247	243	248-49	————, *antennarum articulis omnibus* crassitudine subaequalibus.	
248	247	. . . . .	————, *ocellis* inter se distantibus ac oculis propioribus	108. G. LYGAEOSOMA, m.
249	247	. . . . .	————, *iisdem* inter se adproximatis et ab oculis magis remotis	109. G. AROCATUS, m.
250	243	254-55	————, *maxillae inferioris articulo primo* sub pectore producendo et partim liberè quiescente.	
251	253	. . . . .	————, *antennarum articulis tribus ultimis* crassitudine aequalibus	110. G. LYGAEUS, Fab.
252	253	. . . . .	————, *iisdem* inaequalibus, ultimo sine quarto crassiore	111. G. CYMUS, Hⁿ
253	231	. . . . .	————, *oculis* pedunculatis	112. G. HENESTARIS, m.
254	28	. . . . .	LYGAEITAE, *oculis* obliquè transversis in posterioribus angulis capitis . . . . (*G. Geocoris*, Fallen. - *G. Ophthalmicus*, Schill.)	113. G. SALDA, Fab.
255	29	263-68	COREITAE, *ocellis* nullis. — *SUB-FAMILIA* 1ª. . . (Insecta terrestria.)	ASTEMMOIDEAE.
256	29	. . . . .	————, *ocellis duobus* conspicuis, *mesothoracis dorso* detecto. — *SUB-FAMILIA* 2ª . . . . . (Insecta terrestria.)	CIMICOIDEAE.
257	29	. . . . .	————, *ocellis duobus* conspicuis, *prothoracis dorso* mesothoracem plus minusve obtegente, *maxillâ inferiore* tenui elongatâ et in quiete pedum intermediorum originem superante. — *SUB-FAMILIA* 3ª. (Insecta terrestria.)	ANISOSCELOIDEAE.
258	29	. . . . .	————, *ocellis duobus* conspicuis, *prothoracis dorso* partim mesothoracem obtegente, *maxillâ inferiore* crassâ ac breviore nunquam pedum intermediorum originem superante. — *SUB-FAMILIA* 4ª . (Insecta terrestria.)	COREIDEAE.
259	29	. . . . .	————, *ventre* deplanato, corporis lineâ inferomediâ ferè in totâ longitudine haud interruptè rectâ horizontali. — *SUB-FAMILIA* 5ª . . . (Insecta aquatica.)	GERROIDEAE.
260	258	. . . . .	ASTEMMOIDEAE, *antennarum articulo primo* capite prothoraceque unâ longiore . . . . (*G. Macroceraea*, m. olim. - *G. Lotrita*, A. S.)	114. G. MACROCHERAIA, Lef.
261	253	265-2	ASTEMMOIDEAE, *antennarum articulo primo* capite prothoraceque unâ breviore.	
262	264	266-67	————, *maxillâ inferiore* in quiete sub mesosterno decurrente.	

263	265	.....	ASTEMMOIDEAE, *oculis* sessilibus . . . . (*G. Odontopus*, Lap. - *G. Physopelta*, *Dysdercus*, A. S.)	115. G. Pyrrhocoris, Fall.
264	265	.....	————, *iisdem* pedunculatis	116. G. Ectatops, A. S.
265	264	269-72	————, *maxillâ inferiore* quiescente prosternum haud superante.	
266	268	270-71	————, *oculis* sessilibus.	
267	269	.....	————, *pedibus anterioribus* raptoriis, chelis singulis tibiâ femoreque conjunctim efformatis . (Species inedita chilensis, ex itinere D. Gay.) .	117. G. Astemmoplitus, m.
268	269	.....	————, *pedibus anterioribus* formae consuetae, chelis nullis . . . . (*G. Platynotus*, Schill. - *G. Pyrrhocoris*, A. S.)	118. G. Astemma, Brullé.
269	268	.....	————, *oculis* pedunculatis. . . . . . . (*G. Euryophthalmus*, Lap. - *G. Acinocoris*, Hn. - *G. Astemma*, A. S.)	119. G. Largus, H.[n]
270	259	.....	CIMICOIDEAE, genus unicum . . . . (Individua aptera nobis cognita forte non perfectè evoluta. Sub-familia haec delenda et genus unicum rectius *Anisosceloideis* associandum, cum individua alata inveniantur.)	120. G. Cimex, Lin.
270	259	274-81	ANISOSCELOIDEAE, *antennarum articulo ultimo* ovoideo, crassiore ac penultimo breviore.	
271	273	.....	————, *femoribus posticis* elongatis et abruptè clavatis.	121. G. Clavigralla, m.
272	273	276-81	————, *femoribus posticis*, formae consuetae.	
273	275	277-80	————, *genis* fronte brevioribus, capite sub-triangulare.	
274	276	.....	————, *maxillae inferioris*, reverâ quadri-articulatae, *articulo primo* minore et partim recondito . . . . (*G. Aptus*, Hn.)	122. G. Nabis, Latr.
275	276	279-80	————, *maxillae inferioris articulo primo* prorsùs detecto et magnitudinis normalis.	
276	278	.....	————, *alarum superiorum parte coriaceâ*, nervis longitudinalibus praecipuis et praesertim radio cubitù post-cubitûque distinctè elevato-costatis . . . . (*G. Gonocerus*, Lap. - *G. Corixus*, *Harmostes*, Burm. - *G. Rhopalus*, Fall. - *G. Therapha*, A. S.)	123. G. Merocoris, K.[by]
277	278	.....	————, *alarum superiorum nervis longitudinalibus cunctis* depressis obsoletis aegrè discernendis	124. G. Cymodema, m.
278	275	.....	————, *genis* frontis longitudinis, *capite* anticè rectâ truncato . . . . (*G. Craspedum*, Thunb. - *G. Pephricus*, A. S.)	125. G. Phyllomorpha, Lap.
279	259	283-	ANISOSCELOIDEAE, *antennarum articulo primo* subcylindrico, saltem praecedenti aequali, saepius longiore.	

280	282	284-85	ANISOSCELOIDEAE, *tibiis tertii paris* depressis dilatatis, lamellosis aut foliaceis.	
281	283	. . . . .	——————, *femoribus ejusdem paris*, tenuibus sub-cylindricis	126. G. DIACTOR, P.ty
282	283	. . . . .	——————, *iisdem* plus minusve incrassatis.	127. G. ANISOSCELIS, Latr.
283	282	287-94	——————, *tibiis tertii paris*, formae consuetae.	
284	286	288-92	——————, *antennarum articulis intermediis* 2° *et* 3°, depressis dilatatis	128. G. COPIUS, Thunb.
			(G. *Holhymenia*, Encycl.)	
285	286	289-92	——————, *iisdem*, formae consuetae.	
286	288	. . . . .	——————, *femoribus posticis* incrassatis .	129. G. ALYDUS, Fab.
287	288	291-92	——————, *iisdem* haud incrassatis.	
288	290	. . . . .	——————, *vertice* longissimo, posticè attenuato collum filiforme simulante ponè oculos abruptè rotundato-dilatato	130. G. MYODOCHA, A. S.
			(Tÿpus, *Myodochus serripes*, Oliv. - An *G. Myodocha*, Latr. ?)	
289	290	. . . . .	——————, *vertice* trapezoideo anticè latiore haud collariforme.	
290	286	. . . . .	——————, *antennarum origine* capitis apice proximâ et ab oculis remotiore	131. G. HYPSELONOTUS, Hn.
			(G. *Zicca*, A. S.)	
291	292	. . . . .	——————, *antennarum origine* a capitis apice et ab oculis aequè distante	132. G. LEPTOSCELIS, Lap.
292	261	. . . . .	COREIDEAE, *femoribus posticis* abruptè clavatis ac intùs canaliculatis ad tibias quiescentes excipiendas .	133. G. CORYNOMERUS, m.
293	261	297-	COREIDEAE, *femoribus posticis* nec clavatis nec canaliculatis.	
294	296	298-309	——————, *coxis posticis* longissimis, *cavitatum coxalium perimetro* maximè incrassato protuberante.	
295	297	299-308	——————, *cavitatibus coxalibus* trium parium sub eadem lineâ longitudinali utrinque dispositis.	
296	298	300-303	——————, *antennarum articulo tertio* nec depresso, nec dilatato, formae consuetae.	
297	299	301-302	——————, *tibiis posticis* valdè compressis, saepius dilatatis, laminatis aut foliaceis.	
298	300	. . . . .	——————, *tibiis anticis* depressis, dilatatis, denticulatis	134. G. CRINOCERUS, Burm.
299	300	. . . . .	——————, *iisdem* formae consuetae	135. G. ARCHIMERUS, Burm.
			(G. *Cerbus*, Hn. - G. *Pachymerus*, Lap. - G. *Mictis*, A. S.)	
300	299	. . . . .	——————, *tibiis posticis* formae consuetae . . .	136. G. MICTIS, Leach.
			(G. *Hymeniphere*, *Camptischuim*, *Acantharis*, *Machtima*, A. S.)	
301	298	305-308	——————, *antennarum articulo tertio* depresso-dilatato.	
302	304	. . . . .	——————, *genis* fronte brevioribus	137. G. SPATHOPHORA, A. S.
			(G. *Melucha*, A. S. - G. *Physomerus*, m. olim.)	

303	302	304-305	COREIDEAE, *iisdem* fronte longioribus.	
304	303	.....	———, *antennarum articulo quarto* sub-cylindrico et saltem praecedentem longitudine aequante	138. G. Pachylis, Encycl.
305	303	.....	———, *antennarum articulo quarto* breve ovato, *tertio* longiore sub-cylindrico	139. G. Golema, A. S.
306	297	.....	———, *cavitatibus coxalibus tertii paris* multo magis inter se distantibus	140. G. Meropachus, Lap.
307	296	308-46	———, *coxis posticis*, consuetae magnitudinis: *cavitatum coxalium perimetro* haud incrassato.	
308	307	.....	———, *genis* ante frontem conjunctis separatim acuminatis: *capitis apice* bifido . . . . (*G. Dicranomerus*, Hn.)	141. G. Stenocephalus, Lap.
309	307	310-27	———, *genis* aut frontis longitudinis aut paulo longioribus, sed nunquam ante frontem conjunctis: *capite* ferè quadrato.	
310	309	.....	———, *pedibus anterioribus* cheligeris raptoriis: *fronte* genis ferè duplo latiore . . . . (Typus, species inedita e Natala, ex itinere D. Delegorgue.)	142. G. Pachygroncha, m.
311	309	312-27	———, *pedibus anterioribus* haud raptoriis et formae consuetae: *genis* saltem latitudinis frontis.	
312	311	312-16	———, *femoribus posticis* valdè incrassatis.	
313	312	.....	———, *antennarum articulis intermediis* 3° *et* 4° crassis prismaticis	143. G. Prismatocerus, A. S.
314	312	315-16	———, *iisdem* tenuioribus sub-cylindricis.	
315	314	.....	———, *tibiis posticis* depressis dilatatis foliaceis	144. G. Derepterix, White.
316	314	.....	———, *iisdem*, formae consuetae . . . . (Species inedita, ex Am. Sept.)	145. G. Whitella, m.
317	311	318-27	———, *femoribus omnibus* pariter validis.	
318	317	.....	———, *antennarum articulo tertio* depresso dilatato spathulaeformi	146. G. Chariesterus, Lap.
319	311	320-27	———, *antennarum articulis* 2° *et* 3° conformibus, nec depressis, nec dilatatis.	
320	319	323-24	———, *antennis* corpore brevioribus, articulis tribus ultimis diametro subaequalibus.	
321	320	.....	———, *maxillâ inferiore* pedum intermediorum originem haud attingente . . . . . . (*G. Coreocoris*, Hn. - *G. Menenotus*, Lap. - *G. Sephina*, A. S.)	147. G. Spartocera, Lap.
322	320	.....	———, *maxillâ inferiore* pedum intermediorum originem superante	148. G. Homoeocerus, Burm.
323	319	324-27	———, *antennis*, saltem corporis longitudinis, saepius longioribus.	
324	323	.....	———, *tibiis posticis* depressis laminatis . .	149. G. Plaiscelis, m.
325	323	326-27	———, *iisdem* formae consuetae.	
326	325	.....	———, *pedibus* gressoriis, validis, mediae magnitudinis	150. G. Nyttum, m.

327	325	. . . . .	COREIDEAE, *iisdem* cursoriis tenuibus longissimis.	151. G. PARIPHES, A. S.
			(*G. Sundarus*, A. S.)	
328	308	329-33	————, *genis* fronte brevioribus: *capite* triangulari.	
329	328	330-42	————, *fronte* angustà compressà laminaeformi.	
330	330	331-32	————, *femoribus posticis* crassioribus.	
331	330	. . . . .	————, *tibiis posticis* depressis lamellosis aut foliaceis	152. G. METOPODIUS, Westw.
			(*G. Acanthocephala*, Lap. - *G. Mozena*, A. S.)	
332	330	. . . . .	————, *iisdem* formae consuetae	153. G. PETALOPS, A. S.
333	329	. . . . .	————, *femoribus omnibus* pariter validis . .	154. G. VERLUSIA, m.
334	328	335-46	————, *fronte* minus angustâ, planâ, neutiquam laminaeformi.	
335	334	. . . . .	————, *prothoracis dorso* horizontali, corpore supra deplanato	155. G. DISCOGASTER, Burm.
			(*G. Coryzoplatus*, m. olim.)	
336	335	337-46	————, *prothoracis dorso* antrorsum declive, corpore supra plus minusve convexo.	
337	336	. . . . .	————, *pedibus* parvis, minimae magnitudinis, femoribus posticis vix dimidiae abdominis longitudinis	156. G. MICROPUS, m.
338	336	339-40	————, *pedibus* validis, mediae magnitudinis.	
339	336	. . . . .	————, *antennarum articulis intermediis* 2° *et* 3° longitudine subaequalibus	157. G. COREUS, Fab.
			(*G. Syromastes*, Latr. - *G. Enoplops*, A. S.)	
340	338	. . . . .	————, *antennarum articulis* 2° *et* 3° inaequalibus, *tertio* multo longiore ac saepius apice incrassato	158. G. PSEUDOPHLAEUS, B.^m
			(*G. Atractus*, A. S. - *G. Arenocoris*, Hn.)	
341	336	342-46	————, *pedibus* cursoriis tenuibus elongatis.	
342	341	343-45	————, *antennarum articulo ultimo* tenui filiforme, saltem praecedenti longitudine aequali, saepius longiore.	
343	342	. . . . .	————, *fronte* triangulari apice obtusà . .	159. G. CHORUSOMA, Curtis.
344	342	. . . . .	————, *eàdem* angustâ acuminatâ apice bifidâ.	160. G. LEPTOCORISA, Latr.
			(*G. Myodochus*, Oliv.)	
345	342	. . . . .	————, *eàdem* latiore apice bilobà	161. G. MICRELYTRA, Lap.
			(*G. Actorus*, Burm.)	
346	341	. . . . .	————, *antennarum articulo ultimo* breviore ovato glandiforme	162. G. NEIDES, Latr.
			(*G. Berytus*, Fab.)	
347	262	348-49	GERROIDEAE, *pedibus intermediis* plus pedibus anterioribus quam posterioribus adproximatis.	
348	347	. . . . .	————, *tibiis posticis*, apicem tarsalem propè, dente valido armatis	163. G. HALOBATES, Esch.
			(*G. Ptilomerus*, A. S.)	
349	347	. . . . .	————, *iisdem*, apicem tarsalem propè, dente destitutis	164. G. GERRIS, Fab.

350	262	351-52	GERROIDEAE, *pedibus intermediis* ab anterioribus et a posterioribus aequè distantibus.	
351	350	. . . . .	————, *antennarum articulo primo* capite plus duplo longiore	165. G. Velia, Latr.
352	350	. . . . .	————, *eodem* plus capite breviore . . .	166. G. Microvelia, Westw.
353	30	. . . . .	CAPSITAE, *tuberculis antenniferis* conspicuis: *capite* horizontali, angulo apicali acuto	167. G. Miris, Fab.
354	30	355-66	CAPSITAE, *tuberculis antenniferis* aut nullis aut inconspicuis: *capite* antrorsum declive, angulo apicali aperto.	
355	354	356-63	————, *alarum superiorum parte coriaceâ* nervis longitudinalibus elevato-costatis suffultâ.	
356	355	. . . . .	————, *metopectoris margine postico* lamelloso expanso, sub coxis tertii paris et sub abdominis annulo primo liberè protenso	168. G. Resthenia, m.
357	356	358-66	————, *metapectoris margine postico* nec lamelloso nec retrorsum liberè protenso.	
358	357	359-62	————, *prothoracis margine anteriore* rectâ transversali truncato: *capite* triangulari.	
359	358	. . . . .	————, *antennarum articulo primo* neutiquam incrassato . . . . (*G. Cyllocoris, Lygus, Lopus, Phylus,* Hn.)	169. G. Phytocoris, Fall.
360	358	361-62	————, *antennarum articulo primo* incrassato.	
361	360	. . . . .	————, *eodem* apicem versus plus minusve abruptè incrassato	170. G. Capsus, Fab.
362	360	. . . . .	————, *eodem* aequè crasso in totâ longitudine.	171. G. Heterotoma, Latr.
363	357	. . . . .	————, *prothoracis margine anteriore* arcuatim emarginato: *capite* postice rotundato	172. G. Globiceps, Latr.
364	354	365-66	————, *alarum superiorum parte coriaceâ* nervis distinctis longitudinalibus vel obliquis omnino destitutâ.	
365	364	. . . . .	————, *pedibus* gressoriis: *femoribus posticis* simplicibus . . . . (*G. Byrsoptera,* m. olim.)	173. G. Attus, Hn.
366	364	. . . . .	————, *iisdem* saltatoriis: *femoribus posticis* maximè inflatis . . . . (*G. Bryocoris,* Fall. - *G. Astemma,* Latr. - *G. Pachytoma,* Curtis. - *G. Chlamydatus,* A. S.)	174. G. Halticus, Hn.
367	81	368-70	TINGIDITAE, *antennorum articulo tertio* saepiùs et praesertim extremitatem versùs plus minusve incrassato.	
368	367	. . . . .	————, *canalis inferi parietibus elevatis* ad posteriorem metasterni marginem usque productis. (*G. Eurycera,* Latr.)	175. G. Dyctionota, Curtis.
369	367	. . . . .	————, *iisdem* posteriorem mèsosterni marginem haud superantibus	176. G. Catoplatus, m.
370	367	. . . . .	————, *iisdem* caput haud superantibus . . (*G. Piesma,* Burm.)	177. G. Serenthia, m.

371	31	372-73	TINGIDITAE, *antennarum articulo tertio* tenue et extremitatem versûs haud incrassato.	
372	371	.....	———, *ontennorum articulo ultimo* longo filiforme et praecedenti subaequale	178. G. GALEATUS, Curtis.
373	371	.....	———, *eodem* breviore crassiore ovoideo vel glandiforme . . . . (*G. Monanthia*, Herr. Sch. - *G. Derephysia*, m. olim.)	179. G. TINGIS, Fab.
374	32	376-79	ARADITAE, *alis quiescentibus* extra abdomen utrinque expansis. — *SUB-FAMILIA* 1ª	PIESMOEIDEAE.
375	32	380-85	ARADITAE, *alis quiescentibus* abdominis latera extûs haud superantibus. — *SUB-FAMILIA* 2ª. . .	ARADOIDEAE.
376	374	377-78	PIESMOIDEAE, *alis superioribus* partim coriaceis, partim membranaceis.	
377	376	.....	———, *antennis* plus quinque-articulatis . (*G. Neogaeus*, Lap.)	180. G. HEBRUS, Curtis.
378	376	.....	———, *iisdem* quadri-articulatis . . . . (*G. Zozmenus*, Lap.)	181. G. PIESMA, Encycl.
379	374	.....	PIESMOIDEAE, *alis superioribus* totis coriaceis . .	182. G. ANOMALOPTERUS, Pʳ.
380	375	.....	ARADOIDEAE, *pedibus anterioribus* raptoriis cheliferis, femoribus valdè incrassatis, tibiis validis arcuatis unciniformibus	183. G. CHEILOCHEIRUS, m.
381	375	382-85	———, *pedibus iisdem* simplicibus ac formae consuetae.	
382	381	.....	———, *maxillâ inferiore* plus capite longiore et partim sub pectore quiescente . . . . . (*G. Piestosoma*, Lap.)	184. G. ARADUS, Fab.
383	381	384-85	———, *maxillâ inferiore* ultra caput haud producendâ.	
384	383	.....	———, *alis superioribus* partim coriaceis, partim membranaceis . . . . (*G. Dysodius*, Encycl. - *G. Crimia*, *Mezira*, A. S.)	185. G. BRACHYRHYNCHUS, Lap.
385	383	.....	———, *alis superioribus* homogeneis, totis membranaceis . . . . : . .	186. G. ANEURUS, Curtis.
386	83	.....	PHIMATITAE, *prothorace* utrinque in canale excavato ad antennas quiescentes excipiendas . . (*G. Syrtis*, Fab.)	187. G. PHYMATA, Latr.
386 *bis*	83	.....	———, *eodem* canali laterali ad antennas excipiendas destituto . . . . (*G. Discomerus*, Lap.)	187. G. MACROCEPHALUS, Sw.
387	84	392-97	REDUVITAE, *coxis primi paris* valdè elongatis, attenuatis, sub-cylindricis. — *SUB-FAMILIA* 1ª.	EMESOIDEAE.
388	34	398	———, *coxis iisdem* brevibus, conicis, *prothoracis dorso* haud retrorsum producto, *mesothorace* toto detecto. — *SUB-FAMILIA* 2ª . .	HYDROMETROIDEAE.
389	34	399-404	———, *coxis* ut in praecedente, *prothoracis dorso* mesothoracem totum obtegente, *scutello* posticè bifido. — *SUB-FAMILIA* 3ª	ECTRICHODIOIDEAE.

390	34	405-16	REDUVITAE, *coxis prothorocisque dorso* ut in subfamiliâ praecedente, *scutello* integro, *tibiis anterioribus* appendicibus peculiaribus pro statione instructis. — *SUB-FAMILIA* 4ª	Reduvioideae.
391	34	416	———, *coxis, prothoracis dorso scutelloque* ut in praecedente, *tibiis anterioribus* appendice quocumque pro statione destitutis. — *SUB-FAMILIA* 5ª.	Harpactoroideae.
392	387	393-96	EMESOIDEAE, *prothoracis dorso* mesothoracem haud obtegente.	
393	392	394-95	———, *abdominis segmento primo*, formae consuetae.	
394	393	. . . . .	———, *femoribus anticis*, tibiis tarsis ungulisque tarsorum unâ conjunctis ferè duplo longioribus .	188. G. Emesa, Fab.
395	393	. . . . .	———, *iisdem* tibiis tarsisque unâ conjunctis haud longioribus	189. G. Emesodema, m.
396	392	. . . . .	———, *abdominis segmento primo* pedunculiforme tenue recto cylindrico, reliquis segmentis unâ conjunctis plus triplo et ferè quadruplo longiore. (Species inedita, e Para, a D. Ghiliani.)	190. G. Ghilianella, m.
397	387	. . . . .	EMESOIDEAE, *prothoracis dorso* mesothoracem obtegente	191. G. Ploiaria, A. S.
398	388	. . . . .	HYDROMETROIDEAE, insecta aquatica, genus unicum nobis notum . . . . (*G. Limnobates*, A. S.)	191. G. Hydrometra, Latr.
399	389	. . . . .	ECTRICHODIOIDEAE, *genis* fronte longioribus . .	192. G. Hammacerus, Lap.
400	389	401-404	———, *genis* fronte brevioribus.	
401	400	402-403	———, *tibiis anticis* appendicibus pro statione subtùs et in extremitate tarsali munitis.	
402	401	. . . . .	———, *maxillae inferioris articulo secundo* praecedente breviore . . . . (*G. Physorhynchus*, A. S.)	193. G. Ectrichodia, Euc.
403	401	. . . . .	———, *maxillae inferioris articulo eodem* praecedente longiore	194. G. Pothea, A. S.
404	400	. . . . .	———, *tibiis anticis* appendicibus pro statione in extremitate tarsali destitutis	195. G. Cimbus, Hⁿ.
405	390	406-11	REDUVIOIDEAE, *prothoracis dorso* ante medium transversim sulcato.	
406	405	. . . . .	———, *tibiis primi paris* solis appendiculatis. (*G. Rasahus*, A. S.)	196. G. Sirthenea, m.
407	405	410-13	———, *tibiis primi et secundi paris* pariter appendiculatis.	
408	407	. . . . .	———, *antennarum origine* superâ, id est, super rectam ab oculorum centro ad capitis apicem ductam	197. G. Peirates, Enc.
409	407	. . . . .	———, *antennarum origine* marginali, id est, in rectâ ab oculorum centro ad capitis apicem ductâ. (*G. Cymbus*, Lap. - *G. Cymbidus*, m. olim.)	198. G. Tiarodes, Burm.
409bis	407	410-11	———, *antennarum origine* inferâ, id est, sub lineâ ab oculorum centro ad capitis apicem ductâ.	

410	409	.....	REDUVIOIDEAE, *femoribus tibiisque primi paris* longitudine subaequalibus	199. G. PACHYNOMUS, Kl.
411	409	.....	————, *femoribus tibiisque primi paris* inaequalibus, femoribus longioribus	200 G. PROSTEMMA, Lap.
			(*G. Postemma*, L. Duf. - *G. Metastemma*, A. S. — Nomen auctore generis impositum, etsi errore manifesto exortum, religiosè servandum habeatur.)	
412	390	413-16	REDUVIOIDEAE, *prothoracis dorso* ponè medium transversim sulcato.	
413	412	414-16	————, *femoribus anterioribus* incrassatis.	
414	413	.....	————, *antennarum articulo primo* saltem capitis longitudinis	201. G. PLATYMERIS, Lap.
415	413	.....	————, *eodem* vix dimidiam capitis longitudinem aequante	202. G. OPINUS, Lap.
			(*G. Tapeinus*, Lap. olim.)	
416	412	.....	————, *femoribus anterioribus* haud incrassatis	203. G. REDUVIUS, Fab.
			(*G. Spiniger*, Burm. - *G. Tetroscia, Acanthaspis*, A. S.)	
417	391	.....	HARPACTOROIDEAE, *maxillâ inferiore* brevissimâ vix ad posteriorem capitis marginem pervenientc.	204. G. ANCHOMICHON, m.
			(Typus, species unica chileosis, ex itinere D. Gay.)	
418	392	419-58	————, *maxillâ inferiore* saltem plus capite longiore.	
419	418	.....	————, *antennarum articulationibus* lateralibus et ante apices articulorum . . .	205. G. HOLOPTILUS, Encycl.
			(*G. Ptylocnemis*, A. S. - *G. Maotys*, id.)	
420	418	421-58	————, *antennarum articulationibus* rectis, id est, in articulorum extremitatibus.	
421	420	.....	————, *capite* posticè concavo et in concavitate posteriore prothoracem partim involvente	206. G. OCHETOPUS, A. S.
			(*G. Pygolampis*, Gr.)	
422	420	423-58	————, *capite* prothoracem nullomodò involvente.	
423	422	424-27	————, *genis* saltem frontis longitudinis, saepius longioribus.	
424	423	425-26	————, *antennarum origine* capitis apici proximâ.	
425	424	.....	————, *femoribus anterioribus* incrassatis	207. G. ONCOCEPHALUS, Burm.
			(*G. Coranus*, Curtis.)	
426	424	.....	————, *iisdem* haud incrassatis . . .	208. G. STENOPODA, Lap.
427	423	.....	————, *antennarum origine* a capitis apice longè remotâ	209. G. CONORCHINUS, Lap.
428	422	429-58	————, *genis* fronte brevioribus.	
429	428	.....	————, *tarsis anticis* brevissimis in rimâ superâ tibiarum totis excipiendis . . .	210. G. APIOMERUS, H[n].
			(*G. Belurus, Micrauchenia, Ponerobia*, A. S.)	

430	428	431-58	HARPACTOROIDEAE, *tarsis anticis* aliorum magnitudinis et in rimâ tibiarum haud excipiendis.	
431	431	432-33	————————, *tibiis anterioribus* lateraliter compressis, arcuatis aut sinuosis.	
432	431	. . . . .	————————, *prothorocis dorso* haud inflato, *scutello* detecto . . . . (*G. Trichoscelis*, A. S.)	211. G. Heniartes, m.
433	431	. . . . .	————————, *prothoracis dorso* inflato vesiculoso, *scutello* obtecto	212. G. Saccoderes, m.
434	428	435-58	————————, *tibiis anticis* nec lateraliter compressis, nec arcuatis vel sinuosis, saepius rectis sub-cylindricis.	
435	434	436-37	————————, *tarsorum unguiculis* tenuioribus, nec basi denticulatis, nec calcaratis.	
436	435	. . . . .	————————, *paginâ anteriore tibiarum primi paris* scutatâ, scuto magno plus latiore quam longiore antrorsum concavo	213. G. Petalocheirus, Pal. Beauv.
437	435	. . . . .	————————, *paginâ anteriore tibiarum primi paris* scuto destituta et formae consuetae .	214. G. Holotrichius, Burm.
438	434	439-58	————————, *tarsorum unguiculis* crassis validis dente basilari subtùs armatis.	
439	438	440-41	————————, *oculis* globosis admòdum prominulis	
440	439	. . . . .	————————, *fronte* sensim antrorsùm declive . . . . (*G. Macrophthalmus*, Lap.)	215. G. Macrops, Burm.
441	439	. . . . .	————————, *eâdem* protuberante, protubetuberantiâ abruptè altius reflexa et ab origine antennarum ad capitis apicem productâ . . .	216. G. Cethera, A. S.
442	438	443-58	————————, *oculis* parum elevatis et mediae magnitudinis.	
443	442	444-45	————————, *prothoracis dorso* posticè producto et *scutellum* obtegente.	
444	443	. . . . .	————————, *eodem* uniformiter convexiusculo, margine postico latè bilobo	217. G. Pristhevarma, A. S.
445	443	. . . . .	————————, *eodem* in medio longitudinaliter cristato, posticè acuminato	218. G. Prionotus, Lap.
446	442	447-58	————————, *eodem* posticè haud producto, *scutello* detecto.	
447	446	448-49	————————, *tibiis anterioribus* conspicuè arcuatis.	
448	447	. . . . .	————————, *iisdem* muticis . . . . . . (Species inedita e Sardinia, a D. Genè, an *G. Saica*, A. S.?)	219. G. Polytoxus, Genè in litt.
449	447	. . . . .	————————, *iisdem* valdè spinosis . . . (Typus, *Sinea multispinosa*, A. S.)	220. G. Sinea, A. S.
450	446	451-58	————————, *tibiis anterioribus* aut rectis aut inconspicuè sub-arcuatis.	

451	450	. . . . .	HARPACTOROIDEAE, *alarum superiorum parte anticâ* sub-membranaceâ hyalinâ uti et altera . . . . (*G. Hiranetis*, m. olim.)	221. G. MYOCORIS, A. S.
452	450	453-58	———————, *alarum superiorum parte anticâ*, more solito, opacâ coriaceâ.	
453	452	. . . . .	———————, *tibiis anterioribus* validè calcaratis . . . . (*G. Piezopleura*, A. S.)	222. G. STRIENERA, m.
454	452	455-58	———————, *iisdem* inermibus.	
455	454	. . . . .	———————, *collo* aut nullo aut indistincto, *vertice* ab origine immediatè rotundato-dilatato .	223. G. HARPACTOR, Lap.
456	455	457-58	———————, *collo* angusto elongato, cum vertice sensim confuso, lateribus rectis anticè divergentibus.	
457	456	. . . . .	———————, *tibiis anterioribus* validè spinosis. (✣ Abdominis lateribus integris. - Typus, *Sinea punctipes*, A. S. — ✣ ✣ Abdominis lateribus profundè laciniatis. - Typus, species inedita e Promontorio bonae spei, a D. Drege.)	224. G. BLAPTON, m.
458	456	. . . . .	———————, *tibiis anterioribus* muticis . . (*G. Zelus*, Fab. et *Evagoras*, Burm. partim. - *G. Holonotus*, *Heza*, *Plaeogaster*, *Jsocondylus*, *Diplodus*, *Darbanus*, *Passaleutus*, A. S.)	225. G. ARILUS, Burm.
459	36	461-62	HYDROCORISIAE, *trachearum ostiis* duobus tantùm in basi appendicum ultimae laminae ventralis. — *SUB-FAMILIA* 1ª	NEPOIDEAE.
460	36	463	———————, *trachearum ostiis pectoralibus ac ventralibus* 6-18, semper in numero pari ac symmetricè dispositis. — *SUB-FAMILIA* 2ª. . . .	BELOSTOMOIDEAE.
461	459	463	NEPOIDEAE, *coxis primi paris* brevibus crassioribus, femoribus tibiisque ejusdem paris longitudine subaequalibus, illis in totâ longitudine subtùs canaliculatis pro his recipiendis	226. G. NEPA, Lin.
462	459	468	———————, *coxis iisdem* tenuibus elongatis, femoribus tibiisque ejusdem paris inaequalibus, illis duplo longioribus et in solà posteriore medietate subtùs canaliculatis pro tibiis excipiendis . . .	227. G. RANATRA, Fab.
463	461	464-67	BELOSTOMOIDEAE, *maxillae inferioris articuli primi parte sub-annulari sive apicali*, vix dimidiam articuli secundi longitudinem attingente.	
464	464	465-66	———————, *tarsis anticis* bi-articulatis, *unguiculo* unico.	
465	464	. . . . .	———————, *eorumdem articulis* subaequalibus, *unguiculo* apicali unico articulis duobus unà longiore . . . . (Typus, *Nepa grandis*, Lin.)	228. G. BELOSTOMA, Latr.
466	464	. . . . .	———————, *eorumdem articulis* subaequalibus, *unguiculo* apicali minimo saepius aegrè discernendo. (Species e Java, *Sphaerodema rustica*, Encycl. maximè affinis, sed in hâc tarsi anteriores dicuntur bi-articulati)	229. G. ATOMYA, m.

467	464	. . . . .	BELOSTOMOIDEAE, *eorumdem articulis inaequalibus, unguiculo* unico minimo	229^{bis}. G. Amyotella, m.
			(Species unica ex Aegypto. Fortè *Appasus* A. S. sed hoc in genere tarsi dicuntur quoque bi-unguiculati.)	
468	463	. . . . .	———, *tarsis anticis bi-articulatis*, articulis subaequalibus, secundo bi-unguiculato, *unguiculis* magnis et reliquo tarso longioribus . .	230. G. Hydrocyrius, m.
			(Typus, species unica, maximae magnitudinis, e Colombiâ a D. Dupont.)	
469	460	. . . . .	BELOSTOMOIDEAE, *maxillae inferioris parte sub-annulari sive apicali* tenue elongatâ et articulum secundum longitudine aemulânte.	231. G. Zaitha, A. S.
470	40	471-72	PELEGONITAE, *antennarum origine* laterali, id est, in rectâ a centro oculorum ad apicem capitis ductâ.	
471	470	. . . . .	———, *maxillâ inferiore quiescente* ultrà pedum anteriorum originem haud producendâ . .	232. G. Leptopus, Latr.
472	470	. . . . .	———, *eâdem* ad originem pedum tertii paris usque producendâ	233. G. Acanthia, Latr.
			(*G. Salda*, Fab. - *G. Sciodopterus*, A. S.)	
473	40	. . . . .	PELEGONITAE, *antennarum origine* inferâ, id est, sub rectâ a centro oculorum ad apicem capitis ductâ.	234. G. Pelegonus, Latr.
474	41	474^{bis}-75	GALGULITAE, *tibiarum anteriorum articulatione tarsali distinctâ* tarsorum unguiculis simplicibus . .	234^{bis}. G. Galgulus, Latr.
474^{bis}	39	. . . . .	———, *articulatione eâdem* obsoletâ, tarso indistincto vel cum tibiâ confuso, ungulo mobili terminali maximo validissimo	235. G. Mononyxa, Lap.
475	42	. . . . .	NOTONECTITAE, *pedibus anterioribus* cheligeris raptoriis	236. G. Naucoris, Geoffr.
475^{bis}	40	476-85	———, *iisdem* nec raptoriis, nec cheligeris.	
476	475	. . . . .	———, *pedum posteriorum articulo ultimo* undique setulis rigidis marginatim fimbriato . .	237. G. Corixa, Latr.
477	475	478-85	———, *articulo eodem* setulis rigidis haud fimbriato.	
478	477	. . . . .	———, *maxillae inferioris articulis primis* clypeo producto occultatis	238. G. Sigara, Latr.
479	477	480-85	———, *iisdem* detectis ac satis conspicuis.	
480	479	480-82	———, *alis superioribus* heterogeneis, parte posticâ molliore sub-membranaceâ.	
481	480	. . . . .	———, *prothoracis dorso* utrinque foveato, foveis antennas quiescentes excipientibus . . .	239. G. Enithares, m.
482	480	483-84	———, *eodem* haud foveato.	
483	482	. . . . .	———, *fronte* angustâ, in uno sexû conicâ protuberante	240. G. Anisops, m.
484	482	. . . . .	———, *eâdem* latâ neutiquam protuberante.	241. G. Notonecta, Lin.
485	479	. . . . .	———, *alis superioribus* homogeneis ac totis coriaceis	242. G. Plea, Leach.

486	43	. . . . .	CICADITAE, *alis superioribus* saltem partim reticulatis, cellulis medietatis posterioris plurimis difformibus. (*G. Cyrtosoma*, Leach. - *G. Hemidyctya*, A. S.)	243. G. POLYNEVRA, Leach.
487	43	. . . . .	CICADITAE, *alis superioribus* haud reticulatis, cellulis ubique rarioribus et in regione posteriore tantummodo octo . . . . (*G. Octocellae*, A. S. - *G. Tacua*, *Pycna*, *Geana*, *Platypleura*, *Hemisciera*, *Mogannia*, *Zammara*, *Oxypleura*, *Tettigodes*, *Cyclochila*, *Dandubia*, *Thopha*, *Fidicina*, *Tettigomya*, *Cerinetha*, A. S.)	244. G. CICADA, Lin.
488	44	489-94	FULGORITAE, *clypeo* triedro, suturis duabus paginas tres exteriores intercipientibus elevato-costatis aut carinatis, longitudinalibus ac orem versùs convergentibus.	
489	488	490-91	————, *capite* tetraedro (*), id est, faciebus quatuor normalibus distinctè conflato, sed facultatibus orbato tam super prothoracem sese erigendi quam sub eodem sese occultandi.	
490	488	491-503	————, *capite* protuberante, *protuberantiâ cephalicâ* saltem partim *faciebus lateralibus capitis* occupatâ. — *SUB-FAMILIA* 1ª	FULGOROIDEAE.
491	488	504-15	————, *protuberantiâ cephalicâ* aut nullâ aut vertice fronteque exclusivè efformata, id est, sine concursu facierum lateralium. — *SUB-FAMILIA* 2ª.	LYSTROIDEAE.
492	490	493-94	————, *capite* haud perfectè tetraedro, *faciebus lateralibus* aut obsoletis aut rudimentariis.	
493	492	516-22	————, *protuberantiâ cephalicâ* conspicuâ. — *SUB-FAMILIA* 3ª	DYCTIOPHOROIDEAE.
494	492	523-42	————, *protuberantiâ cephalicâ* nullâ. — *SUB-FAMILIA* 4ª	CIXIOIDEAE.
495	42	496-97	————, *clypeo* haud triedro, extûs indiviso et uniformiter convexo.	
496	488	543-56	————, *prothoracis angulis posterioribus* plus elevatis quam alarum squamulae. — *SUB-FAMILIA* 5ª.	JSSOIDEAE.
497	488	557-66	————, *iisdem* minus elevatis quam alarum squamulae. — *SUB-FAMILIA* 6ª	FLATOIDEAE.
498	490	499-502	FULGOROIDEAE, *faciebus lateralibus* ad verticis apicem usque productis.	
499	498	. . . . .	————, *protuberantiâ cephalicâ* inflatâ vesiculosâ, horizontaliter porrectâ, nec supernè erectâ, nec retrorsùm reflexâ	245. G. FULGORA, Lin.

(*) Per la miglior intelligenza di queste designazioni mi giova osservare che delle quattro facciate del tetraedro la superiore *facciata verticale*, per brevità *vertice*, è la parte principale dell' *osso grande del cranio*, l' inferiore ovvero *facciata frontale* corrisponde piuttosto alle *ossa della faccia*, mentre le *facciate laterali* sono i veri corrispondenti delle *ossa frontali* a' quali ho accennato in alcune linee dell' introduzione. Il vario aspetto del capo e della sua protuberanza procede esclusivamente dal diverso e ineguale sviluppo delle sue distinte ossa integranti. Come adunque potrebbe giudicare sanamente del *tutto* colui che si rifiutasse a studiarne *le parti*?

500 498 501-502 FULGOROIDEAE, *eâdem* nec inflatâ nec vesiculosâ, semper plus minusve adscendente ac saepè retrorsùm reflexâ.

501 500 . . . . . ——————, *eâdem* extremitatem superiorem propè abruptè dilatatâ . . . . 246. G. Phrictus, m.

502 500 . . . . . ——————, *eâdem* semper apicem versûs attenuatâ, saepius utrinque compressâ gladiiforme . 247. G. Enchophora, m.

503 490 . . . . . FULGOROIDEAE, *faciebus lateralibus* ad apicis verticem haud pervenientibus, vertice fronteque in certo protuberantiae situ contiguis . . . . . 248. G. Pyrops, m.

(*G. Hotinus*, A. S.)

504 491 . . . . . LYSTROIDEAE, *faciebus lateralibus verticeque* frontis progressu potiore plus minusve retropulsis . . 249. G. Aphaena, Guerin.

505 491 506-15 ——————, *faciebus lateralibus* solis retropulsis et longè a capitis apice terminatis, verticis frontisque progressû simultaneo interdum protuberantiam cephalicam efficiente.

506 505 507-508 ——————, *protuberantiâ cephalicâ* plus minusve evolutâ.

507 506 . . . . . ——————, *abdominis segmentis* 6° *et sequentibus* sub quinto in utroque sexu reconditis . . . . 250. G. Episcivs, m.

508 506 . . . . . ——————, *abdominis segmentis* 6° *et sequentibus* supra detectis . . . . 251. G. Dilobura, m.

509 505 510-15 ——————, *protuberantiâ cephalicâ* nullâ.

510 509 511-12 ——————, *antennarum articulo secundo* sphaerico.

511 510 . . . . . ——————, *fronte* indivisâ parum declive ferè horizontali . . . . 252. G. Omalocephala, m.

512 510 . . . . . ——————, *eâdem*, longitudinaliter tripartitâ, maximè declive ferè verticali . . . . 253. G. Lystra, Fab.

513 509 514-15 ——————, *antennarum articulo secundo* oblongo-ovato, sphaeroideo.

514 513 . . . . . ——————, *abdominis laminâ quinta dorsali* operculiformi, segmentum sequens genitaliaque obtegente . . . . 253*bis*.G.Colyptoproctus,m.

(Mares non vidi. Character evulgatus forte sexualis. Hoc in casu, genus indistinctum rectius cum sequente consociandum.)

515 513 . . . . . ——————, *abdominis laminâ quinta dorsali*, in utroque sexu, formae consuetae, segmentis sequentibus genitalibusque supra detectis . . . . . 254. G. Poiocera, Lap.

516 493 516-18 DYCTIOPHOROIDEAE, *fronte* longitudinaliter tripartitâ.

517 516 . . . . . ——————, *alarum superiorum regione discoidali* ubique aequaliter reticulatâ, cellulis crebris parvis difformibus . . . . 255. G. Plegmatoptera, m.

518 516 . . . . . ——————, *eâdem* nervo infracto transversim bipartitâ, sectione anticâ anostomosibus transversis destitutâ, posticâ reticulatâ cellulis parvis aut quadratis aut rectangularibus . . . . . . 256. G. Dichoptera, m.

519	516	.....	DYCTIOPHOROIDEAE, *eâdem* neutiquam transversim bipartitâ et propè marginem posticum tantummodò plus minusve reticulatâ	257. G. DYCTIOPHORA, G.r
			(*G. P. Pseudophana*, Burm. - *G. Lappida*, A. S.)	
520	493	521-22	DYCTIOPHOROIDEAE, *fronte* indivisâ.	
521	520	.....	———————, *alis superioribus* posticè reticulatis, in quiete nusquam sese invicem involventibus.	258. G. MONOPSIS, m.
522	520	.....	———————, *iisdem* haud reticulatis et in quiete apicem versûs sese invicem involventibus .	259. G. ELIDIPTERA, m.
523	494	.....	CIXIOIDEAE, *alis superioribus* reticulatis.	
524	523	.....	————, *cellulis* plerisque quadratis aut transversim rectangularibus	260. G. PHAENAX, G.r
525	523	.....	————, *iisdem*, transversim rhomboidalibus . .	261. G. PTERODYCTYA, Drm.
526	494	527-42	CIXIOIDEAE, *alarum superiorum regione discoidali* nullatenus reticulatâ et etiam anastomosibus transversim destitutâ.	
527	526	528-37	————, *angulis planis fronti genisque utrinque interpositis* aut rectis aut quasi rectis.	
528	527	529-36	————, *ocellis antennarumque origine* semper sub oculis.	
529	528	530-33	————, *capite* super prothoracem haud erigendo.	
530	528	531-32	————, *antennis* vix ad genarum marginem internum pervenientibus.	
531	530	.....	————, *tibiis posticis* quadri-spinosis . . .	262. G. CLADODIPTERA, m.
			(✣ *Fronte* aequè latâ ac longâ. — *Clad. macrophthalma*, m. ✣ ✣ *Eâdem* plus longiore quam latiore. Formosa species inedita, e Para a D. Ghiliani, 1846.)	
532	530	.....	————, *iisdem* uni-spinosis	263. G. ACHILUS, K.by
533	529	.....	————, *antennis* genarum marginem internum superantibus	264. G. UGYOPS, Guerin.
534	528	535-36	————, *capite* super prothoracem liberè erigendo.	
535	534	.....	————, *alis superioribus* nusquam sese invicem involventibus	265. G. CIXIUS, Latr.
536	534	.....	————, *iisdem* propè angulum posticum sese invicem involventibus	266. G. PLECTODERES, m.
537	527	.....	————, *ocellis antennarumque* origine manifestè ante oculos	267. G. BOTHRIOCERA, B.m
538	526	539-42	————, *angulis planis fronti genisque utrinque interpositis* valdè apertis.	
539	538	.....	————, *antennarum articulo secundo* plus primo longiore	268. G. DELPHAX, Fab.
540	538	541-42	————, *eodem* plus primo breviore.	
541	540	.....	————, *pedibus primi paris*, formae consuetae .	269. G. ASIRACA, Latr.
542	540	.....	————, *iisdem* depressis dilatatis lamellaeformibus	270. G. ARAEOPUS, m.
543	496	544-51	JSSOIDEAE, *tibiis posticis* spinosis.	

544	543	545-46	JSSOIDEAE, *tibiis anterioribus* compresso-dilatatis lamellaeformibus.	
545	544	. . . . .	————, *prothoracis dorso* saltem aequè longo ac lato.	271. G. CALISCELIS, Lap.
546	545	. . . . .	————, *eodem* visibiliter plus latiore quam longiore.	272. G. EURYBRACHYS, Guer.
547	543	548-51	————, *tibiis anterioribus* formae consuetae.	
548	547	. . . . .	————, *capite* protuberante	273. G. MYCTERODUS, m.
549	547	550-51	————, *eodem* haud protuberante.	
550	549	. . . . .	————, *ocellis* duobus conspicuis	274. G. OMMATIDIOTUS, m.
551	549	. . . . .	————, *iisdem* nullis	275. G. JSSUS, Fab.
			(*G. Histerophanes*, A. S.)	
552	496	553-56	JSSOIDEAE, *pedibus* muticis.	
553	552	. . . . .	————, *antennis* vix ad exteriorem genarum marginem pervenientibus	276. G. DERBE, Fab.
554	552	555-56	————, *iisdem* exteriorem genarum marginem superantibus.	
555	554	. . . . .	————, *antennarum articulo secundo* appendicibus destituto	277. G. DERIBIA, Westw.
			(*G. Anotia*, Guerin.)	
556	554	. . . . .	————, *eodem* appendiculato	278. G. OTIOCERUS, K.by
			(In singulâ specie appendicum numerus constans ast diversus.)	
557	497	558-65	FLATOIDEAE, *alarum superiorum nervo sub-radiali* a radio in totâ ferè longitudine distinctè separato.	
558	557	. . . . .	————, *frontis paginâ mediâ* protuberante . .	279. G. LOPHOPS, m.
559	557	560-65	————, *eâdem* deplanatâ.	
560	559	. . . . .	————, *tibiis* omnibus compressis laminaeformibus	280. G. ELASMOSCELIS, m.
561	559	562-65	————, *tibiis* omnibus, formae consuetae.	
562	561	. . . . .	————, *fronte* a vertice distinctè separatâ, suturâ intermediâ elevatâ	281. G. RICANIA, G.r
			(*G. Nephezia, Pochazia*, A. S.)	
563	561	564-65	————, *fronte* cum vertice sensim confusâ, suturâ intermediâ obsoletâ.	
564	563	. . . . .	————, *antennis* exteriorem genarum marginem superantibus	282. G. FLATA, Fab.
			(*G. Dalapax*, A. S.)	
565	563	. . . . .	————, *iisdem* exteriorem genarum marginem haud superantibus	283. G. PAECILOPTERA, L.r
			(*G. Colobesthes, Phylliphanta, Phalaenomorpha*, A. S.)	
566	497	. . . . .	FLATOIDEAE, *nervo sub-radiali* indistincto et cum radio in totâ ferè longitudine confuso	284. G. ACANALONIA, m.
567	43	570-75	CENTROTITAE, *prothoracis dorso* ultrà posteriorem mesothoracis marginem haud producto, *scutello* detecto. — *SUB-FAMILIA* 1.a	AETHALIONOIDEAE.
568	43	576-79	————, *eodem* post mesothoracem liberè producto, *scutello* illi subdito nihilominus adhuc visibili. — *SUB-FAMILIA* 2.a	CENTROTOIDEAE.

569	43	580-613	CENTROTITAE, *eodem* posticè prolungato *scutellum* abdominisque partem obtegente. — *SUB-FAMILIA* 3.[a]	MEMBRACOIDEAE.
570	567	. . . . .	AETHALIONOIDEAE, *tibiarum posteriorum extremitate tarsali* spinulis coronatâ	285. G. EURYMELA, Hoffm.
571	567	. . . . .	——————, *tibiis posticis* spinarum coronâ in extremitate tarsali destitutis.	
572	571	573-74	——————, *tibiis omnibus* costatis, costis crenatis vel denticulatis.	
573	572	. . . . .	——————, *ocellis* duobus conspicuis . .	286. G. SCAPTOMORAEA, m.
			(Species inedita, e Colombiâ.)	
574	572	. . . . .	——————, *iisdem* nullis	287. G. MELISODERES, m.
			(Species chilenses, ex itinere D. Gay.)	
575	571	. . . . .	——————, *tibiis omnibus* nec crenatis nec dentatis	288. G. AETHALION, Latr.
			(✣ ♀ Oviscaptûs valvulis glabris et abdomine brevioribus. - *Aethalion reticulatum*, Encycl. — ✣✣ *Iisdem* birsutis et saltem corporis longitudinis. — Species inedita, ex Indiâ Orientali.)	
576	568	. . . . .	CENTROTOIDEAE, *alarum superiorum cellulis postico-marginalibus* elongatis angustis et a *basilaribus* haud dissimilibus	289. G. CENTROTUS, Fab.
			(*G. Uroxyphus*, A. S.)	
577	568	. . . . .	——————, *alarum superiorum cellulis* difformibus, *basilaribus* angustis elongatis, *postico-marginalibus* brevioribus rotundatis.	
578	577	. . . . .	——————, *tibiis anticis*, formae consuetae .	290. G. BOCYDIUM, Latr.
			(*G. Sphaeronotus*, Lap.)	
579	55	. . . . .	——————, *iisdem* compressis foliaceis . . .	291. G. SYCODERES, G.[r]
580	569	581-86	MEMBRACOIDEAE, *tibiis anticis* compressis foliaceis.	
581	580	. . . . .	——————, *fronte* carinâ transversâ a vertice distinctè separatâ	292. G. MEMBRACIS, Fab.
			(*G. Enchenopa*, *Encophyllum*, *Bolbonota*, A. S.)	
582	580	583-86	——————, *eâdem* a vertice haud distinctè separatâ.	
583	582	584-85	——————, *capitis summo apice antico* genarum apicem superante.	
584	583	. . . . .	——————, *genis* angustis elongatis, *capitis paginâ superâ* oblongo-ovatâ	292. G. SPHONGOPHORUS, L. F.
			(*G. Hypsauchenia*, Gr.)	
585	583	. . . . .	——————, *iisdem* latioribus extûs arcuatis, *capitis paginâ superâ* transversim ovatâ	293. G. FAIRMAIRELLA, m.
			(Species inedita natalensis, ex itinere D. Delegorgue.)	
586	582	. . . . .	——————, *capitis summo apice antico* genarum apicem haud superante, *paginâ superâ* trapezoideâ.	294. G. OXYRRACHYS, G.[r]
587	569	588-613	MEMBRACOIDEAE, *tibiis anticis*, formae consuetae.	
588	587	. . . . .	——————, *tarsis tertii paris*, minimis . . .	295. G. HOPLOPHORA, G.[r]
			(*G. Umbonia*, Burm. - *G. Triquetra*, Lef.)	

589	587	590-613	MEMBRACOIDEAE, *tarsis omnibus* subaequalibus.	
590	589	591-604	————————, *alis* in quiete detectis.	
591	590	. . . . .	————————, *fronte* carinà transversali a vertice distinctè separatà	296. G. Scaphula, L. F.
592	590	593-606	————————, *eàdem* a vertice haud distinctè separatà.	
593	592	594-99	————————, *prothoracis dorso* vesiculoso.	
594	593	595-598	————————, *alarum superiorum cellulis omnibus* angustatis longitudinalibus.	
595	594	. . . . .	————————, *marium faeminarumque prothorace* conformi	297. G. Aeda, A. S.
596	594	597-99	————————, *eodem* difformi.	
597	596	. . . . .	————————, *fronte* porrectà angulatà acutà. .	298. G. Combophora, G.r
598	596	. . . . .	————————, *eàdem* depressà arcuatà	299. G. Heteronotus, Lap.
599	593	. . . . .	————————, *alarum superiorum cellulis* latioribus rotundatis	300. G. Cyphonia, Lap.
600	592	593-613	————————, *prothoracis dorso* neutiquam vesiculoso.	
601	600	602-603	————————, *alorum superiorum cellulis postico-marginalibus* angustis elongatis.	
602	601	. . . . .	————————, *capitis summo apice* porrecto acuto.	301. G. Aconophosa, L. F.
603	601	. . . . .	————————, *eodem* sub-truncato aut laeviter arcuato . . . . (G. *Darnodes*, A. S.)	302. G. Smilia, G.r
604	600	605-606	————————, *alarum superiorum cellulis postico-marginalibus* latioribus rotundatis.	
605	604	. . . . .	————————, *earumdem cellulis discoidalibus* cum *postico-marginalibus* conformibus, latioribus rotundatis	303. G. Ceresa, L. F.
606	604	. . . . .	————————, *iisdem* cum *basilaribus* conformibus, angustis elongatis	304. G. Acutalis, L. F.
607	590	609-13	————————, *alis* in quiete protborace plus minusve obtectis.	
608	607	609-610	————————, *fronte* carinà transversali a vertice distinctè separatà.	
609	608	. . . . .	————————, *genis* fronte multò latioribus, *capitis margine antico* recto aut vix sub-arcuato. .	305. G. Darnis, Fab.
610	608	. . . . .	————————, *genis* fronteque ferè ejusdem latitudinis, *capitis* paginà superà trapezoideà . . . (Species inedita, ex Am. Sept. *Centrotus reticulatus* in Coll. Sturm.)	306. G. Sturmella, m.
611	607	612-13	————————, *fronte* a vertice haud distinctè separatà.	
612	611	. . . . .	————————, *eàdem* apice angulatà subtùs convexà . . . . (G. *Entylia*, *Polyglypta*, Borm. - G. *Oxygonia*, L. F.)	307. G. Hemiptycha, G.r
613	611	. . . . .	————————, *eàdem* apice obtusà subtùs deplanatà.	308. G. Tragopa, G.r

614	44	618-39	TETTIGONITAE, *tibiis posterioribus* aut muticis aut dentibus paucis ac remotis extûs armatis. — *SUB-FAMILIA* 1.ª	APHROPHOROIDEAE.
615	44	616-17	——————, *iisdem* extûs bicostatis ac bifimbriatis, fimbriis setulosis.	
616	615	640-62	——————, *ocellis* duobus conspicuis in paginâ superiore capitis. — *SUB-FAMILIA* 2.ª . . .	TETTIGONIOIDEAE.
617	615	662-91	——————, *ocellis* aut in paginâ inferiore capitis, aut marginalibus aut nullis. — *SUB-FAMILIA* 3.ª	JASSOIDEAE.
618	614	619-30	APHROPHOROIDEAE, *genis* in inferiore capitis paginâ vel summum apicem propè incipientibus.	
619	618	620-21	——————, *fronte* a vertice haud distinctè separatâ.	
620	619	. . . . .	——————, *eâdem* protuberante, protuberantiâ elongatâ conica horizontali	309. G. CEPHALELUS, Perch.
621	620	. . . . .	——————, *eâdem* protuberantiâ nullâ . .	310. G. CASTOPTERA, G.r
622	618	623-37	——————, *fronte* a vertice distinctè separatâ.	
623	622	624-27	——————, *vertice genuino* summum marginem anteriorem capitis attingente.	
624	623	. . . . .	——————, *ocellis* nullis . . . . . . (Species inedita natalensis, ex itinere D. Delegorgue.)	311. G. CAMPTELASMUS, m.
625	623	626-27	——————, *iisdem* duobus conspicuis.	
626	625	. . . . .	——————, *tibiis posticis* muticis	312. G. ULOPA, G.r
627	625	. . . . .	——————, *iisdem* dentibus paucis extûs armatis . . . . (*G. Ptyelus*, Encycl. - *G. Lepyronia*, A. S.)	313. G. APHROPHORA, G.r
628	622	629-30	——————, *vertice genuino* summum marginem anteriorem capitis haud attingente.	
629	628	. . . . .	——————, *eodem* lineâ impressa transversim bipartito. *Alis*, formae consuetae . . . . (Species plurimae exoticae, majoris magnitudinis plerumque ineditae.)	314. G. PLINTHAERUS, m.
630	628	. . . . .	——————, *eodem* neutiquam transversim bipartito. *Alis superioribus* conchaeformibus . .	315. G. ORTHORHAPHIA, W.
631	618	619-39	APHROPHOROIDEAE, *genis* in paginâ superiore capitis ac non longè ab ejusdem margine posteriore incipientibus.	
632	631	. . . . .	——————, *ocellis* duobus, inter genas ac frontem, in ipsâ origine sulculi intermedii . . . (Species inedita, e Promontorio bonae spei, a D. Drege.)	316. G. TREMAPTERUS, m.
633	631	634-39	——————, *iisdem*, in medio vertice non longè a posteriore capitis margine.	
634	633	. . . . .	——————, *vertice genuino* totam superiorem capitis paginam occupante . . . . (*G. Triecphora*, *Rhinaulax*, *Monecphora*, A. S.)	317. G. CERCOPIS, Fab.
635	633	636-39	——————, *eodem* summum capitis marginem anteriorem haud attingente.	

636	635	. . . . .	APHROPHOROIDEAE, *eodem* supra inflato ac evidenter genis latiore	318. G. Gomphorhina, A. S.
637	635	638-39	————————, *eodem* haud inflato et vix genarum latitudinis.	
638	637	. . . . .	————————, *capitis paginâ superiore* immarginatâ, summo apice rotundato	319. G. Tomaspis, A. S.
639	637	. . . . .	————————, *eâdem* marginatâ margine carinulato, summo apice angulato	320. G. Sphenorhina, A.S.
640	616	. . . . .	TETTIGONIOIDEAE, *ocellis* in margine incrassato capitis supra inclusis	321. G. Eupelix, G.r
640bis	616	. . . . .	————————, *iisdem* in foveolis verticis exteriorem capitis marginem propè	322. G. Evacanthus, Enc.
641	616	642-43	————————, *iisdem* liberis ante oculos.	
642	641	. . . . .	————————, *capite* protuberante, protuberantiâ elongato-conicâ horizontali	323. G. Dorydium, Burm.
643	641	. . . . .	————————, *eodem* haud protuberante, deplanato	324. G. Acucephalus, G.r
644	616	645-51	————————, *ocellis* liberis inter oculos.	
645	644	646-52	————————, *capitis paginâ inferiore* deplanatâ, *genis* ferè horizontalibus.	
646	645	647-49	————————, *vertice* carinâ lamellosâ a fronte distinctè separato.	
647	646	. . . . .	————————, *tibiarum posteriorum costis tribus* pariter setaceo-fimbriatis	325. G. Ledra, Fab.
648	646	. . . . .	————————, *earumdem costis duabus exterioribus* parcè spinosis, *interiore* setaceo-fimbriatâ . . .	326. G. Thlasia, G.r
649	646	. . . . .	————————, *earumdem costis tribus* spinulosis.	327. G. Gypona, G.r
650	645	651-52	————————, *vertice* a fronte haud distinctè separatâ.	
651	650	. . . . .	————————, *alis superioribus* in quiete nusquam sese invicem involventibus	328. G. Scaris, Encycl.
652	650	. . . . .	————————, *iisdem* in quiete posticè sese invicem involventibus	329. G. Penthimia, G.r
653	644	654-59	————————, *capitis paginâ inferiore* convexâ plus minusve inflatâ: *genis* introrsum declivibus.	
654	653	. . . . .	————————, *capite* protuberante, protuberantiâ cephalicâ lateraliter compressâ arcuatim adscendente apice recurvâ . . . . (Species guineensis, ex itinere D. Caternault.)	330. G. Wolfella, m.
655	654	656-59	————————, *eodem* haud protuberante.	
656	655	657-58	————————, *vertice*, carinulâ transversali, a fronte distinctè separato.	
657	656	. . . . .	————————, *tibiarum posteriorum costis duabus exterioribus* parcè spinosis spinis septem vel octo. (Species inedita e Colombiâ.)	331. G. Proranus, m.
658	656	. . . . .	————————, *earumdem costis tribus* pariter multispinulosis . . . . (*Cicada variegata*, Fab.)	332. G. Diedrocephala, m.

659 654 660-61 TETTIGONIOIDEAE, *vertice*, sulculo transversali a fronte distinctè separato.

660 659 . . . . . ————————, *fronte* protuberante, protuberantiâ frontali conicâ arcuatim adscendente apice retrorsum reflexâ . . . . 333. G. RHAPHIRHINUS, Lap.

661 659 . . . . . ————————, *eâdem* nec arcuatim adscendente, nec retrorsùm reflexâ . . . . 334. G. TETTIGONIA, Geoffr.

(*G. Ciccus*, Latr. - *G. Proconia*, Encycl. - *G. Aulacizes*, *Diastotemma*. - *G. Acopsis*, A. S.)

662 617 663-82 JASSOIDEAE, *ocellis* conspicuis.

663 662 . . . . . ————, *vertice*, carinulâ transversali a fronte distinctè separato.

664 663 665-69 ————, *capitis faciebus lateralibus* plus minusve conspicuis.

665 664 . . . . . ————, *iisdem* anticè conjunctis et in sulculo transverso desinentibus: *ocellis* in ipso sulculo et oculos propè observandis . . . . 335. G. SELENOCEPHALUS, G.r

666 664 . . . . . ————, *iisdem* pariter anticè conjunctis, canalem latum transversalem simul efficientibus: *ocellis*, in sinu canalis, ab oculis remotioribus . . . . 336. G. PROTONESIS, m.

(Facies *Caelidiarum*. Species inedita, e Promontorio bonae spei a D. Drege.)

667 664 668-69 ————, *iisdem* medio sejunctis, plus minusve remotis, foveaeformibus.

668 667 . . . . . ————, *foveis* magnis, profundis, approximatis: *ocellis* capitis apici propioribus . . . . 337. G. PAROPIA, G.r

669 667 . . . . . ————, *iisdem* parvis remotis, *ocellis* oculis propioribus . . . . 338. G. CALIDIA, G.r

670 663 671-82 ————, *capitis faciebus lateralibus* prorsùs inconspicuis.

671 670 672-73 ————, *ocellis* in inferiore capitis paginâ et etiam in ipsâ suturâ sulciformi frontem genasque intercipiente.

672 671 . . . . . ————, *antennarum origine*, inter oculos . . 339. G. PIEZAUCHENIA, m.

(Species chilenses, ex itinere D. Gay.)

673 671 . . . . . ————, *eâdem*, ponè oculos.

674 670 . . . . . ————, *ocellis*, in anteriore capitis margine.

675 674 676-77 ————, *vertice* suturâ elevatâ a fronte distinctè separato.

676 675 . . . . . ————, *capite* plus latiore quam longiore, anticè latè arcuato . . . . 340. G. SIVA, m.

(Species inedita, e Coromandel. — *Siva*, nomen mythologiae Indicae.)

677 675 . . . . . ————, *capite* plus longiore quam latiore, anticè semi-elliptico . . . . 341. G. DIGLENITA, m.

678 675 . . . . . ————, *vertice*, lineâ impressâ sulciformi a fronte distinctè separato.

679 673 . . . . . JASSOIDEAE, *ocellis*, in anteriore capitis margine . 342. G. Jassus, Fab.
(*G. Typhlocyba*, Burm. non Gr. - *G. Amblycephalus*, A. S.)

680 678 680-81 ————, *ocellis*, in inferiore capitis paginâ.

681 680 . . . . . ————, *alis quiescentibus* nusquam sese invicem involventibus . . . . 343. G. Bythoscopus, G.r
(*G. Idiocerus*, Lewis.)

682 678 . . . . . ————, *iisdem* in quiete apicem propè sese invicem involventibus . . . . 344. G. Oncopsis, Burm.
(*G. Podiopsis*, Burm. - *G. Macopsis*, Lewis.)

683 617 684-93 JASSOIDEAE, *ocellis* nullis.

684 683 685-90 ————, *vertice*, suturâ elevatâ a fronte distinctè separato.

685 684 686-87 ————, *capite* plus longiore quam latiore.

686 685 . . . . . ————, *capitis paginâ inferiore* planâ et etiam partim concavâ, *margine exteriore* lamelloso . . 345. G. Adiaerotoma, m.
(Species inedita, e Brasiliâ.)

687 685 . . . . . ————, *eâdem* convexâ, *margine exteriore* costato. 346. G. Hemipeltis, m.
(Species chilensis, ex itinere D. Gay.)

688 684 689-90 ————, *capite* plus latiore quam longiore.

689 688 . . . . . ————, *mesosterno* majore altè convexo subinflato, *coxis intermediis* a posterioribus valdè remotis . . . . 347. G. Aglaenita, m.
(Species inedita, ex Am. Merid.)

690 688 . . . . . ————, *eodem* formae consuetae, *coxis quatuor* posterioribus magis approximatis . . . . 348. G. Selenopsis, m.
(Species inedita e Para, a D. Ghiliani, 1846.)

691 683 692-93 ————, *vertice* a fronte haud distinctè separato.

692 691 . . . . . ————, *capite* ferè immediatè deorsùm inflexo, *paginâ superiore* transverso-lineari, *oculis* magnis hemisphaericis prominentibus . . . . 349. G. Strongylomma, m.
(Species inedita, e Brasiliâ.)

693 691 . . . . . ————, *eodem* longius a margine posteriore deorsum declive, *paginâ superiore* semper conspicuâ interdum aequè longâ ac latâ, *oculis* oblongis parum elevatis . . . . 350. G. Typhlocyba, G.r

DISTINTA DELLE ABBREVIATURE PRATICATE NELLA TAVOLA PRECEDENTE.

ABBREVIATURE.	NOMI DEGLI AUTORI
A. S.	Signori Amyot e Serville.
Br. o B.^{r}	Brullè.
Burm. o Brm. e B.^{m}	Burmeister.
Encycl. o Enc.	Encyclopedie Insect. T. X. — Articoli dei Signori Serville e S. Fageau.
Fab.	Fabricius.
Fall.	Fallen.
Geoffr.	Geoffroy.
G.^{r} o Gr. e Germ.	Germar.
Guer.	Guerin.
Hn. o H.^{n}	Hahn.
Herr. Sch.	Herrich-Schaeffer.
Hoffm. o Hoffmg.	De Hoffmansegg.
K.^{by} o Kby	Kicby.
Kl.	Klus.
Lap.	De Laporte C.^{te} de Castelnau.
Latr.	Latreille.
L. Duf.	Leone Dufour.
L. F.	Leone Fairmaire.
Lef.	Alessandro Lefebvre.
Lin.	Linneo.
Perch.	Percheron.
Thunb.	Thunberg.
Sch. o Schill.	Schilling.
Swed.	Sweder.
Curt.	Curtis.
Westw.	Westwood.

DI ALCUNI GENERI D' INSETTI ARTROIDIGNATI

NUOVAMENTE PROPOSTI

DAL SOCIO ATTUALE

SIGNOR MARCHESE MASSIMILIANO SPINOLA

---- - --- -----LA SINOTTICA DI QUESTO ORDINE

EDE LA PRESENTE MEMORIA

ı il 7 *Dicembre* 1849.

I. G. Caternaultiella, m.
N. 7.[bis] *Tab. synopt.*

ıferiore capitis propè angulos poste-
insertae, saltem quadri-articulatae:
lindricis crassitudine sub-aequalibus,
plus tertio longiore. Quartus deest. (1)
.tudinis, horizontale supra depressum
marginatum, anticè rotundatum, late-
arcuatum.
m oblongo-ovati, in gibbositatae laterali
angulos posteriores capitis occupantes.
propè marginem posteriorem, inter se
ıtes.
arcuatus, angulis posterioribus abruptè
; visibiliter productis.

Frons parva angusta sub-triangularis apice acutiuscula.

---

(1) L' articolazione terminale del terzo articolo quale si vede nel mio unico esemplare, toglie ogni dubbio sull' esistenza necessaria di un quarto articolo. Ma non mi consta in verun modo che questo sia l' ultimo.

DISTINTA DELLE ABBREVIATURE PRATICATE NELLA TAVOLA PRECEDENTE.

ABBREVIATURE.	
A. S.	Signori Amyot e S
Br. o B.r	Brullè.
Burm. o Brm. e B.m	Burmeister
Encycl. o Enc.	Encyclope — Artic
Fab.	Fabricius.
Fall.	Fallen.
Geoffr.	Geoffroy.
G.r o Gr. e Germ.	Germar.
Guer.	Guerin.
Hn. o H.n	Hahn.
Herr. Sch.	Herrich-S
Hoffm. o Hoffmg.	De Hoffma
K.by o Kby	Kirby.
Kl.	Klus.
Lap.	De Laport
Latr.	Latreille.
L. Duf.	Leone Duf
L. F.	Leone Fai
Lef.	Alessandro
Lin.	Linneo.
Perch.	Percheron.
Thunb.	Thunberg.
Sch. o Schill.	Schilling.
Swed.	Sweder.
Curt.	Curtis.
Westw.	Westwood.

DI ALCUNI GENERI D' INSETTI ARTROIDIGNATI

NUOVAMENTE PROPOSTI

DAL SOCIO ATTUALE

SIGNOR MARCHESE MASSIMILIANO SPINOLA

NELLA SUA TAVOLA SINOTTICA DI QUESTO ORDINE

CHE PRECEDE LA PRESENTE MEMORIA

Ricevuta il 7 Dicembre 1849.

PENTATOMITAE. I. G. Caternaultiella, m.
Scutelleroideae. N. 7.[bis] *Tab. synopt.*

Antennae in paginâ inferiore capitis propè angulos posteriores paulo ante oculos insertae, saltem quadri-articulatae: articulis primis sub cylindricis crassitudine sub-aequalibus, primo breviore, secundo plus tertio longiore. Quartus deest. (1)

Caput, mediae magnitudinis, horizontale supra depressum ferè concavum, laeviter marginatum, anticè rotundatum, lateraliter sinuatum, posticè arcuatum.

Oculi magni, transversim oblongo-ovati, in gibbositatae laterali insiti, valdè prominuli et angulos posteriores capitis occupantes.

Ocelli duo, in vertice, propè marginem posteriorem, inter se et ab oculis aequè distantes.

Vertex magnus, posticè arcuatus, angulis posterioribus abruptè attenuatis et ponè oculos visibiliter productis.

Frons parva angusta sub-triangularis apice acutiuscula.

---

(1) L' articolazione terminale del terzo articolo quale si vede nel mio unico esemplare, toglie ogni dubbio sull' esistenza necessaria di un quarto articolo. Ma non mi consta in verun modo che questo sia l' ultimo.

Genae medium versus paginae superioris capitis incipientes, a fronte suturâ sulciformi separatae, latae, fronte duplo longiores, ultra frontem rectâ longitudinali conjunctae et conjunctim anticè rotundatae.

Canalis inferus ultra caput obsoletus, posticè apertus, sub capite paretibus lateralibus paulo elevatis.

Maxilla inferior tenuis, elongata, ultra coxas tertii paris in quiete protensa, quadri-articulata. Articulus primus rectus brevior, crassior, in canali infero vix recipiendus et sub pectore non producendus, originem habet ab insertione antennarum et ab aperturâ oris aequè distantem. Reliqui tenuiores: secundus primo ferè plus duplo longior, paulo arcuatus; ultimi duo recti; tertius omnibus longior; ultimus dimidio brevior, apice obtusus. *Apparatus manducatorius*, in meo sperimine, ultra maxillae articulum ultimum paulo exsertus.

Clypeum, vix conspicuum. *Appendix clypealis* tenuis elongatus sub-linearis, in cavitate maxillari partim reconditus, sed saltem ad articulum secundum perveniens.

Pectus laeviter et uniformiter convexum. Prosternum bilobum, lobis rotundatis sub capite productis, origine antennarum tamen in quiete detectâ. Mesosterni linea media longitudinalis, in medietate anteriore tantùm, paulo elevata. Metasternum planum, anticè et posticè rectâ truncatum.

Venter in mare (fœminam non vidi) convexus, margine externo rotundato integro, segmentis anterioribus sex stigmatiferis, trachearum ostiis propè marginem exteriorem in extremitate rimulae transversae profundè impressae, segmentis 2-5 posticè emarginatis, emarginaturâ a 2.*do* ad 5.*tum* gradatim auctâ, in secundo latè rotundatâ, in quinto angulatâ acutâ; 6.*to* inflato integro; ultimo sive *apparatu externo partium genitalium*, abruptè verticale, unde dici potest *abdominis apex rectâ truncatus*.

Prothoracis dorsum laeviter convexum, anticè declive, trapezoideum, angulis omnibus rotundatis, medio profundè transversim impressum, antice immarginatum, verticem ambiens, margine postico latiore recto.

Scutellum magnum, totum abdomen obtegens, semi-circulare, in marc posticè emarginatum.

Alarum superiorum pars coriacea triangularis, nervis longitudinalibus elevato-costatis conspicuis, radio simplici, idest, sine illâ dilatatione corneâ prope basin plus minusve observandâ in nonnullis *Scutelleroideis* et praesertim in plerisque speciebus *G. Plataspis*. — *Earumdem pars membranacea*, nervis septem rectis aut vix arcuatis, sub parallelis, ab origine prodeuntibus et ad marginem externum pervenientibus, septimo quadrifido, cellulis omnibus posticè apertis.

Pedes, mediae magnitudinis, simplices, gressorii. *Tibiae* prismaticae, triedrae, lateribus costatis. *Tarsi* tri-articulati, articulo primo minimo et oculo nudo vix visibili, reliquis subtûs setaceis, tertio duobus aliis unâ longiore, bi-unguiculato, unguiculis tenuibus simplicibus, appendicibus sub-ungularibus vix conspicuis.

Species unica. — Caternaultiella guineensis, m.

Longa 7 millim. — Lat. in mediâ scutelli longitudine, 4 millim.

Caternault. Nigra, supra opaca, subtûs nitida. Appendix clypealis, maxilla inferior, tarsorum articuli 1.^{us} et 3.^{us} dilutè brunei. Oculi rubri. Alae superiores fuscescentes. Corpus totum punctatissimum, punctis impressis paginae superioris difformibus confluentibus aut confusis, iisdem paginae inferioris conformibus rotundatis discretis.

Un maschio della Guinea, raccolto dal Sig. Caternault e trasmessomi dal Sig. Buquet. Gli occhi quasi pedonculati bastano a distinguere la *Caternaultiella* dalle *Scutelleroidee genuine* le più affini, cioè dalle *Plataspidi* e dalle *Captosome*. Questo carattere isolato la ravvicinerebbe al *G. Podops* che partiene ad altra sotto-famiglia.

Sono persuaso che allorquando si avranno altri individui e i due sessi di questa specie, se si scopriranno altri connotati de' medesimi caratteri più essenziali, alcune delle particolarità comprese nella descrizione del genere avranno da passare nella descrizione della specie. Questa osservazione si applica egual-

mente a tutti gli altri generi nuovi che sono per trattare nella presente Memoria.

A proposito del *G. Plataspis*, comunque il tipo ne sia appieno conosciuto, non stimo inopportuna la descrizione di altra specie inedita che ci darà un esempio di una singolarità rara in questa sotto-famiglia, cioè, *la disparità del capo nei due sessi della medesima specie.*

Plataspis dispar, m. subtûs nigra, supra flavo irrorata, scutelli medietate minus maculata, *antennis pedibusque flavis.* ♂♀

Grandezza della *Plat. cocciformis*, Hope. Testa della femina, modellata esattamente sul medesimo tipo. Testa del maschio di diversissima apparenza. Le guancie (*genae*) acquistando un volume anormale, dopo essersi piegate in dentro immediatamente innanzi agli occhi, si dilatano bruscamente descrivendo un arco di circolo terminato in angolo curvilineo acuto, indi congiuntamente inoltrate al di là della fronte descrivono insieme un arco di cerchio rientrante, onde si potrebbe dire con ragione *capitis margine antico lunato*. Ho avuto sotto agli occhi tre maschi e una femina procedenti dalle raccolte dello stesso Signor Caternault nella costa di Guinea. Le forme della femina sono perfettamente conformi a quelle delle altre *Plataspidi* del medesimo sesso. I maschi solo sono anormali. Ma una particolarità sessuale non è ammissibile a carattere generico.

PENTATOMITAE. II. G. Omyta, m.

Halysoideae. *N. 32. Tab. synopt.*

Antennae ferè longitudinis corporis, quadri-articulatae. Articulus primus minimus (1), rudimentarius, e tuberculo laterali et infero capitis oritur, ante oculos et ferè sub eâdem lineâ

(1) Si potrebbe tenere questo piccolissimo articolo primo per la *Radicula* e allora le *Antenne* si direbbero tri-articolate. Questo modo di esprimersi mi sembra affatto arbitrario. Non vedo come la *Radicula* differirebbe da un vero quando fosse di grandezza apparente, uguale di sostanza cogli articoli seguenti e neppunto recondita nel tubercolo antennifero.

transversali ac maxillae origo; secundus medio incrassatus ultra capitis apicem longè productus; tertius tenuior cylindricus, praecedentibus multo longior; quartus certè ultimus, tertio similis et paulo brevior, sed secundo longior.

Caput, ut in plerisque *Halysoideis*, ante oculos valdè elongatum, sub-horizontale, propè basin convexiusculum, inde deplanatum et apicem versus etiam concavum, utrinque marginatum margine crassiusculo, apice fissum, margine anteriore bilobo, lobis separatim semi-ellipticis.

Oculi laterales sessiles parum prominuli, rotundati, paulo antè angulos posteriores capitis.

Ocelli in vertice, ponè cantum postero-internum oculorum.

Vertex ponè oculos brevis ast visibilis, margine postico rotundato.

Frons angusta elongata, apice obtusa.

Genae fronte latiores ac longiores, sed nusquam arctè conjunctae, lateribus rectis parallelis, singularum apice ovato-rotundato.

Clypeum et *appendix clypealis* ut in praecedente. *Apparatus manducatorius* invisus.

Canalis inferus ad marginem posteriorem capitis usque prolongatus, posticè apertus, paretibus lateralibus elevatis.

Maxilla inferior, sub annulo primo abdominali in quiete protensa, quadri-articulata, articulis rectis, primo crassiore ultra canalem inferum posticè protenso et etiam in quiete apice libero, reliquis tenuioribus diametro sub-aequalibus a 2.^{do} ad 4.^{tum} longitudine gradatim decrescentibus, intermediis duobus subtùs canaliculatis, tertio apicem versus sensim dilatato, ultimo rectâ truncato.

Pectus laeviter convexum, prosterni mesosternique lineâ mediâ elevatâ costaeformi, metasterno deplanato.

Abdomen subtùs utrinque convexum, medio deplanatum et non canaliculatum, laminâ prima ventrali solâ in medio excavatâ pro recipiendo maxillae inferioris articulo ultimo. In singulo annulo stigmatifero, medium versus, rimula sinuosa transversa utrinque observanda: ostia trachealia, ante rimulas et propè abdominis angulos antero-externos.

Prothoracis dorsum metathoracem obtegens sed supra scutellum neutiquam productum, quadrilaterum transversum irregulare et partim curvilineum efficiens, latere anteriore, angustiore, arcuato-emarginato; exterioribus posticè divergentibus, medio intùs inflexis, posteriore latiore rotundato propè angulos postero-externos subsinuato.

Scutellum plus duplo longius quam latius, triangulare, basi rectum, utrinque propè apicem sinuatum, apice obtusum.

Alae superiores quiescentes, totum abdomen obtegentes. Pars coriacea major, basin ultimi annuli stigmatiferi attingens. Pars membranacea, cellulis 11 quarum una basilaris magna clausa et interdum transversim bipartita, duo propè marginem exteriorem angustae longitudinales et clausae, octo discoidales pariter angustae et longitudinales sed posticè apertae et gradatim introrsum decrescentes, nervis cunctis longitudinalibus ante marginem obsoletis.

Pedes, formae consuetae, elongati agiles ferè cursorii. *Tibiae* prismaticae triedrae. *Tarsi* subtus setacei, triarticulati, articulo primo reliquis unâ longiore, secundo minore obconico cum tertio arctius connexo, ultimo biunguiculato et biappendiculato; unguiculis edentulis, laminaeformibus apice aduncis, appendicibus membranaceis oblongo-ovatis.

Species unica. — Omyta Deyrollei, m.

Omyta griseo-virescens punctis impressis brumeo-fuscis adspersa, lineâ media dorsali ab apice frontis ad extremitatem scutelli ductâ latè flavescente.

Long. 17 millim. —Lat. in mediâ abdominis longitudine, 8 millim.

Antennae nigrae, articuli ultimi basi et annulo medio brunneis. Puncti impressi fuscescentes, subtus rariores, supra etiam discreti saepius lineatim dispositis, lineis transversis irregularibus infractis. Dorsi linea media, capitis prothoracis scutellique margino lateralis, scutelli maculae humerales, alarum superiorum radius incrassatus, flavi. Anguli extimi segmentorum abdominalium, macula media in singulâ laminâ ventrali, ostia tra-

chealia, nigri. Pedes sordidè flavescentes bruneo irrorati, punctis impressis minus excavatis.

In utroque sexû, laminae ventrales stigmatiferae a 2.^{da} ad ultimam gradatim profondius emarginatae. *In foeminâ*, segmentum ultimum genitalia sistens lobulis quinque-oblongis acutiusculis terminatum, unde *abdominis apex quinquefidus*. *In mare* segmentum idem simplex indivisum, basi verticale, posticè horizontale, margine extimo arcuato-emarginato, angulis emarginaturae acutis unde *abdominis apex lunatus*.

Della Nuova Ollanda, avuta dal Sig. Deyrolles.

Questo genere ci porge un curioso esempio della correlazione che esiste frequentemente fra le forme rispettive dello sterno e della mascella. La carena risaltante sulla linea media del prosterno e del mesosterno sembrerebbe impedire alla mascella di distendersi orizzontalmente sotto del petto. Eppure è questa la sua posizione normale nello stato di quiete, in grazia della propria scannellatura nella sua facciata opposta a quella che alberga l'apparato manducatorio. Il nome *Omyta* è un anagramma di *Omyot* cognome dell'insigne Naturalista, che si è distinto da tutti per essersi fatto padrigno a un popolo immenso d'insetti da esso lui ribattezzati con nomi cosmopoliti. So di non offendere il *pudore delle lingue* e spero non sorprendere quello dell'inesauribile Nosogenetro, cercando nel cognome di lui dottissimo, il mezzo di scampare dalle parole di estranea origine, mutuate dalle lingue pure dotte, ma poco mercantili presso di noi, meno familiari dell' orientale civiltà.

PENTATOMITAE. III. G. Encosternum, m.

Edessoideae. N. 41. *Tab. synopt.*

Antennae, in paginâ inferiore capitis propè marginem externum inter oculos et maxillae inferioris originem insertae, mediae longitudinis et vix ad marginem posteriorem prothoracis subtus pervenientes, radiculâ interdum exsertâ et quinque articulis distinctis conflatâ, articulo primo crassiore capitis apicem

vix attingente, secundo ferè triplo breviore minus crasso cylindrico, tertio quoque cylindrico aliis longiore; 4.^{to} et 5.^{to} subaequalibus, quarto basi paulò coarctato, ultimo apice obtusè rotundato.

Caput horizontale planum oblongum semi-ovatum, lateraliter marginatum margine tenuè et laeviter reflexo, anticè ovatum integrum.

Oculi laterales, mediae magnitudinis, parum prominuli, in angulis posterioribus capitis.

Ocelli magis inter se quam ab oculis remoti, non longè a margine postico in origine suturae genas frontemque intercipientis.

Vertex post oculos nullus, posticè rectâ truncatus.

Frons a genis propè marginem posticum suturâ sulciformi distinctè separata, triangularis, lateribus rectis, angulo apicali acuto.

Genae etiam basi fronte latiores, multo longiores, inde arctè conjunctae et conjunctim rotundatae, margine integro.

Canalis inferus capite brevior, posticè clausus, parete transversali posticâ minus elevatâ.

Maxilla inferior crassior, brevis, vix originem pedum primi paris attingens, quadri-articulata, articulis quatuor a 1.^{mo} ad 4.^{tum} gradatim decrescentibus, primo in canali infero quiescente, ultimo apice rectâ truncato.

Pectus convexum, prosterni lineâ mediâ planâ, mesosterni medio longitudinaliter costato, costâ rectâ angustâ et parum elevatâ. *Metasternum* medio abruptè protuberante posticè angulatim emarginatum: protuberantiâ gladiiforme, anticè sub mesosterno ad originem pedum secundi paris usque productâ, subtus deplanata, utrinque ramulum breviusculum dentiformem emittente.

Venter medio carinatus segmento primo magis elevato, anticè acuminato et cum emarginaturâ angulosâ metasterni liberè articulato. Ostia trachearum abdominalium parva, et magis quam in praecedentibus a margine exteriore remota. Rimulae consuetae abbreviatae, punctiformes et ostia altera simulantes. In utroque sexû, segmenta cuncta stigmatifera plus minusve

arcuato-emarginata. *In foeminâ*, ultimum genitalia sistens videtur tripartitum, valvis lateralibus integris, laminâ intermediâ breviorè emarginatâ, unde *abdominis apex emarginatus*. *In mare* segmentum idem magnum, indivisum, convexum, medio subtûs carinatum, margine rotundato oblongo, unde *abdominis apex ovatus*.

Prothoracis dorsum convexum, anticè declive, transversum, trapezoideum, latere anteriore angustiorè recto, exteribus duobus, arcuatis divergentibus; posteriore latiore laeviter arcuato angulis anterioribus rectilineis apertis, posterioribus obsoletè rotundatis.

Scutellum triangulare, aequè longum ac latum, lateribus arcuatis et propè apicem sinuatis, apice obtuso.

Alae superiores quiescentes abdomen totum obtegentes, parte coriaceâ segmentum ante penultimum attingente. Pars membranacea sine cellulis transversis basilaribus, nervis plurimis 18-20 a basi immediatè prodeuntibus ante marginem terminatis. *Inferiores* membranaceae, homogenae.

Pedes validiores, gressorii. *Tibiae* rectae cylindricae extûs canaliculatae. *Tarsi* biarticulati, articulis duobus subaequalibus, subtus setaceis, 2.^{do} biunguiculato et appendiculato, unguiculis simplicibus, appendicibus conspicuis.

Species unica. — Encosternum Delegorguei.

Emost. flavescens, alarum superiorum limbo exteriore nigro, parte membranaceâ hyalinâ, nervis concoloribus.

Long. 22 millim. — Lat. major, in mediâ abdominis longitudine, 14 millim.

Corpus impresso-punctatum punctis minutis confusis, opacum, supra flavescens, subtus flavum rarius flavo-rubens. Capitis prothoracis et alarum superiorum partis coriaceae limbo exteriore tenui nitido nigro. Pedes cum antennis, dilutè flavescentes. Alarum superiorum pars membranacea hyalina, nervis concoloribus ferè translucidis.

Due femmine e un maschio della Caffreria, procedente dai viaggi del Sig. Delegorgue.

Quivi mi occorre annunziare l'esistenza di una *Edessoidea* proveniente dalla medesima località e raccolta dal medesimo viaggiatore. Non dubito di doverla ritenere per tipo di altro genere vicino all'*Encosternum*, ma non ho potuto assegnarle il congruo posto nella Tavola sinottica per esserne l'unico esemplare mutilato e mancante delle sue antenne.

Convengono i due generi nella forma della testa, nelle rispettive dimensioni delle guancie e della fronte, nella brevità della mascella inferiore, nelle condizioni del prosterno e del canale infero e perfino nei tarsi egualmente biarticolati. Ma differiscono nella protuberanza metasternale più picciola nel secondo, meno rilevata e sublime, alquanto liberamente prolongata sotto al mesosterno, piuttosto tubercoliforme che gladiiforme. Viemmaggiormente differiscono nella protubescenza mediana del mesosterno, nel secondo pure molto più risultante che nell' *Encosterno*, lateralmente compressa lamellosa e conforme a quale si vede nelle specie volgari dei *G. Acanthosoma* e *Clinocoris*. Siccome differenze di minor momento, addurremo sussidiariamente le tibie prismatiche e triedre, i lati esterni del protorace non che i contorni esterni degli anelli abdominali orizzontali e singolatamente rotondati e dilatati. — Grandezza del *Pycanum amethysticum*. — Colore del cadavere disseccato, un sordido griggio che ha potuto essere giallognolo o verdastro nell' insetto vivente. Ho intitolato l' individuo della mia collezione *Natalicola Delegorguei*.

PENTATOMITAE. IV. G. Myota, m.

Edessoideae. N. 46. *Tab. synopt.*

Antennae in paginâ inferiore capitis a cavitate superâ tuberculis cylindriformis prodeuntes, inter oculos et maxillae inferioris originem, oculis propiores, mediae longitudinis, vix ad posteriorem prothoracis marginem subtus producendae, quinque-articulatae, articulis quatuor primis, sub-cylindricis, primo crassiore genarum apicem attingente et non superante, reliquis

tenuioribus diametro sub-aequalibus, 2.do breviore, 4.to longiore. Ultimus deest (1). *Radicula*, aut nulla, aut in cavitate tuberculi antenniferi prorsùs recondita.

Caput horizontale planum triangulare acuminatum, apice minus profundè angulatim emarginatum, utrinque ante oculos marginatum, margine tenui supra reflexo.

Oculi oblongi, laterales, in angulis posterioribus capitis.

Ocelli propè capitis marginem posticum, magis inter se quam ab oculis remoti.

Frons angusta elongata sub-triangularis, angulo apicali acuto.

Genae basi latitudinem frontis superantes, inde apicem versus sensim coangustatae, lateribus rectis anticè convergentibus, fronte saltem duplo longiores, ultra frontem rectâ longitudinali conjunctae, apice separatim angulatae.

Canalis inferus post caput non protensus et posticè sensim obliteratus, paretibus lateralibus minus elevatis.

Maxilla inferior in hac sub-familiâ, longior et originem pedum secundi paris attingens, quadri-articulatae: articulo primo crassiore, etiam ab origine libero, breve, sub pectore neutiquam producendo; reliquis tenuioribus, diametro sub-aequalibus, 2.do et 3.tio singulatim saltem primo plus duplo longioribus, ultimo rectâ truncato.

Pectus uniformiter convexum. *Prosternum* planum. *Mesosternum* posticè emarginatum, lineâ mediâ longitudinali elevatâ costaeformi. *Metasternum* nullomodo protuberans, in emarginaturâ acutâ prosterni, inter coxas pedum secundi paris anticè productum.

Venter convexus, sine carinâ mediâ, annulo primo nec spinoso nec tuberculato. Rimulae consuetae, laterales et transversae, rectae, conspicuae. Ostia trachealia, ante rimulas et istis propiora.

Prothoracis dorsum convexum, anticè declive, hexagonale, latere anteriore angustiore profundè et arcuatim emarginato;

---

(1) Vedi la nota (1).

lateribus antero-externis valdè divergentibus incurvatis medio intûs inflexis posticè extûs devaricatis, postero-externis brevioribus rectis posticè convergentibus, margine posteriore, recto, angulis exterioribus curvilineis prominulis extûs prolongatis tuberculi-formibus apice acutis, posterioribus rectilineis valdè apertis.

Scutellum plus longius quam latius, triangulare, basi rectum, utrinque acute sinuatum, apice rotundatum.

Alae superiores quiescentes totum abdominis dorsum non obtegentes, parte coriaceâ, extûs arcuatâ segmentum quartum non superante. In parte membranaceâ, nervi 9 vel 10 longitudinales ab altero nervo transverso sub-basilari prodeuntes, propè marginem extimum evanescentes, cellulae cunctae elongatae angustae incompletae posticè apertae.

Pedes gressorii, mediae magnitudinis et formae consuetae. *Tibiae* cylindricae, extûs subtiliter canaliculatae. *Tarsi* setacei, distinctè tri-articulati, articulo 2.^{do} reliquis dimidio breviore, 1.^{mo} et 3.^{tio} longitudine sub-aequalibus, ultimo, ut in praecedentibus.

Species unica. — Myota Buquetii, m.

Myota supra brunnea viridi-metallico nitens, subtus flavescens.

Long. totius corporis 14 millim. — Lat. inter angulos exteriores prothoracis, 8 millim. — Ead. in basi abdominis, 7 millim. — Ead. in medio abdominis, 9 millim.

Antennae, articulo primo flavescente, sequentibus tribus nigris, secundi apice tertii-que basi albis. Caput supra granulatum rugosiusculum, viridi-metallico splendens, genarum basi-brunneâ. Prothoracis dorsum impresso-punctatum, punctis in disco sèmper discretis et saepe distantibus, propè margines laterales adproximatis confluentibus confusis et interdum rugaeformibus, interstitiis disci impunctatis brunneis, reliquâ superficie viridi nitente. Scutellum et alarum pars coriacea brunnea, pariter impresso-punctata punctis discretis viridi nitentibus. Pars membranacea, in cadavere, sordide flavescens, (in specimine vivo, ut suspicor, aurato splendens?) nervis concoloribus.

Corpus subtus nitidum flavescens, crebrius sed minus profundè punctatum punctis discretis brunneis, pleuris mesothoracis opacis transversim ac sinuosè rugosiusculis. Annulorum sex stigmatiferorum angulis posterioribus acutè prominulis, abdominis lateribus sex-dentatis, dentibus serratis. Pedes flavidi. — *In foeminâ* (marem non vidi) segmentum ultimum ventrale genitalia sistens, ut in foemina *Omytae*, quocirca abdominis apex subtus visus dici posset pariter quinquefidus, tamen propter ultimam laminam dorsalem rotundatam integram multo majorem et totum segmentum obtegentem, rectius dicendum esset *abdominis apex rotundatus, major.*

Due femine del Brasile, avute dal Sig. Buquet, a cui dedico la specie. — *Myota*, altro anagramma dell'insigne cognome *Amyot.*

PENTATOMITAE. V. G. Delegorguella, m.
Edessoideae. N. 51. *Tab. synopt.*

Antennae in paginâ inferiore capitis, a tuberculo cylindrico et paulo elevato prodeuntes, ab oculis et ab origine maxillae inferioris aequè distantes, 5 articulatae: radiculâ nullâ vel reconditâ; articulo 1.^{mo} crassiore breviore capitis apicem vix attingente; 2.^{do} et 3.^{tio} tenuioribus singulatim primo ferè plus duplo longioribus, arctius connexis, sub-aequalibus, conformibus, cylindraceis; 4.^{to} et 5.^{to} alios longitudine superantibus distinctius articulatis difformibus, 4.^{to} obconico apice incrassato, ultimo, basi crassiore apice sensim attenuato oblongo-ovato.

Caput planum horizontale utrinque marginatum, margine laterali carinaeformi neutiquam supra reflexo, margine anteriore integro rotundato.

Oculi rotundi, prominuli, in angulis posterioribus capitis.

Ocelli ut in praecedentibus.

Frons angusta, elongata, lateribus rectis parallelis, apice laeviter arcuata.

Genae a fronte paulo ante ocellos suturâ sulciformi distinctè separatae, ipsâ multo latiores at non longiores, extùs arcuatae et in margine antico unâ cum fronte conjunctim rotundatae.

Canalis inferus capite brevior, posticè apertus, parietibus parallelis elevatis.

Maxilla inferior ferè ab aperturâ oris prodiens et originem pedum secundi paris in quiete attingens, quadri-articulata, articulo primo crassiore, reliquis tenuioribus, 2.^{do} et 3.^{tio} longioribus subaequalibus, ultimo apice obtuso.

Pectus laeviter convexum, sterno deplanato, mesosterni lineâ mediâ etiam concavâ.

Venter uniformiter convexus absque carinâ mediâ, margine exteriore integro: segmento anteriore nec spinoso nec tuberculato. In singulo annulo stigmatifero, propè marginem exteriorem, rimula recta transversa minus profundè impressa, ostiumque tracheale in extremitate externâ singulae rimulae.

Prothoracis dorsum parum convexum, minus declive, in parte anticâ etiam horizontaliter dilatatum et ferè deplanatum, trapezoideum, trapezû curvilineo posticè latiore, latere antico in medio arcuatim emarginato utrinque laeviter sinuato, lateribus exterioribus posticè divergentibus dilatato-rotundatis, posteriore latiore ante scutellum recto utrinque arcuato, angulis omnibus obsoletè rotundatis.

Scutellum et alarum pars coriacea ut in praecedente.

Pedes gressorii, mediae magnitudinis. *Tibiae* prismaticae triedrae, anteriores quatuor rectae, posteriores longiores paulo incurvatae et lateraliter compressae. *Tarsi* subtûs setacei, tri-articulati, articulo primo crassiore, secundo minore obconico cum tertio arctius connexo, ultimo ut in praecedentibus.

Species unica. — Delegorguella elliptica, m.

Deleg. oblongo-ovata, planiuscula, distinctè impresso-punctata, pallidè griseo-brunneo irrorata.

Long. 14 millim. — Lat. major in mediâ abdominis longitudine, 8 millim.

In utroque sexu, corpus glabrum, tibiarum costae villosae pilis albidis. Ventris segmenta sex anteriora stigmatifera, margine posteriore recto, posteriorum quatuor angulis omnibus

nigro maculatis. Antennae flavae immaculatae. Pedes brunneo irrorati. Alarum superiorum pars membranacea griseo-brunnea, nervis concoloribus.

In foeminâ, puncti quatuor nigri sub eâdem lineâ transversali in medietate anteriore prothoracis. Ventris dischus rubescens, fasciae duo sub-marginales ostia trachealia includentes brunneo-nigrescentes. Segmentum ultimum genitalia sistens ut in *Encosterno*, valvulis lateralibus magis rotundatis, *abdominis apice integro.*

In mare, maculae duo nigrae approximatae in medietate anteriore prothoracis. Ventris fasciae sub-marginales latiores, dischus neutiquam rubescens, lamina ultima ventralis brevis concava arcuato-emarginata, angulis emarginaturae parum productis, ultima dorsalis latior et latius emarginata, alteram non obtegens, *abdominis apice emarginato.*

Due femine e un maschio della Caffreria, procedenti dalle raccolte del Sig. Delegorgue.

PENTATOMITAE. VI. G. Sagriva, m.

Edessoideae. N. 54. *Tab. synopt.*

Antennae in margine inferiore capitis, propè marginem exteriorem, paulo ante oculos et longè ab origine maxillae, in tuberculo recto cylindrico insertae, crassae, mediae longitudinis, vix posteriorem prosterni marginem attingentes, radiculâ conspicuâ sed partim in tuberculo antennifero recondita et articulis quatuor magnis conflatae: articulo primo obconico capitis apicem superante; secundo et tertio basi rectâ truncatis, prismaticis, sulcis duobus sub-marginalibus supra longitudinaliter exaratis, marginibus incrassatis, secundo longiore, ultimo tenuiore basi sensim coarctato in medio sub-cylindrico, apice attenuato ellipsoideo.

Caput planum horizontale marginatum, margine tenui sensim supra reflexo, anticè fissum, utrinque rotundatum.

Oculi sessiles globosi prominuli, in angulis posterioribus capitis. *Ocelli*, ut in praecedentibus.

Frons parva, vertice brevior, triangularis, angulo apicali acuto.

Genae fronte latiores ac longiores, nihilominus ultra ipsam nusquam conjunctae, supra concavae, paulo ante oculos in dentem rectangulum extûs prominentes, abruptè intûs inflexae, inde apicem versus sensim arcuatae, lateribus internis rectis parallelis adproximatis sed non contiguis.

Canalis inferus abbreviatus, parietibus lateralibus elevatis ab oris aperturâ gradatim altitudine decrescentibus et ante capitis marginem posticum evanescentibus.

Clypeum rudimentarium. *Appendix clypealis* sub-linearis, basi transversim strigatus, apicem versus in articulo secundo canalis maxillaris partim reconditus. *Apparatus manducatorius* invisus.

Maxilla inferior ab oris aperturâ incipiens et ad coxas posteriores usque in quiete protensa, quadri-articulata, articulo primo validiore ab origine libero et ultra caput sub pectore producendo, reliquis tenuioribus, secundo longiore arcuato, ultimis duobus rectis, quarto breviore apice obtuso.

Pectus utrinque laeviter convexum, sterno deplanato, mesosterno longitudinaliter canaliculato.

Venter valdè convexus, laminâ anteriore medio acutâ et in emarginaturâ posticâ metasterni introductâ, sed nec spinosâ nec tuberculatâ. Segmenta quinque anteriora stigmatifera, ostiis trachearum rotundatis conspicuis a rimulâ transverso laterali singuli segmenti et a margine anteriore aequè distantibus, rimulis bisinuatis minus profundè impressis. — *In foeminâ*, (marem non vidi) annuli 1-4 posticè recti; quintus in medio arcuato-emarginatus emarginaturâ semi-circulari segmentum sequens circumdante; sextus minor fissus verticalis, stigmatibus carere videtur; ultimus quadri-partitus, lobulis separatim rotundatis; lamina superior ultima integra, arcuatim tri-emarginata; *abdominis apex quadrilobatus.*

Prothoracis dorsum planum, anticè declive, posticè dilatatum, trapezoideum; latere anteriore tri-emarginato, emarginaturis arcuatis, mediâ latiore caput ambiente; lateribus exterioribus

rectis aut paulo intûs inflexis, posticè divergentibus, visibiliter marginatis, margine tenui costaeformi; posteriore latiore, utrinque convexiusculo, medio latè emarginato.

Scutellum tertiam laminam dorsalem non superans, sub-triangulare, aequè longum ac latum, basi rectum, utrinque sinuatum, posticè obtusum latè rotundatum.

Alae quiescentes, nec latera nec apicem abdominis obtegentes. Pars coriacea superiorum scutellum vix superans, margine externo arcuato. Partis membranaceae nervi sex elevato-costati a basi immediatè prodeuntes cellulas quatuor difformes includunt, inde ramulos emittunt plures rectos et ante marginem evanescentes, cellulis marginalibus cunctis apertis et incompletis.

Pedes validi, gressorii, formae consuetae. *Tibiae* rectae, minus elongatae, prismaticae, triedrae, ostiis lateralibus tenuibus pilosis. *Tarsi* primi paris ut in *Delegorguella*. Reliqui desunt.

Species unica. — Sagriva vittata, m.

Sagriva nigra, opaca, supra confusim punctulata, subtilissimè rugosa, vittâ latâ flavâ a capitis apice ad extremitatem posteriorem scutelli ductâ.

Long. 19 millim. — Lat. in margine posteriore capitis, 3 millim. — Ead. inter angulos anteriores prothoracis, 5 millim. — Ead. inter angulos posteriores ejusdem, 9 millim. — Ead. in mediâ abdominis longitudine, 12 millim.

Antennae nigrae, articulo ultimo brunneo. Caput, prothoracis dorsum, scutellum, alarum superiorum pars coriacea, nigra: vitta lata a margine anteriore capitis ad apicem scutelli per medium dorsi ductâ flavâ. Vittae duo sub-marginales prothoracis costaeque elevatae partis coriaceae alarum superiorum itidem flavae. Scutellum transversim strigatum, strigis distantibus laeviter impressis. Alarum superiorum pars membranacea minus mollis, rugosiuscula, colorata, flavescens, vix translucida, costis elevatis nigris. Alae inferiores hyalinae, nervulis nigrescentibus. Abdominis dorsum nigrum, vittâ longitudinali mediâ maculisque lateralibus flavis. Corpus subtûs flavescens, vittis

duobus lateralibus a margine anteriore propectoris ad angulos extimos annuli quinti, maculis nonnullis in margine laterali abdominis ostiorumque trachealium perimetris nigris, istis laevibus nitidis.

Una femina delle Indie orientali, vendutami in pessimo stato dal mercante Dupont. *Sagriva*, nome della mitologia bramanica.

Non voglio lasciare le *Edessoidee* senza aver fatto parola di una specie inedita procedente pure dalle raccolte del Sig. Delegorgue nella Sud-Africa orientale. Questa si contraddistingue dalle specie del *G. Phyllocephala* per avere la parte membranacea delle ali superiori reticolate, cioè *a più file di maglie chiuse e variformi.* Questo carattere a mio senso artifiziale è il principale distintivo de' *G. Brochymena*, *Cyclopelta* ecc., che ho ammessi nella Tavola sinottica per puro rispetto alla cosa giudicata. Non ho stimato di seguitare spontaneamente questo abusivo esempio. Nondimeno per chi il giudicasse obbligatorio, intitolerei *Amacosia* il gruppo addimandato poichè ne sembra la specie-tipo scoperta nei paesi degli *Amacosi.*

Amacosia Delegorguei, m. — Long. 15 millim. - Lat. 10 millim. — Antennae in paginâ inferiore capitis, propè marginem exteriorem, longius ab oculis, ferè sub eâdem lineâ transversali ac maxillae origo, in tuberculo parvo globuloso insertae, crassiusculae, breves et vix dimidium prothoracis dorsum superantes, visibiliter 5-articulatae: articulo primo toto exserto crasso subcylindrico, ultra caput haud protenso; sequentibus a 2.^{do} ad 4.^{tum} gradatim magis dilatati et depressi, 2.^{do} et 3.^{tio} rectis, 3.^{tio} breviore, 4.^{to} longiore utrinque arcuato; quinto et ultimo praecedentis longitudinis, minus depresso angustiore recto basi coarctato, apice attenuato-rotundato. Genae quam in *Phyllocephalis* plus breviores, ultra frontem rectâ longitudinali conjunctae. Reliquae capitis partes prothoracis dorsum pectus et venter ut in *Phyllocephalis.* Scutellum minus elongatum utrinque profundius sinuatum, apice latius rotundatum. Alae quiescentes abdomen totum obtegentes. Superiorum pars coriacea vix segmenti tertii stigmatiferi medietatem attingens, margine postico sinuato.

Pars membranacea reticulata, cellulis omnibus clausis difformibus, plerisque plus longioribus quam latioribus irregulariter quadrangularibus. Pedes validi, tibiis prismaticis triedris, costis subtiliter serratis pubescentibus. Tarsi tri-articulati, articulis subtùs setaceis, primo maximo reliquis unâ longiore sub-cylindrico, secundo breviore obconico, tertio bi-unguiculato et bi-appendiculato, unguiculis simplicibus, appendicibus abbreviatis. Antennae nigrae. Corpus totum nigro-cuprascens, confusim punctatum, subtûs rugosiusculum, supra magis inaequale punctis rugisque profundius impressis. Scutello scutique prothoracis parte posticâ elevatiore transversim strigatis, strigis excavatis rectis parallelis distantibus. Alarum superiorum pars membranacea pallidè flavescens, costis obscurioribus. Pedes nigri.

Due femine e un maschio.

PENTATOMITAE. VII. G. Thoreyella, m.

Pentatomoideae. N. 63. *Tab. synopt.*

Antennae in paginâ inferiore capitis, paulo ante oculos et longè a maxillae origine, in tuberculo cylindrico sub-marginali insertae, vix angulos posteriores prothoracis attingentes, tenues, apicem versus sensim crassiores, quinque-articulatae: articulis quatuor primis conformibus tenuibus elongatis sub-cylindricis vel laevissimè obconicis, a 1.^{mo} ad 4.^{tum} gradatim crescentibus, primo breviore capitis marginem anticum non superante, quinto maximo basi coarctato apice oblongo-ovato.

Caput planum sub-horizontale, utrinque marginatum, margine tenui neutiquam supra reflexo, prothoracis marginem anticum posticè ambiens, margine anteriore rotundato integro.

Oculi, mediae magnitudinis, globosi, prominuli, angulos capitis posteriores occupantes.

Ocelli parvi, propè marginem posticum, inter se distantes et oculis proximiores.

Frons brevis triangularis, apice angulato acuto.

Genae basi ferè frontis latitudinis sed multo longiores, ultra frontem rectâ longitudinali conjunctae, utrinque ante oculos

rectis parallelis, indè sensim arcuatae et apice conjunctim rotundatae.

Canalis inferus, *maxilla*, *sternum*, ut in *G. Rhaphigaster*, Lap. (1).

Spina ventralis e lamina anteriore prodiens, basi latior, apice obtusa, liberè sub sterno producta, originem pedum secundi paris attingens.

Prothoracis dorsum posticè elevato-convexum, anticè declive, hexagonale, latere anteriore in medio arcuatim emarginato et utrinque ponè oculos rectâ obliquè truncati, lateribus antero-externis incurvatis intûs inflexis valdè divergentibus, postero-externis brevioribus rectis sub-parallelis, posteriore latiore laevissime arcuato; angulis anterioribus apertis, exterioribus acutis extûs prominulis, posterioribus rectis.

Scutellum triangulare, annuli quarti stigmatiferi marginem attingens, utrinque vix sinuatum, apice rotundatum.

Alae quiescentes, abdomen totum non obtegentes, superiorum parte coriaceâ posticè arcuatâ, earumdem parte membranaceâ parvâ, nervis quatuor longitudinalibus ab altero sub-basilari prodeuntibus et ante marginem extimum evanescentibus, cellulis omnibus posticè apertis.

Pedes ut in *Rhaphigastris*.

Species unica. — Thoreyella brasiliensis, m.

Thor. pallidè virescens, punctis nigris adspersa.

Long. 6 millim. — Lat. 4 millim.

Antennae pubescentes. Corpus supra virescens, impresso-punctatum, subtûs pallidè flavescens brunneo irroratum, stigmatum abdominalium perimetris callosis nitidis flavis, annulorum angulis posterioribus nigris. Alarum superiorum pars membranacea alba hyalina, nervis concoloribus. Pedes minus profundè impresso-punctati, virescentes nigro irrorati, setulis tarsalibus albidis.

Un maschio e una femina del Brasile, gentilmente donati dal Sig. Thorey di Amburgo.

È innegabile la somma affinità della *Thoreyella* coi *Rafigastri* (1). Le particolarità delle antenne, dello scutello e delle ale superiori sono differenze di poco momento e non escono dalle file de' caratteri meramente specifici. Ma non così quelle della struttura del capo. Il notevole avvanzamento delle gene al di là della fronte è sufficiente a dimostrare *l'impossibilità dell'innalzamento del primo articolo della mascella al di sopra dell' asse longitudinale del corpo durante l'atto della manducazione*, impossibilità che non sarebbe manifesta nei casi frequenti in cui l' origine della mascella è attigua all' apertura della bocca e in cui l'apertura della bocca è all'estremità anteriore della testa.

PENTATOMITAE. VIII. G. Hoffmanseggiella, m.
Pentatomoideae. N. 63. *Tab. synopt.*

Antennae filiformes, in pagina inferiore capitis, ab oculis et inter se ferè aequè distantes, in tuberculo parvo globuloso insertae, articulis quinque majoribus et radiculâ parvâ conflatae, radiculâ totâ exsertâ minutâ cylindrica, articulo primo reliquis breviore et crassiore capitis apicem non attingente, sequentibus quatuor conformibus tenuioribus cylindricis gradatim a 2.[do] ad 6.[tum] longitudine auctis, ultimo apice obtuso.

Caput elongatum et exclusis amborum oculorum diametris evidenter plus longius quam latius, utrinque obsoletè emarginatum, anticè rotundatum.

Oculi magni globulosi, sed sessiles et parum prominuli, in angulis posterioribus capitis.

Ocelli in postico verticis margine, oculis maximè proximi.

Canalis inferus ab oris aperturâ satis distans, capitis marginem posticum non attingens, posticè apertus, parietibus lateralibus valdè elevatis paulo arcuatis.

Maxilla inferior ferè sub eâdem lineâ transversali ac canalis inferus incipiens, longissima et ad quartam laminam ventralem

(1) Vedi *Cimex griseus*, *Fab. syst. Bhyng.*, 181 - 87.

in quiete protensa, quadri-articulata, articulo primo breviore in canali infero toto quiescente, secundo lateraliter compresso arcuato sub protuberantiâ mesosterni saepius protracto, ultimis duobus longioribus rectis, tertio longissimo et pedum tertii paris originem superante, quarto truncato.

Clypeum minimum. — *Appendix clypealis* sub-linearis, basi transversim plicatus, saltem ad medietatem tertii articuli maxillaris in quiete perveniens.

Pectus utrinque laeviter convexum: prosterno medio deplanato; mesosterni lineâ mediâ protuberante, protuberantiâ lateraliter compressâ lamellaeformi verticale, anticè altiore, subtûs arcuatâ, inter pedes primi paris liberè producta; metasterno posticè elevato-convexo sed non abruptè protuberante (1).

Abdomen margine exteriore rotundato integro. Venter convexus, medio abruptè protuberans, protuberantiâ longitudinali latâ et subtûs arcuato-rotundatâ; laminarum duarum anteriorum suturâ intermediâ in protuberantiâ ventrali omnino obsoletâ, laminâ primâ nec spinosâ nec tuberculatâ, sed anticè acuminatâ et in emarginaturâ angulosâ metasterni horizontaliter introductâ. Stigmata parvula, ante rimulas transversas minus profundè impressas propè marginem exteriorem vix conspicua. *In mare*, (foeminam non vidi) segmentum stigmatiferum penultimum, medio latè et profundè arcuato-emarginatum, ultimum magnum angulis posterioribus retrorsum porrectis acutis spinaeformibus, segmentum septimum genitalia sistens margine quinque-dentatum.

Frons angusta, elongata, genis paulo longior, lateribus rectis sub parallelis, apice obtuso.

Genae fronte basi latiores et paulo breviores, ante oculos intûs inflexae, indè sensim arcuatae et propè apicem cum fronte conjunctim rotundatae.

Prothoracis dorsum anticè elevato-convexum, posticè abruptè declive, hexagonale; latere anteriore, arcuatim emarginato,

(1) Della parte anteriore del metasterno, nulla posso dire; essendo stata spezzata dallo spillo infilzato.

margine incrassato; lateribus antero externis longioribus valdè divergentibus, intûs arcuato-inflexis immarginatis; postero-externis paulo brevioribus convergentibus bisinuatis; posteriore latiore immarginato, angulis exterioribus extûs prolongatis conico-acutis spinaeformibus.

Scutellum elongatum triangulare curvilineum, anticè latè arcuatum, utrinque sinuatum, apice ellipticum.

Alae quiescentes abdomen totum obtegentes, superiorum parte coriaceâ posticè rotundatâ, parte membranaceâ ut in plerisque *Pentatomoideis* nervis septem vel octo ab altero transverso sub-basilari vel ab ipsâ basi immediatè prodeuntibus rectis sub-parallelis, ante marginem extimum obsoletis, cellulis omnibus angustis elongatis posticè apertis.

Species unica. — Hoffmanseggiella frenata.

Hoffm. testacea, pedibus alarumque superiorum parte coriaceâ nigro punctatis.

Long. 12 millim. — Lat. propè basin abdominis, 6 millim. — Ead. inter angulos exteriores prothoracis, 9 millim.

Corpus cum antennis testaceum immaculatum, pedibus et alarum superiorum parte coriaceâ nigro-punctatis, earumdem parte membranaceâ albâ hyalinâ, nervis concoloribus, laminarum ventralium margine postico, exceptâ tamen protuberantiâ mediâ, rimulisque transversis lateralibus nigris.

Un maschio di Java, avuto dal Sig. Conte di Hoffmansegg, col nome di *Cimex frenatus.*

N. B. Tralascio appositamente di discorrere del *G. Platencha*, m. N. 67. *Tab. synopt.* L' unico individuo della mia collezione è attualmente troppo malconcio per rinvenirne con sicurezza i caratteri generici e non ardisco compromettermi delle note incomplete scritte *primo visu.*

PENTATOMITAE. IX. G. Hypogomphus, m.
Pentatomoideae. N. 69. *Tab. synopt.*

Antennae in paginâ inferiore capitis non longè a margine externo ferè sub eâdem lineâ transversali ac maxillae origo

insertae, ab eâdem et ab oculis aequè distantes, longiores et ultra prothoracem supra scutellum producendae, articulis quinque majoribus et radiculâ parvâ conflatae, tuberculo antennifero obsoleto, radiculâ exsertâ corneâ minimâ, articulis quinque conformibus distinctis basi coarctatis sub-cylindricis, diametro ferè aequalibus, a 1.^{mo} ad 5.^{tum} gradatim longitudine crescentibus, primis quatuor apice rectâ truncatis, ultimo attenuato apice rotundato.

Caput planum anticè declive, trapezoideum, posticè dilatatum, marginatum, margine tenui carinaeformi reflexo, apice rectâ truncato.

Oculi magni, globosi et valdè protuberantes, sessiles nihilominus, in angulis posterioribus capitis.

Ocelli aut nulli, aut vix conspicui.

Canalis inferus ab oris aperturâ incipiens, brevis, posticè apertus, parietibus lateralibus alto-elevatis rectis parallelis.

Maxilla inferior sub eâdem lineâ transversali ac canalis inferus incipiens, ultra pedes tertii paris in quiete protensa, quadri-articulata, articulis omnibus rectis, a primo ad quartum tam longitudine quam latitudine gradatim decrescentibus, primo capite longiore et sub prosterno in quiete protenso, intermediis duobus in *paginâ sternali* (1) longitudinaliter sulcatis, ultimo truncato.

Corpus supra minus subtûs valde convexum, pectore tamen deplanato; mesosterni lineâ media longitudinali carinulatâ, carinulâ in sulculo maxillari recipiendâ.

Abdomen subtûs maximè sed uniformiter convexum, annulis quinque anterioribus stigmatìferis, ostiis trachearum in extremitate exteriore rimularum transversalium, his abbreviatis et minus profundè impressis. *In foeminâ*, (marem non vidi) laminae ventrales 2-4 posticè late emarginatae, quinta magna

(1) La facciata che diresti *superiore* nell' atto della manducazione diventa *inferiore* negli intervalli del riposo. A scanso di equivoco, diremo *linguale* quella che dà ricetto all' apparato manducatorio, e *sternale* quella che si appoggia contro allo sterno nello stato di quiete normale.

sequentem circumdans, haec fissa ferè verticalis stigmatibus nullis aut reconditis, ultima genitalia sistens quadri-partita margine integro, *abdominis apex rotundatus*.

Frons angusta, capitis apicem attingens, lateribus rectis parallelis.

Genae fronte latiores neutiquam longiores, extûs arcuatae, apice cum fronte rectâ truncatae.

Prothoracis dorsum hexagonale, latere anteriore immarginato latè arcuatim emarginato et verticis marginem posticum circumscribente; lateribus antero-externis divergentibus sub-sinuatis marginatis, margine incrassato; postero-externis multo brevioribus, paulo convergentibus, immarginatis; posteriore latiore recto; angulis omnibus rectilineis, anterioribus ponè oculos sub-sinuatis, exterioribus acutis prominentibus, posterioribus apertis.

Scutellum plus longius quam latius, annuli 5.^{ti} basin attingens, sub-triangulare, basi rectûm, utrinque intûs inflexum, apice rotundatum.

Alae quiescentes nec abdominis latera nec apicem obtegentes. Superiorum pars coriacea maxima, extûs rotundata, posticè rectâ, oblique truncata. Earumdem pars membranacea parva rudimentaria opaca rugosa, nervis obliteratis. *Alae inferiores* minimae et volatui ineptae.

Pedes, formae consuetae, gressorii, inermes. *Tibiae* prismaticae triedrae, costis exterioribus incrassatis. *Tarsi* tri-articulati, articulis distinctis, primo majore, secundo minore, tertio bi-unguiculato et bi-appendiculato, unguiculis edentulis laminaeformibus aduncis, appendicibus conspicuis unguiculorum longitudinis.

Species unica. — Hypogomphus rugosus, m.

Hypog. niger flavo limbatus, impresso-punctatus, dorso medio inaequali rugoso.

Long. 9 millim. — Lat. in margine anteriore prothoracis, 3 millim. — Ead. inter angulos exteriores, 5 millim. — Ead. in medio abdominis, 6 millim.

Niger, scutelli alarumque superiorum intervallis impunctatis brunneis, prothoracis limbo exteriore radio coxis femorumque basi flavis. Corpus obovatum, punctatissimum. In capite, puncti impressi minuti creberrimi ast distincti; sub pectore iidem quoque distincti sed majores et rariores, in ventre minores et rariores interstitiis deplanatis laevibus ac nitidis, in prothoracis dorso et supra scutellum magni difformes confluentes interstitiis elevatis superficie inaequali rugosâ. Alarum superiorum pars membranacea obscura. Pedes nigri, coxis femorumque basi rufo-brunneis. Antennae corpori concolores.

Due femine di Sidney nella Nuova Olanda, avute dal Sig. Deyrolle.

PENTATOMITAE. X. G. Audinetella, m.

Pentatomoideae. N. 71. *Tab. synopt.*

Antennae in paginâ inferiore capitis, propè marginem exteriorem, sub eâdem lineâ transversali ac maxillae origo, in tuberculo recto sub-cylindrico insertae, filiformes (incertae longitudinis) quinque-articulata, radiculâ nulla aut prorsûs recondita, articulo primo crassiore cylindrico ultra genarum apicem non producendo, sequentibus 2-4 conformibus, magis elongatis, laeviter obconicis, 2.^{do} et 3.^{tio} sub-aequalibus, quarto longiore. Quintus deest. (1)

Caput exceptis amborum oculorum diametris, ferè triplo longius quam latius, anticè bilobum, utrinque marginatum margine reflexo, supra planum, paulo anticè declive, vertice ponè oculos transversim porrecto acuminato et angulos posteriores attingente. *Collum* breve, distinctum.

Oculi magni, globosi, valdè prominentes, in emarginaturis lateralibus verticis paulò ante angulos posteriores.

Ocelli inter se distantes, ponè oculos, in parte collari verticis.

Frons angusta, elongata, lateribus arcuatis anticè sensim convergentibus.

---

(1) Vedi Nota (1) alla pag. 104.

Genae fronte latiores ac longiores sed nusquam conjunctae, oblongo-ovatae, extûs marginatae, ante oculos abruptè intûs inflexae, indè arcuatim convergentes et ultra frontem separatim rotundatae.

Canalis inferi et *maxillae inferioris initia* sub eâdem lineâ transversali et ab oris aperturâ visibiliter remota. Ille brevis, parietibus elevatis angulatis. Haec longissima et sub quarto abdominus segmento in quiete protensa, quadri-articulata, articulo primo crassiore recto ultra caput sub prosterno ad originem pedum anteriorum usque liberè producto, secundo longiore ad coxas intermedias perveniente arcuato in pagina linguali compresso et in pagina sternali deplanato, 3.^{tio} et 4.^{to} conformibus tenuioribus rectis, tertio longiore, quarto truncato.

Corpus subtûs uniformiter convexum, mesosterni tantùm lineâ mediâ longitudinali laeviter elevato-costatâ, abdominis margine integro, laminâ primâ ventrali nec spinosâ, nec tuberculatâ, nec anticè productâ.

Prothoracis dorsum elevato-convexum, anticè sensim declive, hexagonale, *angulis anterioribus lobatis*, lobis utrinque obliquè productis deplanatis plus longioribus quam latioribus apice rotundatis, latere anteriore inter lobos arcuatim emarginato margine conspicuo incrassato; lateribus antero-externis post lobos abruptè rectâ divergentibus, marginatis margine tenui reflexo; angulis exterioribus rectilineis apertis; postero-externis brevissimis rectis sub-parallelis immarginatis, angulis posterioribus rectis; posteriore maximo recto immarginato.

Scutellum ut in praecedentibus quoad formam, sed magis abbreviatum et tertiam laminam dorsalem vix superans.

Alae quiescentes abdomen totum obtegentes. Superiorum pars coriacea extûs arcuata, margine postico recto; pars membranacea, consuetae magnitudinis, nervo transverso arcuato cellulam magnam transversam includente, nervos alteros sex emittente longitudinales vix incurvatos sub-parallelos et ante marginem extimum evanescentes, cellulis omnibus longitudinalibus posticè apertis, limbo posteriore subtiliter plicato.

Pedes inermes, tenues, elongati, ferè cursorii. *Tibiae* prismaticae triedrae, costis tribus carinulatis pubescentibus. *Tarsi* subtûs setacei, tri-articulati, articulis distinctis, primo crassiore cylindrico, sequentibus obconicis, secundo minore, tertio omnibus longiore et ut in praecedente bi-unguiculato atque bi-appendiculato.

Species unica. — Audinetella bi-punctata, m.

Audin. brunneo-nigrescens, alarum superiorum parte coriaceâ nigro bi-punctatâ.

Long. 10 millim. — Lat. 5 millim.

Tota brunneo-nigrescens, antennis alarum superiorum parte membranacea partis coriaceae punctis duobus discoidalibus nigris, coxis tarsisque rufo-brunneis. Corpus punctatissimum, punctis plerisque discretis, in dorso prothoracis scutellique deformibus et confusis ut in *Hypogompho*, interstitiis tamen minus elevatis, superficie minus inaequali. *In foeminâ*, (marem non vidi) laminae ventrales genitalia externa abdominisque apex ut in praecedente.

Due femine di Cayenna, avute dal Sig. Buquet.

Accanto all' *Audinetella* si colloca naturalmente un' altra specie del Brasile, che potrebbe essere tipo di nuovo genere per chi si contentasse di caratteri artifiziali laddove fossero decisi e apparenti. Eccone i tratti essenziali:

Antenne, capo, torace e proporzioni delle principali parti del corpo, come nel *G. Macropygium*.

Mascella e apparato manducatorio, come nel *G. Audinetella*.

Parte membranacea delle ale reticolate, come nel *G. Brochymena*. Stimo che questa specie debba rimanere nel *G. Audinetella*. Ma a chi pensasse il contrario, risparmierò la fatica di scartabellare il corano o il talmud dedicando il nuovo genere, sotto nome di *Schaefferella*, all' egregio continuatore del *Wanz. Artig. Insekt.*

Schaefferella litigiosa, m. — Long. 10 millim. — Lat. inter angulos exteriores prothoraces, 5 millim. — Ead. in medio abdominis, 7 millim. — Corpus supra griseum nigro punctatum,

punctis impressis rotundis conspicuis discretis, subtûs nitidum minimè punctulatum. Antennae nigrae, articulo primo subtûs flavido. Pedes grisei nigro irrorati. Alarum superiorum pars membranacea sordidè flavescens, costis elevatis saturatioribus. Prothoracis latera postero-externa arcuatim emarginatis flavis, anguli exteriores gibbosi rotundati. — *In foeminâ*, venter ut in *Audinetellâ*. — *In mare*, genitalia externa ut in *Macropygio atro* ♂ sed multo minora.

Due femine e un maschio, del Brasile.

PENTATOMITAE. XI. G. Diemenia, m.

Pentatomoideae. N. 71.*bis* *Tab. synopt.*

Antennae in paginâ inferiore capitis, propè maxillae inferioris originem et longius ab oculis, in tuberculo sub-laterali magno globoso extûs arcuato-spinoso insertae, mediae magnitudinis, crassiusculae et ad marginem posteriorem mesosterni in quiete protensae, quadri-articulatae, radiculâ nullâ, articulo primo cylindrico capitis apicem superante, 2.*do* et 3.*tio* obconicis, secundo longissimo sequente saltem triplo longiore apice sensim attenuato.

Corpus ovatum, supra planum horizontale, subtûs laeviter convexum, utrinque marginatum, margine dilatato, horizontale, lamellaeforme.

Caput margine laterali obliquè reflexum, apice fissum et bilobum.

Frons elongata, angusta, recta, lateribus parallelis, apice laeviter arcuata.

Genae fronte multo latiores ac longiores, sed ultra frontem neutiquam conjunctae, intûs rectae immarginatae, extûs ante oculos abruptè inflexae, indè sensim arcuatae, apice separatim rotundatae.

Oculi, in angulis posterioribus prothoracis, globosi, prominuli.

Ocelli nulli.

Canalis inferus ferè ab oris aperturâ prodiens et ad posteriorem capitis marginem perveniens, posticè apertus, parietibus lateralibus verticalibus tenuibus et parum elevatis.

Maxilla inferior ab oris aperturâ quoque incipiens et coxas tertii paris in quiete attingens, quadri-articulata, articulo primo toto in canali infero quiescente, reliquis tribus liberis a 2.^{do} ad 4.^{tum} gradatim brevioribus, ultimo obtuso.

Sternum deplanatum.

Venter in utroque sexû muticus, segmentis quinque anterioribus stigmatiferis, stigmatibus paulò ante extremitatem exteriorem rimularum transverso-lateralium, perimetris elevatis callosis, rimulis rectis minus profundè impressis: segmento quinto arcuatim emarginato sextum amplectente. — *In foeminâ*, lamina sexta ventralis longitudinaliter fissa, posticè rotundato-biloba, stigmatibus nullis aut reconditis: septima brevior quadri-partita, margine integro: *Abdominis apex rotundatus.* — *In mare*, lamina quinta profundius emarginata sed sequentem non amplectens; sexta latior, integra, marginem exteriorem utrinque attingens; ultima profundè emarginata, angulis singulis posterioribus bidentatis: *Abdominis apex quadri-dentatus.*

Prothoracis dorsum planum, medietate anticâ horizontaliter depressâ, trapezoideum et posticè dilatatum, latere anteriore arcuato et verticis marginem posticum ambiente, lateralibus rectis margine lamelloso subtiliter crenulato, posteriore recto immarginato; angulis anterioribus rectilineis apertis, posterioribus rotundatis.

Scutellum ut in praecedente.

Alae quiescentes abdomen non obtegentes, superiorum pars coriacea abbreviata et tertiam laminam dorsalem non superans. Pars membranacea abortiva, brevissima. *Alae inferiores*, in utroque sexû, minimae et volatui ineptae.

Pedes formae consuetae, gressorii, mediae magnitudinis. *Tibiae* rectae triedrae. *Tarsi* setacei tri-articulati, articulo primo majore, secundo minore, ultimo biunguiculato et fortè appendiculato, appendicibus in cadavere parum conspicuis.

Species unica. — Diemenia Deyrollei, m.

Diem. aptera, nigra flavo marginata.

Long. totius corporis, 10 millim. — Lat. inter angulos posteriores prothoracis, 4 millim. — Ead. in medio abdominis, 5 millim. — Altitudo corporis maxima, 1 millim.

Depressa, nigra opaca, supra confusim punctulata rugosiuscula, ventre nitidiore: capitis prothoracisque margine exteriore, faciei dimidiâ parte anteriore scutellique apice extimo, maculâ magnâ marginali in singulo segmento abdominali, flavis. Alarum superiorum pars membranacea fusco-brunnea. Pedes flavi, femoribus propè tibias latè nigro annulatis.

Due maschi e due femine mal conservati, di Van-Diemen, avuti dal Sig. Deyrolle.

Dopo l'*Epipedus histrio* del Brasile, la *Diemenia* è la *Pentatomoidea* la più appiatita ch' io conosca. Questa circostanza combinata coll' incapacità di volare, comune pure all'*Hypogomphus*, mi fa sospettare che questa specie sia destinata a giacere sedentaria in luoghi oscuri e di poca altezza. Il genere mi sembra pertanto naturale in primo grado, abbenchè tali non mi sembrino alcuni dei caratteri assegnati nella tavola sinottica.

PENTATOMITAE. XII. G. Orthoschizops, m.

Pentatomoideae. N. 76.bis *Tab. synopt.*

Antennae in paginâ inferiore capitis, longè ante oculos, ferè sub eâdem lineâ transversali ac maxillae inferioris initium, in tuberculo sub-laterali mutico et obliquè truncato insertae, filiformes, mediae magnitudinis, quinque articulatae, articulis magnis distinctis sub-cylindricis, radiculâ nullâ, articulo primo crassiore breviore et capitis apicem non attingente, secundo longiore, reliquis a 3.tio ad 5.tum gradatim longitudine decrescentibus, ultimo apice ovato-rotundato.

Canalis inferus et *maxilla inferior* ferè ab oris aperturâ simul incipientes. Ille ultra caput neutiquam porrectus, maxillae

articulum primum totum recipiens, posticè apertus, parietibus lateralibus rectis parallelis parum elevatis. Haec marginem posteriorem metasterni attingens sed non superans, quadri-articulata, articulis rectis, secundo longiore compresso, ultimo obtuso.

Sternum deplanatum.

Pleurae convexiusculae.

Abdomen subtûs uniformiter convexum, lineâ mediâ nec canaliculatâ nec concavâ, segmento anteriore mutico. *In foeminâ* (marem non vidi) annuli quinque anteriores stigmatiferi posticè integri, stigmatibus in apice externo rimularum transverso-lateralium: quintus sequentes amplectens, sextus parvus longitudinaliter fissus sub-verticalis, ultimus quinque-partitus, lobulis exterioribus latioribus extûs laeviter arcuatis, intermediis oblongo-ovatis, medio impari minuto abbreviato; lamina dorsali posteriore tri-emarginata, undè *Abdominis apex quadri-lobatus.*

Caput saltem plus duplo longius quam latius, horizontale, utrinque marginatum margine tenui carinaeformi, vertice inter oculos convexiusculo post eosdem breviore et utrinque dilatato rotundato, margine exteriore recto propè apicem obliquè truncato, angulo interiore magis porrecto apice fisso, fissurâ mediâ latâ rectâ a quo charactere desumitur nomen generis *Orthoschizops.*

Oculi laterales globosi extûs prominuli, ab angulis posterioribus capitis visibiliter remoti.

Ocelli inter oculos, singulo ab oculo ejusdem lateris et a medio verticis aequè distante.

Frons angusta, vix anticè attenuata, lateribus rectis, apice obtuso.

Genae fronte duplo latiores ac longiores, ultra frontem horizontaliter prolongatae, sed nusquam conjunctae et etiam in totâ longitudine rimâ latâ et conspicuâ separatae, lateribus internis sejunctis rectis parallelis, exterioribus laeviter arcuatis convergentibus propè apicem angulatis obliquè truncatis introrsum et antrorsum productis.

Prothoracis dorsum posticè parum convexum, anticè deplanatum, hexagonale: latere anteriore utrinque sinuato, medio

arcuato crassè marginato; lateribus antero-externis incurvatis, intûs valde inflexis marginatis margine denticulato, posticè extûs abruptè prolongatis et in tuberculum desinentibus obliquè erectum antrorsum reflexum et apice tridentatum, undè *Prothorax auritus* dici potest; postero-externis brevioribus arcuatis convergentibus immarginatis; posteriore latiore recto; angulis posterioribus valdè apertis rotundato-obsoletis.

Scutellum ferè plus duplo longius quam latius, quartam laminam dorsalem superans, propè apicem utrinque sinuatum, apice attenuatum, oblongo-ovatum.

Alae quiescentes abdominis nec latera nec apicem obtegentes. Superiorum pars coriacea elongata laminam quintam dorsalem extûs attingens, margine postico obliquè arcuato. Pars membranacea abbreviata latè reticulatâ, nervis tribus a basi immediatè prodeuntibus et ante marginem extimum terminatis irregulariter flexuosis ac ramosis cellulas quatuor discoidales inaequales ac difformes includentibus et alias perpaucas submarginales latè apertas partim circumdantibus. *Alae* inferiores paulo breviores.

Pedes validi, tibiis rectis triedris, tarsis ut in praecedentibus.

Species unica. — Orthoschizops latispina.

Orthosch. sordidè griseo-brunneo adspersa, capite nigro flavoque lineato.

Long. totius corporis, 11 millim. — Ead. capitis, 3 millim. — Lat. capitis maxima, exceptis amborum oculorum diametris, 1, 50 millim. — Ead. fissurae anterioris orthogonalis, 0, 20 millim. — Ead. inter tuberculos auritos prothoracis, 6 millim. — Ead. in medio abdominis, 6 millim.

Corpus impresso-punctatum, punctis inaequalibus plus minusve adproximatis, interdum confluentibus sed nusquam rugaeformibus, interstitiis secundum magnitudinem magis elevatis et nitidioribus, dorsi et praesertim prothoracis superficie inaequali, istius lineâ media longitudinali profundè excavatâ. Caput nigrum, lineis quinque flavis parallelis, mediâ longiore a basi

ad frontis apicem ductâ. Prothoracis dorsum scutellum alarumque superiorum pars coriacea sordidè griseo-brunneo punctata, propè marginem exteriorem et in cavitatibus dorsi nigro obumbrata. In basi scutelli, propè angulos humerales, calli duo flavidi. Corpus subtûs griseo-flavescens, utrinque propè marginem exteriorem nigro vel brunneo variegatum. Alarum superiorum pars membranacea alba hyalina, nervis fuscescentibus. Antennae et maxilla pallidè flavescentes. Pedes, in cadavere, saturatè testacei, in specimine vivo fortè rubescentes.

Una femina del Capo di Buona Speranza avuta dal Sig. Drege col nome di *Cimex latispina Germar.* Non so se sia stata descritta, ad ogni modo scrivo senza avere la descrizione sotto agli occhi e senza poterla citare. — Questo insetto che le parti caratteristiche collocano accanto al *G. Galadanta*, presenta un aspetto affatto diverso e somiglia, nel suo *facies*, alle *Halisoidee*. Però non ha il carattere essenziale di questa sottofamiglia, cioè, *la facoltà di distendere l' estremità della sua mascella sotto la cavità mediana del ventre.*

PENTATOMITAE. XIII. G. HYPAULACUS, m.

MEGYMENOIDEAE. N. 94.[bis] *Tab. synopt.*

Antennae in meo specimine desunt, tuberculo antennifero in paginâ inferiore capitis propè marginem exteriorem parvo cylindrico, oris aperturâ apicali ferè sub eâdem lineâ ac maxillae origo.

Corpus supra parum subtûs magis convexum. *Caput* elongatum marginatum, margine tenui et non reflexo, lateribus rectis anticè convergentibus, apice bilobo.

Frons parva, longè ante oculos incipiens, brevissima, triangularis angulo apicali acuto.

Genae evidenter fronte latiores ac ferè duplo longiores, ante ipsam arcuatim conjunctae, extûs rectâ convergentes, apice separatim rotundatae.

Oculi sessiles, rotundati, parum prominentes, in angulis posterioribus capitis.

Ocelli inter oculos, istis propiores et inter se distantes.

Canalis inferus ab aperturâ oris in apice frontis ad marginem usque anteriorem segmenti primi abdominalis, profundè et latè excavatus, parietibus lateralibus sub capite parum sub pectore neutiquam elevatis.

Maxilla inferior sub eâdem lineâ transversali ac canalis inferus incipiens, in sinû canalis et ad coxas usque pedum posteriorum protensa tota quiescens, quadri-articulata, articulis rectis.

Prothoracis dorsum ferè duplo plus latius quam longius, posticè parum elevatum, anticè abruptè depressum, reverâ hexagonale lateribus plerisque curvilineis: anteriore, latè arcuatim emarginato et verticis marginem posticum ambiente, ponè oculos rectâ truncato; antero-externis, brevioribus divergentibus incurvatis, medio intùs inflexis; postero-externis, brevioribus posticè convergentibus, laeviter sinuatis; posteriore recto, angulis anterioribus rectilineis, sed nec spinosis nec prominentibus; reliquis obsoletè rotundatis, undè haud perperam *Prothorax* dici posset irregulariter *transverso-ovatus, anticè sinuato-emarginatus, posticè truncatus.*

Scutellum, ut in *G. Audinetellâ.*

Alae quiescentes vix totum abdomen obtegentes. Superiorum pars coriacea extûs arcuata, posticè obliquè truncata. Pars membranacea marginata margine costaeformi, nervis sex longitudinalibus a basi vel propè basin incipientibus, anastomosibus transversalibus nusquam interruptis cellulas angustas elongatas completas includentibus.

Pedes validi, gressorii. *Tibiae* prismaticae, triedrae, costis exterioribus duabus incrassatis. *Tarsi* visibiliter tri-articulati, articulo primo crassiore et reliquis unâ longiore, 2.*do* et 3.*tio* obconicis, secundo breviore, tertio biunguiculato et biappendiculato, unguiculis ut in praecedentibus, appendicibus duplo latioribus et dimidio brevioribus.

In foeminâ, (marem non vidi) ventris annuli quinque anteriores stigmatiferi, stigmatibus in medio callositatis parum elevatae satis conspicuis. Lamina prima in medio anticè emar-

ginata, emarginaturâ parvâ arcuatâ canalem inferum terminante: sexta fissa utrinque gibbosa: septima genitalia sistens videtur quinque partita undè *Abdominis apex quinque-lobatus.*

Species unica. — Hypaulacus nervosus.

Hypaul. griseo-virescens, alarum superiorum parte membranaceâ albâ hyalinâ, nervis concoloribus nigro maculatis.

Long. totius corporis, 12 millim. — Lat. inter angulos exteriores prothoracis, 7 millim. — Ead. in medio abdominis, 6 millim.

Supra confertissimè punctulatus, griseo-virescens, prothoracis scutellique interstitiis inaequaliter elevatis, superficie subrugosâ, scutelli apice flavo. Pectus et abdomen dilutiora, fasciis duabus ventris sub-marginalibus perimetrisque ostiorum trachealium nigris, punctis pleurarum magnis remotis, interstitiis deplanatis, ventre laeviusculo nitidiore. Pedes griseo-brunnei. Alarum superiorum pars membranacea ut in diagnosi: in singulo nervo, macularum unica series.

Una femina mutilata del Capo di Buona Speranza, mandatami dal Sig. Drege col nome di *Cimex nervosus*, nome specifico conservato e probabilmente allusivo alle particolarità dell' innervazione alare. — *Hypaulacus*, di sotto, canale.

PENTATOMITAE. XIV. G. Æschrus, m.

Megymenoideae. N. 95. *Tab. synopt.*

Antennae ab oculis et ab aperturâ oris ferè aequè distantes, in paginâ capitis inferiore et in extremitate anteriore tuberculi sub-marginalis obconici maximi et extûs spinosi insertae, breviusculae et ad marginem usque posteriorem propectoris vix producendae, quinque articulatae, articulo primo crassiore breviore et capitis apicem non attingente, reliquis tenuioribus a 1.^{mo} ad 5.^{tum} gradatim longitudine crescentibus, articulationibus distinctis, 2.^{do}, 3.^{tio} et 4.^{to} obconicis, ultimo apice attenuato sub-ovato.

Caput magnum, plus duplo longius quam latius, crassum et sub-cylindricum, supra inaequale, subtûs valdè convexum,

utrinque sensim declivè et ferè immarginatum, apice rotundato-integrum.

Frons angusta, elongata et ad apicem capitis perveniens, lateribus rectis parallelis.

Genae fronte multo latiores at haud longiores, propè tuberculum antenniferum intûs inflexae, indè iterum dilatatae et elevato-incrassatae, in margine anteriore unâ cum fronte conjunctim rotundatae.

Oculi et Ocelli, ut in praecedente.

Canalis inferus ab oris aperturâ incipiens, profundè excavatus, ultra metasternum sub ventre prolongatus, posticè apertus, lateribus parallelis, parietibus lateralibus sub capite abruptè sub pectore neutiquam elevatis.

Maxilla inferior paulò post originem canalis inferi incipiens et ad marginem posteriorem metasterni in quiete perveniens, quadri-articulata. Articulus primus inter parietes canalis inferi captivus et appendice clypeali caelatus, in specimine meo, observationem effugit. Reliqui a 2.^{do} ad 4.^{tum} gradatim decrescentes, 2.^{dus} paulo incurvatus, ultimus obtusus.

Venter segmento anteriore medio excavato, meo judicio, pro tuendo apparatû manducatorio ultra maxillam exserto: segmentis 2-5 in angulis posterioribus rotundato-productis, abdominis margine exteriore fimbriato. — *In foeminâ*, (marem non vidi) laminae ventrales duae ultimae ut in *Hypaulaco*, sexta minus gibbosa.

Prothoracis dorsum valdè inaequale, posticè elevatum, anticè abruptè declive, ut in *Hypaulaco*, hexagonale lateribus curvilineis, anteriore tamen minus profundè emarginato et laeviter arcuato, antero-externis immarginatis, postero-externis longioribus minus convergentibus et visibiliter bisinuatis, angulis exterioribus minus latè rotundatis.

Scutellum, ut in praecedente.

Alae quiescentes abdomen non obtegentes. Superiorum pars coriacea margine postico obliquè arcuato: pars membranacea, nervis quinque longitudinalibus a basi vel ponè basin oriundis

posticè radiatim divergentibus et ante marginem extimum evanescentibus, cellulis omnibus basi angustis posticè dilatatis apertis.

Pedes, mediae magnitudinis. *Tibiae* rectae prismaticae triedrae, costis exterioribus duabus tenuibus parum prominulis, alterâ ferè obsoletâ. *Tarsi* tri-articulati, ut in *Hypaulaco*, articulis 1.^{mo} e 3.^{tio} longitudine sub-aequalibus.

Species unica. — Æschrus inaequalis.

Æschr. niger, prothoracis disco saturatè rufo.

Long. totius corporis, 10 millim. — Ead. capitis, 2, 50 millim. — Altitudo capitis, 1, 50 millim. — Lat. capitis ante oculos, 1, 50 millim. — Lat. corporis, tam inter angulos exteriores prothoracis quam in medio abdominis, 5, 50 millim.

Corpus opacum, creberrimè punctatum, dorsi et praesertim prothoracis superficie inaequali, spatiis elevatis nitidioribus: nigrum, prothoracis spatio indeterminato discoidali scutelli apice maculisque nonnullis in parte coriaceâ alarum superiorum saturatè rufis. Antennae pedesque pallidè flavi, illarum articulo primo nigro.

Quattro femine dell'Africa meridionale. La prima meno bene conservata, del Capo di Buona Speranza, mi fu mandata dal Sig. Drege col nome di *Cimex inaequalis*. Le altre tre provengono dalle raccolte del Sig. Delegorgue.

PENTATOMITAE. — XV. G. Tyoma, m.

Pentatomoideae. — N. 95.^{bis} *Tab. synopt.*

Antennarum origo, ut in *Æschro*, sed oculis propior et a capitis apice magis remota, tuberculo antennifero mutico. *Antennae* longiores ac tenuiores, ad originem usque pedum intermediorum in quiete porrigendae, quinque articulatae, articulis 1-4 conformibus obconicis, primo breviore et ad originem canalis inferi non perveniente, 2.^{do} et 3.^{tio} sub-aequalibus, 4.^{to} longiore, 5.^{to} longissimo paulo-crassiore apice attenuato sub-ovato.

Caput ferè ut in *Æschro*, genis et fronte longitudine aequalibus et separatim rotundatis, margine anteriore ideò bi-emarginato ac bilobato.

Canalis inferus et *maxilla inferior* itidem ut in *Æschro*, at ille posticè clausus et emarginaturâ media segmenti primi ut in *Hypaulaco* terminatus. Abdominis tuberculi laterales acutiusculi, dentiformes. *In mare*, (*foeminam* non vidi) annuli sexti dentes laterales longiores, undè *abdominis apex emarginatus*. Lamina ultima genitalia sistens, parva, verticalis, medio bi-tuberculata.

Prothoracis dorsum quoque ferè ut in *Æschro*, minus elevato-convexum, anticè sensim declive, peripheriâ hexagonali magis evidente, angulis exterioribus acutis dentiformibus, lateribus postero-externis rectis, angulis posterioribus rectilineis apertis.

Scutellum breve, aequilaterale, annulum tertium, non superans, apice latè rotundatum.

Alae quiescentes abdomen totum obtegentes: superiorum pars coriacea posticè recta, membranacea reticulata, cellulis clausis difformibus.

Pedes, ut in *Æschro*.

Species unica. — Tyoma erythrorhyncha, m.

Tyom. supra griseo-fusca, subtûs dilutius grisea, maxillâ inferiore flavo-rubescente.

Long. 8 millim. — Lat. inter angulos exteriores prothoracis, 6 millim. — Ead. in medio abdominis, 5 millim.

Antennae flavae, articulo ultimo fuscescente. Corpus impresso-punctatum, capitis prothoracisque limbo exteriore nigro. Alarum pars membranacea fusca, nervis paulò obscurioribus. Pedes flavi, genubus rubidis. Appendix clypealis et maxilla inferior in cadavere flavescentes, fortè in vivo rubri.

Un maschio del Capo di Buona Speranza avuto dal Sig. Drege col nome di *Cimex erythrorhynchus*, nome che ho mantenuto nel dubbio che la specie sia stata altrove descritta o annunziata, abbenchè si sappia che non ammetto, in nessuno *Artroidignato*, siccome più generalmente in nessuno insetto, l' esistenza di un *Rostro*.

Tyoma, altro anagramma del cognome Amyot.

COREITAE. XVI. G. Pachygroncha, m.
Coreideae. N. 136. *Tab. synopt.*

Antennae in specimine meo desunt, tuberculis antenniferis conspicuis lateralibus, ante oculos, capitis apici proximioribus, anticè apertis.

Corpus elongatum, supra planum, subtûs uniformiter convexum.
Caput plus longius quam latius, trapezoideum, planum, horizontale, extûs immarginatum, basi et apice rectâ truncatum.

Frons angusta, prope capitis apicem incipiens et ferè ab ortû abruptè declivis.

Genae, frontis longitudinis, in basi paulo latiores et magis elevatae.

Oculi laterales, ferè in angulis posterioribus capitis, sessiles, globosi, prominentes.

Ocelli, inter oculos adproximati et ab oculis magis remoti.

Maxilla inferior ab initio libera, canali infero aut nullo aut vix conspicuo, abbreviata et ultra coxas primi paris nullomodo producenda.

Prothoracis dorsum trapezoideum elongatum posticè dilatatum, latere anteriore recto immarginato, exterioribus incurvatis sinuatis marginatis margine incrassato, posteriore immarginato laeviter arcuato utrinque subsinuato, angulis posterioribus obsoletè rotundatis.

Scutellum triangulare, triangulo rectilineo aequilaterale.

Alae quiescentes, totum abdomen obtegentes: superiorum pars coriacea, extûs recta, posticè obliquè truncata, angulo postero-externo segmentum quintum attingente; pars membranacea nervis quinque conspicuis a basi prodeuntibus ante marginem extimum evanescentibus rectis, parallelis limbo plicato.

Propectus posticè arcuatim emarginatum, angulis posterioribus acutè productis. *Mesosternum* magnum. *Metasternum* parvum, deplanatum.

Abdomen extûs marginatum margine tenui integro, laminarum ventralium margine posteriore recto, anterioribus quinque stigma-

tiferis, stigmatibus in sinû foveolae singuli segmenti non longè a vertice anguli anterioris. — *In mare*, (*foeminam* non vidi) lamina quinta ventralis sextam amplectens, haec parva circularis parum convexa stigmatibus destituta, *abdominis apex integer.*

Pedes ejusdem paris adproximati, coxis ejusdem lateris sub eâdem lineâ axi corporis parallelâ dispositis, valdè difformes. Anteriores ab aliis magis remoti, validissimi raptorii, femoribus maximè elongato-incrassatis subtûs spinosis, spinis in serie unicâ conico-acutis inordinatè magnitudine inaequalibus: tibiis cylindricis et propè apicem femoralem abruptè incurvatis inermibus. Posteriores quatuor, formae consuetae, gressorii subaequales minus validi, mediae magnitudinis: femoribus nec incrassatis nec arcuatis; tibiis rectis. *Tarsi* omnes consimiles, tri-articulati, articulo primo reliquis unâ longiore, secundo minore, tertio biunguiculato ac biappendiculato, unguiculis edentulis laminaeformibus apice aduncis, appendicibus membranaceis dimidio brevioribus.

Species unica. — Pachycroncha lineola.

Pachygr. rufo-testaceâ, lineâ a capitis apice ad extremitatem scutelli ductâ albidâ.

Long. totius corporis, 8 millim. — Lat. major propè basin abdominis, 2 millim.

Impresso-punctata, punctis discretis, interstitiis planis in dorso majoribus ac nitidioribus. Rufo-testacea; lineâ rectâ ab apice capitem ad angulum posteriorem scutelli ductâ, callis duobus elevatis propè scutelli basin, prothoracis marginibus lateralibus, radio alarum superiorum, tuberculis antenniferis, maxillâ inferiore pedibusque, exceptis femoribus primi paris, albidis; pectoris disco, abdominis fasciis duabus sub-marginalibus, tarsorum unguiculis, brunneo-nigris; appendicibus tarsalibus, nigris. Alarum membrana alba hyalina, nervis concoloribus.

Un maschio del Capo di Buona Speranza avuto dal Sig. Drege sotto al nome specifico che ho mantenuto.

REDUVITAE. XVII. G. Ghilianella, m.

Emesoideae. N. 185. *Tab. synopt.*

Antennae in apice capitis propè oris aperturam oriundae, tenuissimae, capillares, vix corpore breviores quadri-articulatae, articulis duobus primis longissimis, secundo sequentibus duobus unâ longiore, tertio breviore, ultimo apice acuminato, radicula exserta parva cylindrica, tuberculis antenniferis nullis.

Caput elongatum, angustatum, immediatè ante oculos sulco transversali bipartitum, parte posteriore obconicâ posticè sensim attenuatâ, parte anteriore paulò breviore cylindrica.

Frons ferè ante sulculum transversalem a genis separata, paulò longior, acutiuscula, suturis sulciformibus rectis parallelis parum excavatis oculo nudo cognitû difficillimis.

Genae fronte breviores, abruptè declives, apice sub-truncatae.

Maxilla inferior ab apice capitis prodiens, oris aperturam circumdans, ad originem pedum primi paris perveniens, libera, tri-articulata, articulis 1.^{mo} et 2.^{do} crassioribus sub-aequalibus, tertio duobus praecedentibus unâ longiore, ultimo apicem versus sensim attenuato.

Thorax segmentis tribus constans pariter detectis elongatis tenuibus supra uniformiter convexis, subtûs longitudinaliter sulcatis. *Prothorax* reliquis paulo brevior obconicus, anticè sensim incrassatus et propè marginem anteriorem pedes primi paris gerens. *Mesothorax* et *Metathorax* conformes, conici ac posticè sensim dilatati; mesothorax longior, posticè rectâ truncatus et propè marginem posteriorem gerens pedes secundi paris: metathorax posticè emarginatus et in angulis posterioribus gerens pedes tertii paris.

Abdomen anormale, ovato-acuminatum, longissimè petiolatum, segmentis supra quatuor subtûs sex constans; primo petiolum filiformem efficiente, recto prismatico tetraedro, paginâ superiore longitudinaliter canaliculatâ, lateralibus angustioribus planis extrorsùm declivibus, inferiore latiore convexiusculâ: laminâ

secundâ dorsali valdè convexâ longitudinaliter bicristata et bisulcata, cristis margini exteriori propioribus angustis utrinque planis supra arcuatis, sulcis a cristis ejusdem lateris et a lineâ mediâ aequè distantibus; laminâ tertiâ minus convexâ, haud cristatâ, sulculis duobus ante marginem posteriorem obsoletis; quartâ deplanatâ et indè concavâ, posticè sensim attenuata, apice acuminato et sursum reflexo. Laminae ventrales 2.^{da}, 3.^{tia} et 4.^{ta} stigmatiferae, uniformiter convexae, margine posteriore latè arcuato-emarginato. — *In foemina*, (*marem* non vidi) sexta angustior oblongo-ovata, in angulis posterioribus appendicibus vel valvulis vulvariis duabus munita corneis crassis oblongis extûs arcuatis integris et margini exteriori laminae sextae iuxta-positis.

Pedes difformes ut in reliquis *Emesoideis*. *Anteriores* raptorii, coxis longissimis rectis sub-cylindricis, trochanteribus distinctis abbreviatis cum femoribus arctius connexis, istis elongatis tibiis tarsisque unâ longioribus et paulò validioribus, a medio ad apicem tibialem subtûs spinosis, spinis in serie unicâ dispositis conico-acutis, priore multo majore, reliquis subaequalibus, tibiis cylindricis inermibus, tarsis brevioribus exarticulatis dolabraeformibus. *Posteriores quatuor* inermes, longissimi, cursorii, coxis parvis, trochanteribus nullis vel indistinctis, femoribus tibiisque ferè capillaribus, tarsis brevissimis et nihilominus distinctè tri-articulatis, articulis obconicis subtûs pilosis, primo crassiore, ultimo biunguiculato.

Animalculum valde singulare, de vitâ et de moribus nil mihi innotescit. An larva? an nympha? an imago?

Species unica. — Ghilianella filiventris, m.

Long. totius corporis, 25 millim. — Lat. capitis, 0,80 millim. — Ead. singulae partis thoracis in origine pedum cujusvis paris, 1 millim. — Ead. pedunculi abdominalis, 0, 50 millim. — Ead. in margine posteriore segmenti secundi, 2, 50 millim.

Tota brunnea, opaca, subtilissimè punctulata, vix pubescens, pube sericeâ brevissimâ, segmentis abdominalibus glabris nitidis.

Prothorax margine anteriore emarginato sub-bidentato, mesothoracis metathoracisque linea media dorsalis elevata.

Due femine del Para, raccolte dal Sig. Ghiliani nel 1846.

REDUVITAE. XVIII. G. Blapton, m.

Harpactoroideae. N. 220. *Tab. synopt.*

Questo genere è stato suddiviso, nella *Tavola sinottica*, in due sezioni. La prima caratterizzata dal *margine esteriore dell' abdome intiero*, ha per tipo una specie di Cayenna descritta dai Signori Amyot e Serville, vedi *Hist. des Hemypt. p.* 376, *n.* 3. *Sinea punctipes*, A. S. Non occorre parlarne. Tratteremo soltanto della seconda che ha *il margine esteriore dell' abdome laciniato o addentellato.*

Antennae ab apice anteriore genarum prodeuntes, ferè longitudinis corporis, tenues filiformes pilosae, quadri-articulatae, articulo primo crassiore brevissimo globuloso, secundo tenuiore valdè elongato, cylindrico pilis induto rarioribus et sub-rigidis, tertio longiore capillari pubescente, quarto etiam capillari, mutico in specimine meo, tuberculo antennifero radiculâque nullis.

Caput elongatum, inter oculos sulco transversali medio bipartitum. Pars posterior obconica, anticè gibbosa et in gibbositate gerens ocellos 2 parvos adproximatos. Pars anterior cylindrica, propè apicem tri-partita.

Frons ultra genas arcuatim declivis, dorso angusto convexiusculo.

Genae fronte breviores, paulo latiores, apice truncatae.

Clypeum minimum. *Appendix clypealis* et *apparatus manducatorius* reconditi.

Maxilla inferior coxas primi paris non superans, tri-articulata, articulo primo crassiore arcuato, 2.do plus duplo longiore recto compresso, ultimo brevissimo attenuato.

Prothoracis dorsum inaequale, multispinosum, medio transversim bipartitum, posticè valdè dilatatum, trapezoideum, lateribus plerisque curvilineis, anteriore angustiore recto immarginato,

exterioribus intùs inflexis abruptè divergentibus crassè marginatis, posteriore utrinque rotundato medio latè emarginato. Costulae duo ab angulis anterioribus prodeuntes, in medietate anticâ adproximatae sub-parallelae incrassatae et plurispinosae, in medietate posticâ divergentes gradatim magis elevatae et in tuberculum itidem plurispinosum propè marginem posteriorem desinentes, spinis validis acutis et vario sensû incurvatis. Anguli posteriores elevati extûs porrecti, margine supero trispinoso.

Scutellum breve, triangulare, ferè aequilaterale, basi arcuatâ, lineâ mediâ longitudinali elevato-costatâ.

Alae quiescentes lacinias laterales abdominis non obtegentes. Superiorum pars coriacea pubescens, posticè emarginata, extûs sensim angustata, angulo apicali exteriore valdè acuto; earumdem pars membranacea hyalina, cellulis quatuor elevato-marginatis discoidalibus 2 clausis sub-ovatis, marginalibus 2 majoribus posticè apertis. Nervi costato-elevati irregulariter contorti, propter marginem incrassatum cellularum adjacentium, perperam bisulcati viderentur vel etiam trisulcati.

Pectus convexum, prosterno elevato plurispinoso.

Abdomen. In mare, (*foeminam* non vidi) segmentis sex stigmatiferis constans, angulis posterioribus a 1.^{mo} ad 6.^{tum} gradatim magis dilatatis et productis, margine exteriore laciniato, laminâ 7.^{ma} ventrali genitalia obtegente oblongo-ovatâ integrâ.

Pedes elongati cursorii, coxis ejusdem paris a 1.^{mo} ad 3.^{tium} gradatim remotioribus, femoribus tibiisque pilosis cylindricis, illis in apice tibiale spinis duabus validioribus terminatis, spinulis minoribus extûs rarò sparsis. *Tarsi* tri-articulati, articulis 2.^{do} et 3.^{tio} aegrè distinguendis, primo reliquis unâ breviore, tertii unguiculis edentulis, appendicibus inconspicuis.

Blapton Dregei, m.

Bl. Griseo-fuscus, antennis pedibusque concoloribus, abdominis margine laterali laciniato, laciniis rotundatis.

Long. 14 millim. — Lat. in medio abdominis, 4 millim.

Griseo-fuscus, spinulis erectis apice praesertim nigrescentibus, tarsis brunneis, prothoracis margine anteriore scutelli lineâ mediâ longitudinali alarumque superiorum partis coriaceae nervis elevato-costatis dilutioribus, pube cinereâ. Alarum pars membranacea hyalina, nigro bis-strigata, strigis duabus longitudinalibus utrinque ramosis, costis elevatis brunneo-nigris.

Un maschio mal conservato, raccolto dal Sig. Drege nei contorni del Capo di Buona Speranza.

HYDROCORISIAE. XIX. G. Hydrocyrius, m.

Belostomoideae. N. 228. *Tab. synopt.*

Antennae breves, in inferiore capitis paginâ ab angulo apicali genarum prodeuntes, capitis marginem posticum vix attingentes, quadri-articulatae, articulo primo crasso obconico, sequentibus latioribus depressis transverso-ovatis, secundo paulò majore, articulationibus rectâ truncatis.

Caput, abstractis oculis, plus duplo longius quam latius, supra convexum, anticè sensim angustatum, subtûs medio deplanatum et utrinque foveolatum.

Frons in mediâ capitis longitudine incipiens, a vertice transversim et a genis longitudinaliter manifestè separata, suturis intermediis sulciformibus parum profundè impressis, angusta, anticè parum declivis et sensim acuminata, oris aperturâ terminata.

Genae fronte latiores ac multo breviores, antè oculos intûs inflexae et subtûs protensae, in paginâ inferiore foveolatae, foveolis longitudinalibus angustis posticè abbreviatis antennis quiescentibus refugium praestantibus.

Appendices supra-maxillares convexi, ultra frontem producti, angulatim divergentes, margine extimo rotundatis, a genis utrinque suturâ sulciformi separati.

Clypeum aut nullum, aut reconditum, aut cum appendice clypeali sensim confusum.

Appendix clypealis basi detectus et transversim strigatus, elongatus, sub-linearis, apparatum manducatorium obtegens, in canali maxillari apice reconditus.

Maxilla inferior longè post oris aperturam in paginâ inferiore incipiens, libera, tri-articulata. Articulus primus, in medietate basilari latè excavatus arcuatus et ab apparatû manducatorio visibiliter distans, in medietate apicali cylindricus tubiformis supra subtiliter fissus appendicem clypealem et apparatum manducatorium recondens. Secundus multo longior, medietati apicali praecedentis formâ consimilis, anticè sensim ac laeviter attenuatus, propè apicem supra bis-scutatus, scutulis deplanatis oblongo-ovatis. Tertius minimus, apice obtusus inermis.

Oculi superi et in angulis posterioribus capitis ut in *Belostomis*, itidem irregulariter sub-ovati et triangulum curvilineum aemulantes, sed datis proportionibus majores et magis retrorsùm prolongati.

Ocelli nulli.

Prothoracis dorsum, pectus, scutellum alarumque superiorum pars coriacea, ut in *G. Belostoma*. *Earumdem pars membranacea* magna, mediam longitudinem versûs nervo transversali bipartita: medietate anticâ latè reticulatâ, nervis parum elevatis et partim obsoletis, cellulis difformibus plus latioribus quam longioribus: medietatis posticae nervis longitudinalibus magis elevatis costaeformibus et inaequaliter dichotomo-ramosis, cellulis clausis plus longioribus quam latioribus, limbo extimo ut in *Belostomis*.

Pedes primi paris raptorii, femoribus densè velutatis medio longitudinaliter uni-sulcatis, sulculo unico recto laevi glabro, (sulci duo consimiles in *Belostomis* genuinis), tarsis obliquè biarticulatis, articulis distinctis subtûs velutatis, conformibus, secundo longiore biunguiculato, unguiculis magnis laminaeformibus aduncis inaequalibus, interno majore.

Pedes posteriores quatuor natatorii ut in *Belostomis*, tarsis omnibus biunguiculatis. Unguiculi, ut in pedibus primi paris, minus adunci inaequales, interno majore.

Species unica. — Hydrocyrius Colombiae, m.

Hydroc. sordidè flavescens supra longitudinaliter latè brunneo bifasciatus.

Long. totius corporis, 75 millim. — Lat. medii abdominis, 25 millim.

Corpus (in cadavere) sordidè flavescens, (forte virescens in specimine vivo), ventre concolore. Antennae dilutiores. Pedes immaculati. Fasciae duae longitudinales latae rectae adproximatae, ab anteriore prothoracis margine prodeuntes et supra scutellum ultra medium prolongatae, brunneo-nigrae. Alarum superiorum pars membranacea corpori concolor. Pedum anteriorum feltrum velutinum nigrum, pilis reliquis cinereis. Unguiculi tarsales picei.

Un maschio, della Colombia, vendutomi dal mercante Dupont. La statura colossale del mio esemplare mi ha suggerito il nome generico *Hydrocyrius* (gigante d' acqua). I sei primi segmenti ventrali sono stigmatiferi e gli stigmati sono visibilmente perforati. Il contrario si osserva nella *Belostoma grandis*, che mi sembra, sotto il rapporto degli organi esterni della respirazione, fare il passaggio dalle *Nepoidee* alle *Belostomoidee*. Credo il genere nuovo esattamente circoscritto. Gli autori dell' *Hist. des Hemipteres* attribuiscono i tarsi biunguicolati ai *G. Sphaerodema*, *Appasus* e *Diplonychus*, ma in tutti questi gli unghietti sono piccolissimi rudimentari, e credo che possano abortire in alcuni esemplari. Sospetto esser tali quei della mia collezione che mi furono tipi ai *G. Atomya* e *Amyotella* collocati nella tavola sinottica e dei quali ommetto la descrizione, perchè mi confermo nel dubbio che ci convenga riunirli rispettivamente ai *G. Sphaerodema* e *Appasus*. Il *Diplonychus* poi, ch' io credo di non avere mai veduto, è detto avere un solo articolo in ciascun tarso.

FULGORITAE. XX. G. Cladodiptera, m.

Cixioideae. N. 261. *Tab. synopt.*

Questo genere da me proposto sino dal 1839 negli *Ann. de la Soc. Ent. de Fr.* fu in allora fondato sopra una specie del Brasile che ha *la fronte più larga che lunga*. Nel 1846 il Signor Ghiliani ha riportato dal Para una seconda specie che

ha *la fronte più lunga che larga*. Ritenendola al più tipo di una seconda sezione in un genere alionde poco numeroso, ho stimato darne la sminuzzata descrizione, senza ritornare sopra i caratteri generici esposti nell' opera citata.

Cladodiptera ornata, m.

Cladodipt. fronte plus longiore quam latiore.

Long. totius corporis, 7 millim. — Ead. frontis, 2 millim. — Ead. alarum superiorum, 10 millim. — Lat. maxima frontis, medium versus paginae inferioris, 1, 50 millim. — Ead. mesothoracis ante scapulas alares, 5 millim.

Vertex transversim rectangularis, planus, marginatus, margine anteriore laeviter arcuato. *Frons* in superiore capitis paginâ incipiens, anticè arcuatim, indè in paginâ inferiore horizontaliter ac retrorsùm protensa, plana, indivisa, lateraliter marginata marginibus carinaeformibus subtûs et post oculos compressis elevatis lamellaeformibus, margine clypeali emarginato. *Clypeum* triedrum, apicem versus sensim attenuatum, facie mediâ planâ horizontali triangulari, lateribus curvilineis, exterioribus lamellosis, lineâ mediâ elevato-costatâ, faciebus lateralibus etiam triangularibus, rectilineis, angustis et marginibus lamellosis faciei intermediae partim obtectis. *Maxilla inferior* ad originem pedum tertii paris in quiete perveniens, instrumentis cibariis reconditis. *Oculi*, in posterioribus capitis angulis, globosi hemispherici, prominentes, in emarginaturis lateralibus prothoracis quiescentes. *Prothoracis dorsum* transversim abbreviatum, margine anteriore bi-emarginato vel tri-lobato, lobo medio valdè producto rectâ truncato, emarginaturis latè arcuatis, angulis exterioribus rotundatis, lineâ mediâ longitudinali elevato-costatâ, margine posteriore angulatim et apertè emarginato. *Mesothorax* supra convexiusculus, supra bicostatus, apice attenuato-rotundato, costulis duabus longitudinalibus distantibus sub-parallelis ante margines oppositos obsoletis. *Alarum superiorum* nervi in regione discoidale dichotomi, cellulae angustae elongatae: regio posterior reticulata, cellulis quadrangularibus in

triplice serie dispositis. *Tibiae* tertii paris extùs trispinosae, spinis aequè distantibus rectis conico-acutis.

Corpus violaceo-purpureum, ventre coccineo. Vertex excepto margine posteriore, prothoracis medietas antica, mesothoracis maculae duo discoidales, aliae quinque postero-marginales, metathoracis summus apex detectus annulorumque abdominalium limbus posterior, splendidè viridi-caerulei. Frons flavo-virens. Oculi et ocelli rubri. Methathoracis pleurae nigro maculatae, maculâ unicâ magnâ obliquè oblongo-ovatâ. Pedes flavi; posteriores, femoribus pallidioribus brunneo maculatis, tibiis virescentibus. Alae hyalinae, superiorum regione posticâ fusco bimaculatâ, maculâ exteriore triplo minore, alterâ latiore totum marginem postero-internum occupante.

Una femina che va invecchiando, decadendo ogni giorno dallo splendore dei primitivi colori.

TETTIGONITAE. XXI. G. CAMPTELASMUS, m.

APHROPHORIDEAE. N. 311. *Tab. synopt.*

Caput plus longum quam latum, ante oculos horizontaliter porrectum, supra planum horizontale, subtùs medio convexiusculum, utrinque depressum, margine exteriore integro semielliptico lamelloso.

Vertex totam superiorem capitis paginam occupans, a fronte carinulâ lamellosâ abruptè separatus.

Frons convexa, a capitis apice prodiens, anticè acuminata, posticè rectâ truncata, lateribus arcuatis.

Genae angustae, minus convexae, parum distinctae, depressione sub-marginali tantùm a fronte separatae, suturâ intermediâ reverâ obsoletâ.

Oculi, in angulis posterioribus capitis, retrorsùm porrecti et prothoracis marginem anteriorem amplectentes, parum elevati, oblongo-ovati.

Ocelli nulli.

Antennae in genarum medio insertae, articulo primo cylindrico. (Alii desunt.)

Prothoracis dorsum transversim rectangulare, laeviter convexum, posticè rectâ truncatum.

Scutellum breve, latum, triangulare, rectilineum, basi prothoracem latitudine aequans, posticè angulo aperto terminatum.

Alae quiescentes ultrà abdominis apicem vix prolongatae, angustae, lateraliter parum arcuatae, apice separatim oblongo-ovatae. *Superiores* homogeneae, rigidae, vix translucidae, radio marginali elevato-costato, cubitû ferè ab origine trifido, ramulis tribus rectis parum divergentibus, exteriore tantùm bifido, longè a basi anastomosi transversâ unicâ a limbo externo prodeunte interruptis; cellulis postico-marginalibus quinque inaequalibus, plerisque quadrangularibus, intermediâ triangulari.

Tibiae posteriores extûs quinque-dentatae, dentibus serratis aequidistantibus.

Species unica. — Camptelasmus caffer, m.

Campt. pallidè testaceus, supra brunneo lineatus.

Long. ab apice capitis ad extremitatem alarum, 4 millim. — Lat. ante scapulas alares, 1, 30 millim.

Alae corpori concolores, costis elevatis brunneis. Pedes pallidi.

Un individuo raccolto nella Caffreria dal Sig. Delegorgue mandatomi in pessimo stato dal mercante Dnpont. Lo spillo fu infilzato con tanta mala grazia che si perdettero il clipeo, la mascella e tutto l' apparato manducatorio.

PENTATOMITAE. XXII. G. Plinthaerus, m.

Aphrophorideae. N. 314. *Tab. synopt.*

Caput absque protuberantiâ cephalicâ, plus latius quam longius, et ad instar segmenti circuli figuratum, supra planum horizontale, posticè arcuatim emarginatum et anteriorem prothoracis marginem amplectens.

Vertex manifestè transversim bipartitus, suturâ intermediâ conspicuâ sulciformi. Pars posterior sive *pars supera magni ossi cranii* multo major, profundè emarginata et alteram includens,

utrinque ad anteriorem capitis marginem perveniens. Pars anterior, sive meo judicio, verum *Homologum ossi frontalis*, triplo vel quadruplo minor, ad anteriorem capitis marginem rarius perveniens, saepius plana horizontalis, figura et magnitudo in diversis speciebus diversae.

Frons (sic vulgò sed melius *facies*) a paginâ superiore prodiens, in margine antico rotundato-reflexa, indè in paginâ inferiore longè producta et valdè convexa, subtûs strigis transversis parallelis exarata, lineâ mediâ laevi ac deplanatâ, extûs arcuata, apicem versûs paulò angustata et rectâ terminata.

Genae in foveolâ paginae inferioris propè marginem anteriorem et sub principali verticis parte incipientes, planae, abbreviatae, suturâ sulciformi a fronte separatae et ipsâ dimidio breviores, sub oculis utrinque prolongatae et ad angulos posteriores capitis usque extensae, margine extimo arcuatae.

Appendices supra-maxillares deplanati, a margine integro genarum ad angulos exteriores clypei prolongati, a genis, a fronte et a clypeo suturis sulciformibus segregati, marginibus anticè ac intûs rectis extûs arcuatis, apice propè exteriores clypei angulos attenuato.

Clypeum uniformiter ac laeviter convexum, pentagonale, basi lateribusque antero-externis rectis, apicalibus multò longioribus intûs arcuatis, angulo extimo valdè acuto.

Appendix clypealis angustus, sub-linearis, parvus et in sinû maxillae inferioris recipiendus, ejusdem penultimi articuli vix basin superans, apice obtusus, membranaceus, laevis ac strigis transversalibus destitutus.

Maxilla inferior saltem tri-articulata, articulis basilaribus ut in plerisque *Catostomophoris* reconditis et numero incertis, ante penultimo in actû manducationis exserendo, ultimis duobus tantum in quiete detectis rectis subaequalibus, ultimo obtuso originem pedum secundi paris attingente.

Oculi magni, laterales, obliqui, oblongo-ovati, in angulis posterioribus prothoracis.

Ocelli in parte principali verticis, propè marginem posteriorem, inter se et ab oculis aequè distantes.

Antennae in foveolâ anteriore genarum insertae, visibiliter tri-articulatae, articulis duobus primis conspicuis cylindricis subaequalibus, ultimo pluribus pseudo-articulis minimis instructo setulâ capillari terminato.

Prothoracis dorsum magnum convexum hexagonale, lateribus inaequalibus, anteriore maximo arcuato, antero-externis brevissimis sub-parallelis, postero-externis longioribus rectis posticè convergentibus, posteriore triplo breviore ac profundè arcuatim emarginato.

Mesothoracis scutum sternale magnum triangulare, margine antico rotundato.

Pectus et *Abdomen* ut in plerisque *Aphrophorideis*.

Alae quiescentes, in utroque sexu, abdominis apicem et latera superantes. *Superiores* homogeneae opacae, coloratae, nervis longitudinalibus parum elevatis, anastomosibus transversis saepius obliteratis.

Pedes validi, anterioribus quatuor conformibus muticis, tibiis omnibus cylindricis, posterioribus extûs bispinosis, spinis remotis conico-acutis: tarsis tri-articulatis, articulis distinctis, ultimo longiore biunguiculato, unguiculis edentulis brevioribus minus aduncis, posteriorum articulis 1.^{mo} et 2.^{do} coronulâ spinarum minorum subtûs terminati.

1. Plinthacrus Delegororguei, m.

Plinth. testaceo-helvolus, scutelli alarumque superiorum maculis punctiformibus nigris.

Long. totius corporis, 15 millim. — Eadem laterum exteriorum prothoracis, 1 millim. — Ead. prothoracis in medio, 4 millim. — Ead. alarum superiorum, 20 millim. — Lat. ante scapulas alares, 7 millim.

Verticis pars anterior transverso-rectangularis, latere antico arcuato, angulis anterioribus obsoletis, posterioribus rectis. Prothoracis medietas anterior immarginata rotundato-producta, depressa et inaequalis, quadri vel quinque foveolata, foveolis latioribus et parum profundis sub eâdem lineâ transversali dispo-

sitis. Tibiarum posteriorum spinae laterales inaequales, primâ femori propiore triplo minore triangulari dentiforme, alterâ rectâ conico-acuta deorsûm obliquè porrectâ. Corpus totum laeve glabrum testaceo-helvolum: antennarum articulis duobus primis, verticis limbo posteriore, scutelli alarumque superiorum maculis punctiformibus, maxillae inferioris articulo ultimo, pedum quatuor anteriorum tibiarum basi tarsarumque apice, posteriorum tarsis totis spinisque nigris. Alae inferiores albo-hyalinae, nervis concoloribus.

Quattro femine della Caffreria, procedenti dalle raccolte del Sig. Delegorgue.

Questo genere contiene altre specie di prima grandezza confuse nelle collezioni colle *Afrofore* a dispetto della diversa ossatura del capo. Sono tutte esotiche, e le credo finora inedite. Non sarà pertanto inutile un nostro breve cenno alle poche che ho sotto agli occhi.

2. Plinth. venosus, m. — Praecedenti formâ et magnitudine simillimus, colore alienus. Pallidè albidus, scutello prothoracisque dorso immaculatis, alarum superiorum maculis griseo-nigrescentibus marmoreo-venosis.

Una sola femina, delle stesse località e delle stesse raccolte. A chi non si lascierà imporre dalla diversità del manto e a chi prenderà esempio dalle numerose varietà alle quali va soggetta la *Cicada bifasciata* del Linneo, non farà sorpresa ch' io ritenga il *Plinthacrus venosus* per una mera varietà dell' *Helvolus*.

3. Plinth. maculicollis, m. — Praecedentibus paulò minor. Long. totius corporis, 12 millim. — Lat. maxima propè alarum originem, 4 millim.

Verticis pars antica plus latior quam longior, margine antico arcuato, *angulis omnibus obsoleto-rotundatis*. Corpus nitidum laeve glabrum, prothorace posticè scutello alisque superioribus pubescentibus, pube e pilis rarioribus validis obliquè erectis et posticè inclinatis. Antennae pedes caput pectus venterque ut in *Pl. Delegorguei* depicti, prothoracis medietate anteriore pal-

lidiore maculis quindecim difformibus nigris insignitâ, ejusdem medietate posteriore scutello alisque superioribus griseo-fuscis, prothoracis angulis posterioribus scutelli macula discoidali cruciatâ ♀ rotundatâ ♂ alarumque superiorum guttis parvulis inordinatè sparsis albido-flavis, maculis duabus in margine exteriore alarum superiorum, primâ ante medium irregulari rufâ, alterâ ponè medium triangulari albo-hyalinâ.

Una femina delle stesse località e delle stesse raccolte. Questa specie è indubitatamente diversa da quelle che precedono, ma non saprei se si potrà dirne altrettanto in confronto a quella che segue.

4. Plinth. 4 maculatus, m. — Formâ et magnitudine praecedenti simillimus, pubescentiâ haud diversâ, capite scutello prothoracisque dorso flavis, maculis parvulis in vertice quatuor in parte anticâ prothoracis sex alterâ majore bilobâ in medio disci nigris. Alae superiores nigrae, extûs flavo bimaculatae.

Queste quattro specie Africane si ridurranno probabilmente a due. Le tre seguenti sono Americane.

5. Plinth. mexicanus, m. — Pubescens, niger, capite prothoraceque flavo-viridibus nigro maculatis.

Long. totius corporis, 12 millim. — Lat. maxima ante originem alarum, 5 millim.

Praecedentis longitudinis, ut videtur, sed latior. *Pars anterior verticis* plus duplo latior quam longior, *pentagonalis*, lateribus omnibus rectis, exterioribus brevioribus parallelis, angulo anteriore aperto. Corpus supra puberulum et sub pube nitidum, pube e pilis parvulis rarioribus ac brevioribus. Tibiarum posteriorum spinae laterales inter se et ab extremitatibus oppositis aequè distantibus, primâ minimâ vix conspicuâ. Antennae pedesque nigri. Caput flavum, maxillâ genarumque maculâ mediâ punctiformi nigris. Prothorax itidem flavus, dorso virescente ante medium maculis duobus nigris notato, pleuris dilutioribus nigro unipunctatis. Pectus et abdomen nigra. Alae superiores nigrae albo transversim bifasciatae, fasciis inaequalibus et irregulariter laciniatis a latere interno prodeuntibus et non longè a

margine exteriore abruptè terminatis, anteriore intûs latiore et extûs sensim coarctatâ, posteriore costis longitudinalibus interruptâ.

Due femine del Messico, avute dal Sig. Deyrolle.

6. Plinth. irroratus, m. — Magnitudo et statura praecedentium. Corpus densius pubescens, fronte minus convexâ, vertice utrinque abruptius terminato, prothoracis dorso minimè convexo, quibus faciei characteribus a cospeciebus satis distinguitur. Flavo-testaceus, vertice prothoracisque medietate anteriore nigro punctatis, hujus in medio dorsi maculis quatuor majoribus brunneo-nigrescentibus, exterioribus marginalibus triangularibus anticè emarginatis, interioribus longitudinalibus obovatis. Maxilla inferior testacea, articulo ultimo nigro. Venter rubidus. Alae superiores opacae brunneae albo irroratae, maculis duabus majoribus in margine exteriore, primâ flavo-rubidâ, secundâ albo-hyalinâ: inferiores basi fuscescentes apice dilutiores, nervis nigro-piceis. Pectus flavo-virescens. Antennae, articulo primo testaceo, secundo nigro, (alii desunt). Pedes rufo-testacei, tibiarum apice tarsali nigro, tarsis primi et secundi paris prorsûs nigris, iisdem tertii paris testaceis, articulorum apicibus spinulosis nigris.

Due femine e un maschio del Brasile, avuti dal Sig. Buquet.

7. Plinth. phaleratus, m. — Forma et magnitudo praecedentium, *Verticis parte anticâ* quam in reliquis cospeciebus magis porrectâ et *capitis apicem attingente*, quadrangulari, angulis posterioribus rectis, lateribus exterioribus brevibus rectis parallelis, margine anteriore paulò incrassato valdè arcuato semicirculari. Oculi adproximati. Frons mediocriter convexa, in paginâ inferiore tota decurrens. Corpus subtûs nitidum oculo nudo glabrum, supra opacum laevissimè pubescens, pube deciduâ in nonnullis deficiente. Prothorax uniformiter convexus, confusim punctatus, rugosiusculus, punctis creberrimis difformibus confluentibus et strigulas transversales efficientibus. Alarum superiorum nervi longitudinales elevato-costati et marginem extimum attingentes, radio crassiore. *Tibiarum posteriorum spinis*

duabus lateralibus aequalibus et conformibus. Corpus subtûs nigrum, antennis maxillâque concoloribus, supra brunneo purpureum: capitis limbo anteriore, strigis duabus longitudinalibus ab angulis posterioribus frontis prodeuntibus et angulos posteriores prothoracis attingentibus, alterâ mediâ a basi partis anticae verticis dorsum prothoracis rectâ percurrente et supra scutellum plus minusve prolongatâ, aliis duabus exterioribus ponè oculos incipientibus et ad latera postero-externa prothoracis pervenientibus, flavis. Alae superiores brunneae, albo quadri-maculatae, maculis hyalinis, anterioribus duabus majoribus medium versùs et ferè sub eâdem lineâ transversali, exteriore latiore transverso-quadratâ in regione discoidali, altera arcuatâ in regione internâ, 3.tia et 4.ta parvulis punctiformibus, ambobus in regione posteriore, alterâ sub-marginali, alterâ sub-apicali.

Un maschio e una femina del Brasile, avuti dal Sig. Buquet. Un' altra femina, della stessa provenienza, differisce alquanto dal tipo nella distribuzione dei colori. — Alarum superiorum maculae posteriores obsoletae, anteriores coalitae et fasciam transversam angustiorem efformantes.

PENTATOMITAE. XXIII. G. Tremapterus, m.

Aphrophorideae. N. 316. *Tab. synopt.*

Caput plus longius quam latius at sine protuberantiâ, anticè oblongo-ovatum, supra magis, subtûs minus convexum, posticè emarginatum, prothoracis marginem anteriorem amplectens.

Frons in medio paginae superioris capitis incipiens, suturis intermediis sulciformibus rectis parallelis, genas latitudine aequans longitudine superans, subtûs minus elevata et paulò dilatata, utrinque laeviter arcuata, apice angulatim emarginata.

Genae supra convexiusculae, in margine anteriore cum fronte conjunctim rotundatae, subtûs immediatè et abruptè depressae, inde planae et ponè oculos dilatatae.

Clypeum deplanatum.

Maxilla inferior recta, ad originem pedum intermediorum vix perveniens, articulis in quiete detectis duobus subaequalibus, ultimo truncato.

Oculi parum elevati, magni, transverso-ovati, sessiles, laterales, in angulis posterioribus capitis.

Ocelli parvi adproximati, in vertice frontis originem propè.

Antennae in paginâ inferiore capitis, propè marginem anteriorem, in foveolâ genarum insertae, visibiliter tri-articulatae, articulis duobus primis conformibus crassis cylindricis, primo longiore, tertio tenuiore saltem tripartito, pseudo-articulis minimis oculo nudo vix perspicacis, ultimo setigero.

Prothoracis dorsum uniformiter convexum immarginatum hexagonale, latere anteriore maximo in medio ovato producto utrinque ponè oculos laeviter emarginato, lateribus antero-externis brevioribus rectis parum divergentibus, postero-externis rectis ac valdè convergentibus, posteriore recto, angulis posterioribus latè apertis.

Scutellum triangulare, utrinque arcuato-emarginatum, apice acuminatum.

Alae superiores abdomen obtegentes, homogeneae, coriaceae, opacae, fortiter impresso-punctatae, in regione internâ scutellum circumdantes planae horizontales, in reliquis uniformiter convexae obovatae, apice separatim rotundatae, extûs arcuatae integrae immarginatae, nervis plerisque obliteratis, cubitu ab origine prodeunte margini exteriori parallelo et ante medium abruptè terminato.

Alae inferiores, nullae.

Pygidium medium.

Pedes validi, gressorii, anterioribus quatuor inermibus, tibiis cylindricis, posterioribus extûs bispinosis et in apice tarsali coronâ spinularum conico-acutarum subtûs armatis, spinis lateralibus subaequalibus magnis, basi compressis triangularibus apice acuminatis et deorsum obliquè porrectis.

Species unica. — Tremapterus Dregei, m.

Tremapt. niger, dorso griseo-nigro punctato.

Long. totius corporis, 2,50 millim. — Lat. inter angulos posteriores prothoracis, 1,50 millim.

Impresso punctatus, oculo nudo glaber, punctis in specimine vivo fortè piligeris. Frontis medietas posterior albido-flavae. Femorum basis brunnea.

Un individuo mal conservato del Capo di Buona Speranza, avuto dal Sig. Drege. Non so dire dei tarsi perchè mancano, nè del sesso perchè l'abdome è guasto.

La struttura della testa diversa nei generi *Plinthacrus* e *Tremapterus* dà luogo a una importante osservazione. Quell' osso che nei quadrupedi è connesso dal lato esterno col frontale rade volte si palesa distinto negli insetti e suole esservi intimamente saldato con qualche altro osso adjacente. Ma questa saldatura non è parecchia in tutti, cioè non ha luogo in tutti col medesimo osso. Ci servano di esempio i due generi nuovi che abbiamo proposto. Nel *G. Plinthacrus*, come nel *G. Aphrophora*, questo omologo dell' orbitale confuso col temporale si confonde coll' *Osso grande del cranio* (*Vertex*) e l' osso delle guancie (*Gena*) non incomincia visibilmente che nella facciata inferiore del capo presso all' origine delle antenne. Nel *G. Tremapterus*, come nel *G. Cercopis*, quest' omologo medesimo è distintamente separato dal vertice e si confonde colla guancia dopo averla raggiunta sotto al margine anteriore del capo. A rigore, avrei forse dovuto rilevare, nella descrizione, l'esistenza di questo pezzo e mantenerle il nome imposto dalla legge delle connessioni. Ma la mia opinione, comunque io la creda fondatissima, potrebbe non essere universalmente adottata e per ciò non vorrei nuocere alla pratica applicazione, aggiungendo alle difficoltà del sistema quella di una nomenclatura inusitata e non bene intesa. Nel dire pertanto che le guancie del *Tremaptero* incominciano sulla facciata inferiore del capo, ho impiegato le espressioni che mi sono sembrate le più intelligibili.

La presente osservazione è aliunde sufficiente per fissarne il diverso significato nel mio modo di vedere.

TETTIGONITAE. XXIV. G. Wolfella, m.

Tettigonioideae. N. 330. *Tab. synopt.*

Caput posticè prothoracis marginem anteriorem amplectens, ante oculos triangulare, supra planum, subtûs convexum, apice protuberans. Protuberantia reliquo capite longior, lateraliter compressa, lamellosa, adscendens et recurva, in parte adscendente posticè laciniata, in extremitate partis recurvae arcuato-emarginata, apice acuminato.

Vertex a fronte distinctè separatus, suturâ intermediâ elevatâ costaeformi ab oculis prodeunte et ad apicem protuberantiae utrinque continuatâ, ante protuberantiae initium planus horizontalis triangularis, anticè angustatus lateribus rectis, in protuberantiâ abruptè coarctatus, lateraliter compressus et in totâ longitudine medio carinatus; carinâ longitudinali, ante protuberantiae initium costaeformi, in protuberantiâ compressâ lamellosâ, in parte adscendente tri-laciniatâ laciniis subaequalibus semi-ovatis, in parte recurvâ ovato-dilatatâ, apice attenuatâ.

Frons in paginâ inferiore capitis, propè cantum anteriorem oculorum, sulculo tenuissimo a genis separata, subtûs convexa lateribus rectis sub-parallelis, margine posteriore vel clypeali rectâ truncato, propè capitis apicem unâ cum vertice abruptè protuberans, in totâ protuberantiae longitudine lateraliter compressâ et paginis duabus obliquè declivibus constans, costâ intermediâ alto-elevatâ sine laciniis et propè summum apicem arcuato-emarginatâ.

Genae, sub costâ verticem frontem intercipiente et in cantû anteriore oculorum incipientes, anticè angulatae, post antennarum originem subitò dilatatae ac oculorum marginem inferiorem ambientes, intûs angulos frontis clypeales attingentes, ab appendicibus supra-maxillaribus rectâ separatae, convexiusculae, extûs arcuatae.

Appendices supra maxillares oculo nudo cum genis confusi, sed sulculo parum visibili reverâ separati, convexiusculi, plus longiores quam latiores, ad angulos posteriores clypei pervenientes, latere extimo cum genis conjunctim latè arcuato.

Clypeum plus duplo longius quam latius, quadrangulare, rectangulum, coxas 2.[di] paris in quiete attingens.

Appendix clypealis elongatus linearis, apicem versus sensim attenuatus, ultrà penultimum maxillae inferioris articulum in quiete protensus.

Maxillae inferioris pars in quiete detecta brevissima et originem pedum posteriorum haud superans, biarticulata, articulis subaequalibus, ultimo truncato.

Oculi laterales, prominentes, oblongo-ovati, subtûs latiores et posticè emarginati.

Ocelli inter se distantes, in vertice propè cantum antero-internum oculorum.

Antennae ab origine genarum prodeuntes, parvae, tri-articulatae, articulis duobus primis conformibus, cylindricis, primo dimidio breviore, ultimo tenue reliquis unâ longiore pseudo-articulis conflato plurimis quorum numerum eruere non valui, a primo ad ultimum gradatim longitudine auctis et latitudine diminutis, ultimo setigero.

Prothoracis dorsum uniformiter convexum, anticè paulò declive, trapezoideum, posticè dilatatum, latere anteriore arcuato immarginato: lateribus exterioribus rectis divergentibus margine incrassatis; latere posteriore utrinque rotundato, in medio laevissimè arcuato-emarginato.

Scutellum, ut in praecedentibus.

Abdomen in *foeminâ*, (*marem* non vidi) dorso planum, subtûs uniformiter convexum, ventris segmentis quinque anterioribus ut in aliis *Tettigonitis* evidenter tripartitis, parte mediâ reliquis unâ latiore, lateralibus stigmatiferis sub-quadratis obliquè extrorsum reflexis, ostiis trachealibus in angulis antero-internis laminarum lateralium, genitalibus exsertis vix dimidiae abdominis longitudinis.

Alae quiescentes, nec latera nec extremitatem abdominis obtegentes. *Superiores* angustae, homogeneae, coriaceae opacae pubescentes, costis parum elevatis, limbo postero-interno membranaceo translucido longitudinaliter plicato. *Inferiores* rudimentariae et volatui ineptae.

Pedes gressorii: anteriores quatuor conformes sub-aequales inermes pubescentes, tibiis prismaticis triedris, tarsis tri-articulatis, articulis obconicis, tertio reliquis unâ longiore biunguiculato et uni-appendiculato, unguiculis abbreviatis crassioribus, appendice unico latiore margine ciliato bilobo; posteriores elongati, tibiis compressis, costis exterioribus adproximatis octo-spinosis, alterâ interiore fimbriatim spinulosâ, tibiarum apice tarsali articulorumque tarsalium primi et secundi paris apicibus spinosis.

Species unica. — Wolfella Caternaultii, m.

Wolf. nigro-brunnea, protuberantiae cephalicae macula mediâ albidâ, apicali nigrâ.

Long. ab origine protuberantiae abdominis apicem, 14 millim. — Lat. maxima inter angulos posteriores prothoracis, 3,50 millim.

Tota brunneo-fusca, capite creberrimè et confusim punctato, pectore prothoracis dorso scutelloque distinctius punctulatis, fronte in paginâ inferâ transversim strigatâ. Abdomen rufo-brunneum. In parte adscendente protuberantiae, macula dorsalis sive frontalis albida, in ejusdem parte recurvâ ante apicem macula utrinque communis nigra. Tarsi nigri.

Due femine della Costa di Guinea acquistate dal Sig. Buquet. Dedico il genere all' Autore dell' *Icon. Cimic. descr. illustr.* e la specie al viaggiatore al quale ne dobbiamo la scoperta.

TETTIGONITAE. XXV. G. Proranus, m.

Tettigonioideae. N. 331. *Tab. synopt.*

Caput semi-ovatum, supra planum sensim declive, utrinque marginatum, margine tenui costaeformi, posticè latè arcuato-emarginatum et prothoracis marginem anteriorem amplectens.

Vertex totam superiorem capitis paginam occupans, a fronte costulâ marginali distinctè separatus.

Frons a capitis apice incipiens, a genis suturâ sulciformi distinctè separata, in paginâ inferiore extensa, extûs paulo arcuatâ, in apice clypeali rectâ truncata, uniformiter convexa, transversim strigata, strigis parallelis lineam mediam versûs obliteratis.

Genae planae, obliquae et introrsùm declives, anticè coangustatae, post originem antennarum utrinque dilatatae, extùs oculos circumdantes et ad angulos posteriores capitis protensae, fronte longiores, appendices supra-maxillares involventes et in contactû posteriorum clypei angulorum terminatae.

Clypeum, ut in *Wolfellâ*, rectangulum et plus longius quam latius. *Appendix clypealis* et *maxillae inferioris pars detecta*, etiam ut in praecedente.

Appendices supra-maxillares oblongo-ovati, sulculo conspicuo distinctè circumscripti, inter genas extûs et clypeum intûs perfectè inclusi.

Oculi laterales, magni, parum prominuli, oblongo-ovati, in angulis posterioribus prothoracis.

Ocelli, ante oculos et inter se paulò magis quam ab illis distantes.

Prothoracis dorsum uniformiter convexum, posticè elevatum et anticè sensim declive, hexagonale lateribus inaequalibus, anteriore lato laeviter arcuato, antero-externis rectis divergentibus costato-marginatis brevioribus subsinuatis maximè convergentibus, posteriore recto, angulis anterioribus ferè rectis, exterioribus obsoletè rotundatis, posterioribus rectilineis valdè apertis.

Scutellum planum aequilaterale, utrinque arcuatim emarginatum, apice attenuato: disci spatium quoddam notatû dignum pentagonale et sulculo conspicuo circumscriptum.

Alae magnae, in quiete abdominis latera obtegentes et extremitatem superantes. *Superiores* heterogeneae, regione internâ corneâ opacâ, reliquis membranaceis, regione posteriore latè reticulatâ, cellulis interioribus paucis majoribus difformibus,

exterioribus clausis parvulis subquadratis vel rotundatis. *Inferiores*, vix breviores, homogeneae membranaceae hyalinae.

Antennae in paginâ inferiore et propè originem genarum insertae, parvae, in specimine sub oculis distinctè tri-articulatae, *articulo* primo cylindrico, secundo moniliformi, *tertio globuloso et sine setâ terminali*. — An integrae?

Pedes, formae consuetae in hac familiâ, gressorii, anterioribus quatuor inermibus, posterioribus longioribus spinosis. *Tibiae* omnes conformes prismaticae triedrae, posterioribus neutiquam compressis, costulis exterioribus 6 vel 7-spinosis, spinis conico-acutis validis aequidistantibus, costulâ internâ fimbriatim setulosâ. *Tarsi*, ut in *Wolfellâ*, appendice membranaceo articuli tertii dimidio minore, anteriorum quatuor articulo ultimo reliquis unâ longiore, posteriorum art. 1.^{mo} et 3.^{tio} subaequalibus.

Venter in *foeminâ* (*marem* non vidi) medio carinatus, laminis lateralibus deorsùm inflexis.

Species unica. — PRORANUS GHILIANII, m.

Pror. supra dilutè viridis, subtùs pallidè flavescens.

Long. totius corporis, 9 millim. — Ead. a capitis apice ad alarum originem, 2 millim. — Ead. alarum superiorum, 8 millim. — Lat. maxima inter angulos posteriores prothoracis, 4, 50 millim.

Caput supra, prothoracis dorsum, pectoris latera, scutelli spatium discoidale pentagonale alarumque superiorum regio interna, impresso-punctata, capitis prothoracisque punctis confusis confluentibus, reliquis rotundis discretis. Corpus subtùs, oculo nudo, laeve, glabrum. Alae, exceptâ superiorum regione internâ, albo hyalinae, nervis concoloribus opacis. Antennae pallidae. Pedes virescentes.

Una femina del Para, raccolta dal Sig. Ghiliani nel 1846.

Mi è sorto il sospetto che questa specie possa riferirsi a *G. Xerophlaeum G.*^{r} del quale non conosco il tipo; se ciò fosse il nuovo nome *Proranus* sarebbe da essere soppresso.

TETTIGONITAE. XXVI. G. Protonesis, m.

Jassoideae. N. 336. *Tab. synopt.*

Caput plus latius quam longius, supra planum, subtûs obliquè inflexum magis convexum, anticè arcuatim porrectum, posticè arcuatim emarginatum et prothoracis marginem anteriorem ambiens.

Vertex quadrangularis, transversus, vix tertiam partem paginae superioris occupans, planus, horizontalis, anticè suturâ costaeformi terminatus et a *fronte* (melius *facie*) canali lato transverso separatus.

Facies laterales capitis (Ossum frontale) a margine interno oculorum prodeuntes, medio conjunctae, canalem continuum transversum ferè verticalem simul efformantes, costis elevatis transversis parallelis a fronte et a vertice in capitis paginâ anteriore pariter separatae.

Frons parum convexa, propè canthum antero-inferum oculorum incipientes, anticè angustatae, ponè oculos expansae, posticè prolongatae; margine exteriore sinuato, margine interno ad angulos frontis clypeales usque recto, indè rotundato-emarginato et appendices supra-maxillares extûs involventes, propè apicem iterum recto et angulos apicales clypei attingente.

Appendices supra maxillares, ut in *G. Proranus*, minus regulariter figurati, breviores, ferè aequè lati ac longi.

Clypeum planiusculum, medio longitudinaliter carinatum, quadrangulare, rectilineum, plus longius quam latius, lateribus oppositis sive basilari et extimo sub-parallelis, ultimo latiore.

Maxilla inferior, ut in praecedente. *Appendix clypealis apparatusque manducatorius* invisi.

Oculi magni et diametro transversali verticis latitudine ferè aequales, utrinque posticè prolongati et in contactû immediato cum angulis anterioribus prothoracis.

Ocelli in medio sinû canalis transversi frontem et verticem inter jacentis, ab oculis et a lineâ mediâ aequè distantes.

Antennae parvae propè canthum antero-inferum oculorum insertae, saltem *quadri-articulatae*, articulis quatuor diametro subaequalibus, primo longiore cylindrico, secundo arcuato obconico obliquè truncato, tertio brevissimo et partim occultato, quarto globoso in cadavere forato. — An integrae? An in specimine vivo setigerae?

Prothoracis dorsum abbreviatum et uniformiter convexum, primo visû transverso-ovatum sed reverâ *hexagonale*, lateribus inaequalibus, anteriore maximo in medio rotundato utrinque sinuato, reliquis rectilineis, antero-externis brevissimis parallelis, postero-externis et posteriore longitudine subaequalibus, illis valdè convergentibus, angulis posterioribus apertis.

Scutellum planum, triangulare, aequilaterale, apice acutum.

Abdomen deest et de sexû nil mihi innotescit.

Alae superiores homogeneae membranaceae laeves glabrae, nervis parum elevatis, nusquam in quiete sese invicem involventes, margine interno recto, apice separatim rotundatae, regionis discoidalis anastomosibus transversis nullis, regionis posterioris cellulis discoidalibus tribus marginalibus quatuor angustis elongatis quadrangularibus.

Alae inferiores superiorum longitudinis, sub iisdem in quiete reconditae.

Pedes inaequales, posterioribus saltem duplo longioribus. *Tibiae* lateraliter compressae, anteriorum quatuor costulis externis maximè approximatis fimbriatim setulosis, posteriorum costis tribus seriatim plurispinosis, spinis exterioribus rarioribus ac validioribus. *Tarsi* tri-articulati, articulo primo reliquis unâ longiore.

Species unica. — Protonesis Delegorguei, m.

Proton. niger, supra brunneo-purpureus nigro lineatus.

Long. ab apice verticis ad extremitatem alarum superiorum, 5 millim. — Lat. inter angulos posteriores prothoracis, 2 millim.

Impresso-punctatus, dorso purpureo-brunneo, verticis maculis tribus prothoracisque totidem lineolis parallelis in dorso scutelli

continuatis nigris. Alae superiores dilutiûs purpurascentes et splendore quodam aureo nitentes, nervis nigris. Inferiores albo-hyalinae, nervis concoloribus. Corpus subtûs cum pedibus nigrum, tibiis tarsisque anterioribus quatuor testaceis. Antennae nigrae, articulo primo flavo. — Facies *Caelidiarum*.

Un solo individuo della Caffreria, procedente dalle raccolte Delegorgue.

TETTIGONITAE. XXVII. G. Siva, m.

Jassoideae. N. 340. *Tab. synopt.*

Caput plus latius quam longius supra planum horizontale, anticè rotundatum marginatum margine incrassato costaeformi, subtûs deorsum declive et parum convexum.

Vertex a fronte abruptè separatus, angulo plano paginis duabus oppositis efformato maximè acuto, basi ponè oculos utrinque attenuatus acutè productus et angulos posteriores capitis adproximans.

Frons minimè convexa, deorsùm parum declivis, ferè horizontalis, a genis suturâ sulciformi visibiliter separata, sulculo suturali in paginâ inferiore a margine antico immediatè prodeunte, lateribus exterioribus ante insertionem antennarum rectis parallelis, ibi sinuato-emarginatis, indè iterum rectis convergentibus, margine clypeali rotundato.

Genae anticè angustae planiusculae, propè antennarum originem foveolatae, indè utrinque dilatatae et oculos ambientes, minimè tamen convexae et vix introrsum declives, margine extimo latè sinuato, latere interno ante angulos posteriores sive clypeales a fronte continuò abeunte appendices supra-maxillares involvente et angulos posteriores clypei attingente.

Appendices supra-maxillares, ut in praecedente, suturâ sulciformi circumscripti, ante frontis extremitatem incipientes, anticè rectâ truncatae, extûs rotundatae, posticè attenuatae.

Clypeum planum, sine carinâ mediâ, basi fronte angustius, trapezoideum, trapezû ut in praecedente.

Appendix clypealis et *apparatus manducatorius* in specimine meo reconditi.

Oculi laterales, parum prominuli, oblongo-ovati, supra angustiores, vix in extremo apice in contactû immediato cum prothorace.

Ocelli in margine antico et costaeformi capitis, ab oculis discreti sed parum remoti.

Antennae parvae, in foveolâ genarum insertae, mutilae in meo specimine et articulis duobus solummodo instructae, primo infundibiliformi obliquè truncato, secundo moniliformi.

Prothoracis dorsum elevato-convexum, hexagonale, latere anteriore latiore rotundato, reliquis rectilineis, antero-externis divergentibus, postero-externis brevioribus convergentibus, angulis posterioribus valdè apertis.

Scutellum triangulare, aequilaterale.

Alae superiores homogeneae sub-coriaceae impresso-punctatae vix translucidae, intûs rectae et nusquam sese invicem involventes, posticè separatim semi-ellipticae: costis longitudinalibus, in regione discoidali, dichotomis et cellulas angustas elongatas includentibus, in regione posteriore, pluries transversim interruptis; cellulis hujus regionis sub-quadratis. *Inferiores* membranaceae, vix aliis breviores, volatui aptissimae.

Pedes, ut in praecedente.

Species unica. — Siva strigicollis, m.

Siv. pallidè virens, capite prothoraceque supra transversim strigatis.

Long. a capitis apice ad extremitatem alarum superiorum, 9 millim. — Lat. inter angulos posteriores prothoracis, 3 millim.

Supra dilutè virescens, subtûs albidus, capitis margine anteriore incrassato et nigro maculato. Vertex prothoraxque supra strigis parallelis transversim exarati. Alae inferiores albae, costis concoloribus.

Un individuo del Coromandel, donatomi dal Sig. Reiche. Anco in questo manca l'abdome e nulla so dire del suo sesso. — *Siva*, nome della mitologia indiana.

TETTIGONITAE. XXVIII. G. Diglenita, m.

Jassoideae. N. 341. *Tab. synopt.*

Corpus deplanatum.

Caput plus longius quam latius, supra horizontale, subtûs parum convexum, margine anteriore semi-ovato elliptico.

Vertex semi-ellipticus, a fronte abruptè separatus suturâ intermediâ marginali carinaeformi expansâ supra reflexâ subtûs deplanatâ, posticè laeviter arcuato-emarginatus, ponè oculos utrinque attenuatus et ferè ad posteriores capitis angulos usque productus.

Frons uniformiter ac laeviter convexa, a genis suturâ sulciformi separata, in totâ longitudine posticè sensim coangustata, apice clypeali emarginato, angulis posterioribus rotundatis.

Genae, in paginâ inferiore capitis, marginis anterioris medium versus sulculo longitudinali a fronte separatae, post antennas ut in praecedente utrinque dilatatae, et intûs appendices supra-maxillares involventes, margine extimo emarginato.

Appendices supra-maxillares parvi, plani, ab angulis frontis clypealibus prodeuntes, basi angustiores et rectâ truncati, inter genas frontem et clypeum perfectè inclusi.

Clypeum convexiusculum, sub-ovatum, apice angustius rectâ truncatum.

Maxilla inferior, ut in praecedentibus.

Oculi mediocres, parum prominuli, laterales, oblongo-ovati, supra angustati sub-lineares.

Ocelli paulò ante oculos, in margine exteriore capitis.

Antennae in paginâ inferiore, in sinû ipso sulculi genas et frontem intercipientis, ferè sub eâdem lineâ transversâ ac ocelli, parvulae, tri-articulatae, articulis duobus primis cylindricis subaequalibus, tertio globuloso setigero.

Prothoracis dorsum saltem plus duplo latius quam longius, minimè convexum, vix anticè declive, quadrangulare, margine anteriore rotundato, lateribus exterioribus rectis sub-parallelis costato-marginatis, latere posteriore utrinque rotundato medio emarginato.

Scutellum, ut in praecedentibus, triangulare aequilaterale.

Abdomen, segmentis ventralibus tripartitis, parte mediâ reliquis duabus unâ latiore uniformiter convexâ, lateralibus deorsùm inflexis. — *Genitalia foeminae*, (*marem* non vidi) elongata acuminata tertiam abdominis totius partem longitudine superant.

Alae quiescentes, abdominis apicem etiam superant, volatui aptissimae ut in *Sivâ*. *Superiores*, costis longitudinalibus magis elevatis, in regione posteriore anastomosibus transversis nullis, cellulis limbalibus extimis 3 vel 4 quadrangularibus.

Pedes ut in *Sivâ*.

Siccome tipo di questo genere, possedo un individuo del Capo di Buona Speranza, mandatomi dal Sig. Drege pell' *Jassus peltastes*, *Burm.* Dovendo presumere che il Sig. Burmeister abbia illustrata questa specie in qualcheduna delle sue egregie opere, ho stimato astenermi dal ridurne la descrizione specifica e limitarmi a rilevare i caratteri che mi sembrano distinguere il *G. Diglenita* dal *G. Jassus*.

TETTIGONITAE. XXIX. G. Adiaerotoma, m.

Jassoideae. N. 346. *Tab. synopt.*

Corpus deplanatum. — *Caput* horizontale, ferè plus duplo longius quam latius, subtûs anticè concavum, ante oculos visibiliter marginatum margine costaeformi parum incrassato, apice rotundatum, posticè arcuatim emarginatum et prothoracis marginem anteriorem ambiens, paginâ superiore ab inferiore abruptè separatâ, suturâ intermediâ costaeformi.

Vertex totam paginam superiorem capitis occupans, ponè oculos utrinque acuminatus et ad angulos posteriores perveniens, supra longitudinaliter bicostatus, costis adproximatis flexuosis, lineâ mediâ canaliculatâ, margine laterali medium versûs dentato-sinuato.

Frons infera, anticè medio concava, utrinque inflata margine anteriore rotundato, posticè convexiuscula angustior elongata, lateribus sub-parallelis, margine clypeali-arcuato, paulò ante oculos a genis suturâ sulciformi distinctè separata.

Genae, ut in praecedente, breviores et plus latiores quam longiores, margine extimo rectâ truncato, post appendices supra-maxillares intûs valdè attenuatae et apice acutissimo cum angulis posterioribus clypei conjunctae.

Appendices supra-maxillares, ut in praecedente.

Clypeum elongatum, convexum, lateribus rectis parallelis, apice depressum rotundatum.

Maxilla inferior, ut in praecedentibus, paulò longior.

Oculi etiam ut in praecedente.

Ocelli nulli.

Prothoracis dorsum parum elevatum et vix anticè declive, ut in *G. Diglenita*, sed hexagonali hexagoni lateribus angulisque ut *G. Siva*.

Scutellum, ut in praecedente.

Venter in *foeminâ* (*marem* non vidi) laminis lateralibus deorsùm valdè inflexis undè venter concavus videretur, quod perperam, laminis intermediis duplo latioribus plus minusve convexis, quinta magis elevatâ. Genitalia exserta minus elongata et tertiâ totius abdominis parte breviore, valvulis externis inflatis.

Alae quiescentes, abdominis latera obtegentes et apicem superantes. *Superiores* heterogeneae, regione internâ coriaceâ opacâ, reliquis membranaceis hyalinis, nervis costatis alto elevatis, cellulis regionis discoidalis sex oblongo ovatis..... (Regio posterior in specimine meo deest.) — *Inferiores* membranaceae hyalinae, nervis distinctis.

Species unica. — Adiaerotoma eupelicoides, m.

Adiaer. nigra, capite prothoraceque supra sordidè flavis fasciis longitudinalibus fusco-nigris.

Long. totius corporis, 9 millim. — Lat. propè alarum originem, 3 millim.

Caput, scutellum partim alarumque superiorum regio interna crebrè ac distinctè punctata. Prothoracis dorsum strigis parallelis transversim exaratum. Scutellum ponè medium sulculo transverso arcuato inaequaliter bipartitum, parte posticâ angu-

stiore transversim strigatâ. Caput et prothorax supra testaceo-flavi, verticis canali intercostali prothoracisque fasciis duabus longitudinalibus adproximatis posticè angulatim dilatatis nigro-fuscis. Scutelli pars anterior fusca, maculis quatuor flavescentibus notata. Corpus subtûs nigrum, mesosterni disco ventrisque laminis intermediis rufescentibus. Antennae pedesque anteriores quatuor rufo-testacei, posteriores partim concolores femoribus obscurioribus tibiis tarsisque nigro maculatis. Alarum superiorum costae flavescentes: inferiores albae, costis fuscescentibus.

Una femina del Brasile, avuta dal Sig. Buquet nel 1847. Un falso aspetto del *G. Eupelix* mi ha suggerito il nome specifico proposto. Non è però col *G. Eupelix*, ma bensì col *G. Hemipeltis* che il *G. Adiaerotoma* ha le sue maggiori affinità. Anzi sono tali e tanti i loro punti di contatto che stimo utile riportare in breve i connotati caratteristici dell' *Hemipeltis* del Chilì, affinchè ciascuno giudichi se i due gruppi sieno da separarsi o da riunirsi.

G. Hemipeltis. — *Vertex* (semi-ellipticus) laeviter convexus, margine integro elevato-costato.

Frons in totâ longitudine uniformiter convexa, posticè latè rectâ truncata.

Genae propius oculis incipientes.

Appendices supra-maxillares basi et intûs rectâ truncati, extûs rotundati, apice attenuati.

Clypeum pentagonale rectilineum, plus longiore quam latiore, lateribus exterioribus parallelis, angulo apicali valdè aperto.

Possedo inoltre i resti di una specie brasiliana che conserva tuttora i caratteri del *G. Hemipeltis*, ma che si distingue dalla specie chilense pel vertice in triangolo curvilineo, e terminato in una punta bene pronunziata.

TETTIGONITAE. XXX. G. Aglenita, m.

Jassoideae. N. 348. *Tab. synopt.*

Corpus, supra mediocriter, subtûs valdè convexum. — *Caput* supra planum horizontale, spatio interoculare evidenter plus

latiore quam longiore, paginâ superiore ab inferiore abruptè separatâ, posticè arcuato-emarginatum et prothoracis marginem anteriorem ambiens, subtûs convexum.

Vertex a fronte suturâ elevatâ costaeformi separatus, apice angulatus, posticè ponè oculos attenuatus, utrinque ad angulos posteriores capitis usque productus et cum osso magno paginae inferioris non interruptè coalitus.

Frons in totâ longitudine uniformiter convexa, paulò ante oculos sulculo intûs arcuato a genis distinctè separata, lateribus post antennarum originem rectis parallelis, angulis posterioribus obsoletè rotundatis, margine clypeali angusto arcuatim emarginato.

Genae et *Appendices supra-maxillares*, ferè ut in *Adiaerotomâ*. Illae, post antennarum originem minus depressae, magis elongatae, post appendices minus attenuatae, apice intûs rectâ truncatae. Hi, margine exteriore semi-ovato, interiore recto, apice obtuso arcuato.

Clypeum angustum sub lineare, posticè sensim laeviter attenuatum, extremitatibus oppositis arcuatis.

Oculi laterales, oblongo-ovati ut in praecedente, sed minus elongati et supra minus angustati.

Ocelli nulli.

Antennae in paginâ inferiore capitis, in foveolâ genarum propè sinum frontalem, *inter oculos insertae*, articulis tribus conspicuis instructae, primo longiore sub-cylindrico, secundo crassiusculo moniliformi, tertio parvulo tenuiore setigero, setâ terminali reliquis articulis unâ quadruplo longiore, pseudo-articulis plurimis indistinctis conflatâ.

Prothoracis dorsum transversum, reverâ *hexagonale*, lateribus oppositis id-est anteriore et posteriore sub-aequalibus parallelis pariter arcuatis quocircâ dici potest *Prothorax lunatus*, reliquis rectis, antero-externis longioribus, angulis exterioribus acutiusculis, posterioribus obsoletè rotundatis.

Scutellum, ut in praecedentibus.

Pectus elevatum, *mesosterno* praesertim *maximo inflato*, coxis secundi paris ab iisdem primi paris remotioribus.

Venter, in utroque sexû, concavus, laminis lateralibus deorsùm perpendiculariter deflexae, intermediis planis. — In *foeminâ*, segmentum ultimum genitalia sistens reliquis unâ longius. — In *mare*, segmentum penultimum latè arcuato-emarginatum, ultimo reliqua unâ vix longitudine aequans.

Alae quiescentes abdominis latera et apicem longè superantes, homogeneae, membranaceae hyalinae, nervis tenuibus parum elevatis. *Superiores* paulò longiores, nervis longitudinalibus parum ramosis, anastomosi transversali unicâ sub-marginali, regionis posterioris cellulis apicalibus tribus elongatis quadrangularibus.

Pedes, formae consuetae in hac familiâ, tibiis posticis, ut in praecedentibus.

Species unica. — Aglenita bipunctata, m.

Agl. pallidè virescens, vertice nigro bipunctato.

Long. a capitis summo apice ad extremitatem genitalium, ♀ 9 millim. ♂ 8 millim. — Ead. alarum superiorum in utroque sexû, 9 millim. — Lat. ante alarum originem, 3 millim. — Altitudo media mesopectoris, 3 millim.

Oculo nudo glabra laevis nitida, supra pallidè virescens, subtûs albida, in medio verticis loco ocellorum puncti duo nigri *caeci*. Antennae pedesque pallidi. Alarum costulae, albae opacae.

Abita nell' America meridionale. I due sessi del Sig. Buquet, il maschio di Cajenna, la femina del Brasile.

TETTIGONITAE. XXXI. G. Selenopsis, m.

Jassoideae. N. 349. *Tab. synopt.*

Il tipo di questo genere mi fu mandato dal Sig. Parreyss col nome *Jassus chrysographus*. Dubitando che possa essere stata descritta, farò come pel *G. Protonesis* e mi limiterò a indicare i tratti che la contraddistinguono da tutte le altre *Jassoidee* senza *ocelli*.

Cum *Diglenitâ* convenit capitis spatio inter-oculare plus latiore quam longiore paginâque superiore ab inferiore abruptè

separatâ. Differt praesertim pectore laeviter convexo, mesosterno nec inflato nec magnitudine aucto, altitudine maximâ mesopectoris vix quartam longitudinis partem adaequante, coxisque secundi et tertii paris inter se minus remotis. Character hic essentialis et naturalis mihi videtur. Differentiae aliae minoris momenti habeantur. Vertex evidenter lunatus a quo nomen *Selenopsis*, margine anteriore tenui carinaeformi neutiquam supra reflexo. Oculi angulos posteriores capitis attingentes. Antennae, articulis duobus primis subaequalibus, conformibus, cylindricis. Alae superiores opacae coriaceae.

Da riferirsi à questo genere sembrami una seconda specie del Natal raccolta pure dal viaggiatore Delegorgue.

Selenopsis sub-aptera, m. — Minor, long. totius corporis, 4 millim. — Lat. propè alarum originem, 1, 50 millim.

♀ Dilutè grisescens, subtûs pallidior. Alae superiores virescentes. Inferiores ♀, rudimentariae et volatui ineptae. Abdomen rubescens. Pedes pallidi, tibiarum posteriorum costis tribus pariter fimbriatim plurispinosis, spinis validioribus conico-acutis. — *Mas*, invisus.

TETTIGONITAE. XXXII. G. Strongylomma, m.

Jassoideae. N. 350. *Tab. synopt.*

Facies *Bythoscopi*, sed *Ocelli nulli*. — *Corpus* ferè triangulare, posticè attenuatum. *Caput* utrinque productum et prothoracem posticè ambiens, spatio inter-oculare evidenter plus latiore quam longiore, *osso magno* cranii supra vel extûs neutiquam bipartito et a paginâ superiore ad inferiorem sensim transeunte; facie anticâ transversim rectâ perpendiculariter arcuatâ, facie inferâ obliquè declive, minus horizontale, a genis sulculo suturali separatâ, lateribus rectis convergentibus, margine clypeali rectâ truncato. *Vertex* et *frons* ideò in *osso magno* confusi.

Genae, *appendices supra-maxillares*, *pedes* et etiam *alae superiores* partim propè apicem sese invicem involventes, ut in *Bythoscopis proprie dictis*, A. S.

Antennae mutilae.

Species unica. — Strongylomma caffra, m.

Strong. dorso nigro flavoque variegato, alis superioribus obscuris viridi-lineatis.

Long. totius corporis, 4 millim. — Ead. alarum superiorum, 4 millim. — Lat. maxima inter angulos posteriores capitis, 2, 25 millim. — Ead. propè originem alarum, 2 millim. — Ead. spatii inter-ocularis, 1, 50 millim.

Prothorax transversus, vix quadrangularis, anticè rotundatus, posticè rectâ truncatus, lateribus exterioribus brevissimis rectis sub-parallelis. Venter *foeminae* (*marem* non vidi) medio planus, laminis lateralibus parvulis deorsum obliquè deflexis: segmentum genitalia sistens reliquis unâ longius, valdè convexum, neutiquam posticè attenuatum, circuitû externo semi-ovatò. — Nigra laevis nitida, capite prothoracisque dorso flavo irroratis, genarum fasciâ latâ marginali appendicibus supra-maxillaribus scutellique maculis nonnullis linearibus flavis. Antennarum articuli 1.^{mi} et 2.^{di} nigrescentes; (reliqui desunt.) Alae basi obscurae, apice hyalinae; superiores, nervis longitudinalibus in regionibus discoidali et posteriore rectis parallelis flavo-virescentibus, reliquis fuscis. Pedes rufi, posteriorum tarsis tibiisque nigris.

Una femina della Caffreria, procedente anch' essa dalle raccolte Delegorgue.

È innegabile la somma affinità di questa *Jassoidea* coi *Bitoscopi* in genere. Anzi potrei asserire che l' unico carattere che la separi dalle specie spettanti al gruppo più ristretto *G. Bythoscopus*, A. S. consiste nell' assenza *degli ocelli*. Ma se gli ocelli sono inservienti alla visione, siccome nessuno ne dubita, l'assenza di questi organi è un *carattere naturale di primo grado*.

ERRATA DELLA PRIMA MEMORIA

Luogo	Pag.	Linea	Errore		Correzione
Titolo, pag.	43,	linea 3 -	FLEMIPTERA	*leggi*	HEMIPTERA
Introduzione, pag.	44,	lin. 34 -	gruppi materiali	»	gruppi naturali
ib.	» 45,	» 24 -	Intanto, dal canto mio, a riprendere	»	Intento, dal canto mio, a ripreodere
ib.	» —	» 33 -	*Flemipteres*	»	*Hemipteres*
ib.	» 47,	» 7-8 -	*Flemiptera*	»	*Hemiptera*
ib.	» 48,	» 34 -	*Omologo*	»	analogo
ib.	» 49,	» 15 -	I due estremi	»	I due esterni
ib.	» 51,	» 30 -	Fra gli *Ectinoglossati* . . .	»	Fra gli *Ectramoglossati*
ib.	» 53,	» 15-16 -	state prese, per righe insignificanti quando erano risaltanti e figurate in coste o in carene. . . .	»	state prese per strighe insignificanti quando scavate a solchi, e per coste o carene accidentali quando erano risaltanti in rilievo.
ib.	» 59,	» 19 -	*Authognati*	»	*Antliognati*
ib.	» 61,	» 18-19 -	*Catostomophora*, ...	»	*Hypostomophora*,
ib.	» 63,	» 22 -	*Catostomophori opocephaloceri*.	»	*Ipostomofori opocefaloceri*.
Tab. synopt., pag.	64,	n. 3 2 -	* ZOTICA, sui conscientiae	*leggi*	* ZOTICA, extes sui conscientiae
ib.	» —	n. 9 8 -	* ENDOMYARIA, *pedibus* novem vel amplius. . .	»	* ENDOMYARIA, *pedibus* decem vel amplius.
ib.	» 72,	lin. 24 -	*G. Drachystetus*, Lap. . .	»	*G. Brochystetus*, Lap.
ib.	» 74,	» 12 -	*Vussireae*, ...	»	*Vulsirea*,
ib.	» —	» 20 -	G. Tausocerus, ...	»	G. Taurocerus,
ib.	» 75,	» 6 7 -	*ocellis alis inferioribus* manifestè conspicuis	»	*ocellis* distinctis. *Alis inferioribus* perfectis.
ib.	» —	» 23 -	73. G. Dyrodores, m. . .	»	73. G. Dyroderes, m.
ib.	» —	» 40 -	77. G. Cysarcoris, H.ⁿ . .	»	77. G. Eysarcoris, H.ⁿ
ib.	» 76,	» 19 -	85. G. Agmoscelis, m. . .	»	85. G. Agonoscelis, m.
ib.	» —	» 33 -	91. G. Hyperas, A. S. . .	»	91. G. Hyverus, A. S.
ib.	» 80,	» 42 -	*G. Hymeniphere, Camptischuim*, ...	»	*G. Hymeniphera, Comptischium*,
ib.	» 81,	» 44 -	149. G. Plaiscelis, m. . .	»	149. G. Plaxyscelis, m.
ib.	» 82,	» 48 -	164. G. Gerzis, Fab. . . .	»	164. G. Gersis, Latr.
ib.	» 86,	» 44 -	209. G. Conorchinus, Lap.	»	209. G. Conorhinus, Lap.
ib.	» 89,	» 26 -	235. G. Mononyxa, Lap. .	»	235. G. Mononyx, Lap.
ib.	» 90,	» 7 -	*G. Octocellae*, A. S.	»	*G. Octorellae*, A. S.

Tab. synopt., pag. 91,	lin. 34	- 253.bis G. COLYPTOPROCTUS, m.	*leggi*	253.bis G. CALYPTOPROCTUS, m.
ib. » 94,	» 29	- 291. G. SYCODERES, G.' . .	»	291. G. LYCODERES, G.'
ib. » 95,	» 21	- 301. G. ACONOPHOSA, L. F.	»	301. G. ACONOPHORA, L. F.
ib. » 96,	» 30	- 314. G. PLINTHAERUS, m. .	»	314. G. PLINTHACRUS, m.

(La voce latina *Appendix* è or mascolina or feminina presso i classici antichi. Ho usato di preferenza il primo genere, ma alle pagine 55, 60, 63 e 64 ho impiegato il secondo. Mi rincresce non essere stato costante nella prima pratica, ma non ho potuto accennarvi nell' Errata perchè non vi è in realtà errore grammaticale.)

SECONDA MEMORIA

Pag. 104, lin. 8 - PLATASPIS DISPAR, m. — leggi: — PLATASPIS BUCEPHALUS, *White, Trans. of the Entomol. Soc. of London, tomo* 4°, *pag.* 248 *e tab.* XVII, *fig.* 1ª. — Il volume quarto delle *Transazioni entomologiche di Londra*, sebbene spettante all' anno 1845, non mi è stato rimesso che nell' anno corrente, in seguito a un male inteso nel pagamento della mia annua cottizzazione e non mi è giunto se non dopo eseguita la stampa del foglio 14 di questi Atti.

SULL' EZIOLOGIA DELLA GLUCOSURIA

CONSIDERAZIONI

DEL SOCIO ATTUALE

PROF. MAURIZIO BUFALINI

Ricevuta il 7 Marzo 1850.

1. Dappoichè mi occorse d'osservare tanti infermi di Diabete mellito quanti ordinariamente non si offrono alla pratica d' un solo medico, bene estimo di non dovere defraudare la scienza della fedele narrazione di quelle risultanze di fatto, che mi parvero acconce a portare alcun lume sopra una malattia ancora ben poco conosciuta. Nè perciò io vorrò certamente che le mie parole prendano modo ed estensione d' una monografia del diabete, ma solamente accennino a quelle particolarità di esso, che, osservate ne' miei malati, mi sembrano valevoli di moderare in qualche guisa le più ricevute sentenze dei Clinici. In tre parti dividerò io il mio discorso, la prima delle quali comprenderà alcune considerazioni sull' Eziologia, la seconda sulla Semeiotica e la Natura, la terza sulla Terapia del diabete mellito: e ciascuna di queste parti tratterò pure in tre piccole distinte Memorie, delle quali la prima è questa appunto che ora offro sotto il titolo di *Considerazioni sull' eziologia della Glucosuria.*

2. Avvenne del diabete quello stesso, che di molt' altre malattie dovemmo deplorare; cioè che, affidatane la denominazione soltanto ad un certo insieme di sintomi, si compresero poi sotto lo stesso nome tutti quegli stati morbosi diversi, che erano suscettivi d' originare gli anzidetti sintomi. In tale modo tutte le poliurie diverse, qualunque ne fosse l'origine, vennero

considerate come altrettante maniere di diabete; onde poi molto fu difficile di bene definire questa malattia, e parecchi infine la suddivisero molto diversamente in ispecie non poche. Finalmente, intraveduta da Pool e Dobson nel 1771 l' esistenza d' una materia zuccherina nelle orine dei diabetici, riconosciutavi da Cawley nel 1778 e da Pietro Frank nel 1791, assolutamente dimostratavi da Nicolas e Guendeville nel 1803, i Clinici intesero bene, quanto per la singolarità d' un tale fenomeno meritasse d'andare distinta da ogni altra la malattia che seco lo porta. Così il diabete detto mellito o zuccherino si cominciò a considerare come malattia molto particolare e diversa dalle semplici o sintomatiche poliurie; nè poco per verità egli è da maravigliare, che a' nostri giorni Bouillaud e Andral non abbiano fatto tutto il dovuto conto d' un così peculiare fenomeno diabetico, ed abbiano tuttavia riguardato il diabete come una malattia, della quale sia precipuo fenomeno uno scolo d' orina molto più copioso che nello stato normale (1). Io non potrò certamente abbandonare il principio, che unicamente reputo acconcio a fornire la base d' una sana ed utile nosologia, vale a dire quello che comanda di stabilire le differenze delle malattie sopra le reali diversità degli stati morbosi, dimostrate dalla complessiva considerazione delle attinenze reciproche delle cause, dei fenomeni e dei mezzi di cura delle nostre infermità. Ora, allorquando le orine rendonsi zuccherine, le cause, i fenomeni ed i modi di cura additano così peculiare lo stato morboso dell' organismo, che simile certamente per tutti gli indicati attributi non appartiene a verun' altra malattia. Però le poliurie, che i Clinici considerarono variamente sotto i nomi di diabete idiopatico e simpatico, isterico, artritico, febbrile, spastico, torbido, vinoso, artificiale ecc., non si possono certamente confondere col diabete mellito; col quale solamente hanno comune il flusso abbondante delle orine, e questo eziandio non sempre, giacchè l' orina può bene essere

(1) Vegg. Monneret et Fleury; *Compend. de Médecine Pratique ec. Tome 3.^{me}, pag.* 28.

zuccherina e l' infermo manifestare tutti gli altri contrassegni del diabete, ma tuttavia non abbondare la secrezione e l' escrezione dell' orina stessa, o almeno non abbondare in tutto il corso della malattia. Quindi entro io di buon grado nell'avviso di coloro, che il diabete mellito considerano come una malattia specifica, onninamente distinta da tutte le altre; della quale essenziale e patognomonico segno si costituisce finora nella presenza della materia zuccherina nelle orine. Si potrà essa denominare, se vuolsi, diabete mellito, o zuccherino; ma pure, ad evitare la confusione che necessariamente prorompe dalle voci usate a significare subbietti diversi, io amerei che la malattia, la quale si palesa pel flusso d'orina zuccherina, si chiamasse con nome suo proprio, quale essere potrebbe quello di *Glucosuria*, che varrebbe appunto flusso d' orina contenente quella particolare materia zuccherina, che appartiene a tale malattia e che si è detta glucosa o glucosio.

3. Undici sono i malati di glucosuria raccolti in queste sale della Clinica medica; e volendo ora portare tutta la dovuta considerazione sulle particolarità eziologiche più importanti, che essi mi hanno offerte, veggomi pure necessitato di premettere un' avvertenza, che stimo fondamentale. Già da molto tempo prevalse nella medicina la consuetudine di riguardare come cagioni morbifere tutti quegli avvenimenti della salute, nei quali s' incontrarono gl' individui prima di cadere in alcuna particolare infermità, senza però mettersi ancora gran fatto la sollecitudine di ricercare, se poterono tutti avervi, o vi ebbero realmente alcuna influenza. Dall' omissione di questa indagine sono provenute due grandissime imperfezioni nella eziologia delle umane infermità; vale a dire un eccessivo numero di cagioni si è assegnato a ciascuna di quelle, e cagioni del tutto contrarie sonosi credute atte alla generazione d' una stessa malattia. Ora io porto opinione, che, a riconoscere le influenze morbifere delle circostanze tutte della vita d' un individuo, occorra di attendere accuratamente ad uno di questi tre contrassegni; cioè 1° che, posta una data influenza, siasi

osservato succedere ad essa o sempre, o almeno il più delle volte, una stessa malattia; 2° che, posta pure una determinata influenza, la malattia siasi veduta succedere con modi così particolari, da non poterli noi evidentemente riconoscere da altra influenza; e questi due sono contrassegni empirici; 3° finalmente, che l' influenza precorsa sia di tale nota efficacia, che secondo le conosciute leggi fisiologiche si comprenda valevole d'originare la succeduta malattia; e questo è contrassegno razionale desunto dalla fisiologia. Giovi chiarire con qualche esempio questi troppo necessarj fondamenti dell' induzione eziologica delle malattie umane. Di quanti individui s' espongono all' influenza del miasma paludoso o del freddo umido dell' atmosfera, un sì gran numero ammala nel primo caso di febbri periodiche, e nel secondo di reuma o di flogosi, che niuno certamente saprebbe mettere in dubbio l' una e l' altra maniera d'influenza morbifera delle indicate cagioni, ancorchè gli manchi modo di comprendere, come essa veramente operi a generare gli accennati effetti morbosi: ecco un argomento empirico desunto dalla costante, o almeno assai frequente successione dell' effetto morboso all' azione della cagione morbifera. La violenza e subitaneità dei fenomeni, che insorgono dopo l' ingestione di qualche notabile quantità di sostanza venefica; i vomiti, che immediati sopravvengono all' ingestione degli emettici; le dispnee e le emorragie, che subito assalgono coloro, i quali, salendo nelle alte regioni dell' atmosfera, si sottopongono a grande diminuzione della pressione di essa; sono tali condizioni morbose, che per la qualità, la subitaneità e la violenza dei fenomeni loro dimostrano bene evidentemente di provenire dalle influenze insolite, che allora hanno avuto effetto sull' organismo umano; ed ecco un altro argomento empirico desunto dalla peculiarità dei modi, coi quali si palesano gli effetti delle cagioni morbifere. Finalmente sonosi osservati gl' individui, che vivono in aria umida non abbastanza rinnovata, cadere talora nell' idroemia, talora nello scorbuto, talora nelle febbri tifoidee; ma questi avvenimenti non sono certa-

mente molti in confronto di quelli assai più numerosi, che addimostrano illesa la salute d' individui viventi a press' a poco sotto consimili o identiche influenze. E in tali casi gli stati morbosi si generano pure sì lentamente, e diremo eziandio sì occultamente, che niuna particolare maniera di fenomeni insorge certamente, abbastanza cospicua, a palesare la connessione delle sopravvenute malattie colle precorse influenze morbifere. Nè il primo dunque, nè il secondo argomento empirico vale allora a disvelare le vere cagioni che operarono alla generazione del morbo: e perciò qui appunto soccorre la fisiologia, e dimostrando la nota efficacia di quelle sull' umano organismo mette pure in chiaro, se essa risponde o no colla natura dell' insorta malattia. Così, sapendo noi dalla patologia essere l' idroemia, la diatesi scorbutica e quella delle febbri tifoidee disordini speciali dello stato assimilativo, la fisiologia c' insegna inoltre che un' aria carica di sola umidità, o di questa e di vapori animali, e quindi male atta agli ufficj dell' ematosi, ed acconcia eziandio alla generazione di processi regredienti delle metamorfosi organiche, ha per lo appunto un' influenza valevole di generare le suddette diatesi morbose: ed in questo modo i deboli argomenti empirici avvalorati da queste analogie desunte dalla fisiologia ci apprestano ragione sufficiente a credere alla realità della supposta influenza morbifera delle sopraddette cagioni. Tuttavolta m' accade ancora di dovere qui risolvere una difficoltà, che facilmente corre per questo riguardo all' animo di chicchessia. Un corpo digradato dalla perfezione della salute trovasi senza dubbio meno fermo nelle sue condizioni organico-vitali, e più atto perciò a cedere all' impulso delle potenze sconcertatrici: quindi si potrebbe di leggieri presumere, che ogni qualità di cagione morbifera, operando lentamente sull' organismo umano, lo disponesse pure ad infermare più facilmente di qualsivoglia malattia. Una siffatta supposizione però dà manifestamente nel falso e nell' eccessivo; imperocchè certuni effetti delle ragioni morbifere allontanano anzi di più l' organismo stesso da certi altri; come sarebbe

l' idroemia rispetto alla diatesi flogistica; questa rispetto alla dissolutiva; la gotta riguardo alla tubercolosi; la pletora riguardo all' oligoemia, e via via discorrendo. Queste considerazioni dimostrano apertamente, che fra le cagioni morbifere ed i conseguenti stati morbosi corre senza dubbio un' attinenza, che può esistere con certune, e non con certe altre; e che quindi grandemente erroneo si è il riguardare come causa d'una malattia, qualunque insolita influenza abbia innanzi operato sull' individuo. Tutto questo ammesso, come indispensabile fondamento a bene estimare il valore delle cagioni morbifere, noi imprendiamo ora ad esaminare brevemente quello che ci sia lecito di pensare di ciascuna delle cagioni già dichiarate acconce alla generazione del diabete mellito.

4. Si è detto in primo luogo, che la glucosuria tiene alle disposizioni ereditarie; e gli uomini ne sono presi più delle donne; e la media età, quella specialmente compresa fra i 25 e i 35 anni, vi predispone sopra tutte le altre, ed i fanciulli vi soggiaciono anche meno dei vecchi. La ragione di queste sentenze ordinariamente non viene esposta; ma bene si può supporre che tutte esse derivino dalle più frequenti dimostrazioni dell' esperienza. Ciò non pertanto che cosa in questo proposito ricavare si possa dalle mie osservazioni, non fia inutile di brevemente disaminare.

5. Degli undici diabetici da me osservati niuno discendeva da genitori diabetici; e perciò niuno somministrava ragione di riconoscere ereditaria la sua malattia. Il fatto singolare, notato da Isenflamm, di sette fanciulli presi dal diabete in una stessa famiglia, ed altri consimili osservati da altri vengono messi innanzi come validi argomenti dell' influenza delle provenienze di famiglia nella generazione del diabete; e quanto alla vera natura ereditaria della malattia notabilissimo a me sembra certamente il fatto narrato da Barsley sulla fede di Prout, di quattro cioè, che fra venti diabetici discendevano da genitori diabetici. Questa proporzione sarebbe considerabile a segno, da potere muovere giustamente il dubbio, che l' avvenimento

non fosse del tutto fortuito, e la malattia dei genitori avesse realmente influito alla generazione di quella dei figli. Pure tutti questi fatti non proverebbero la trasmissione dello stato morboso dai genitori nei figli, quando da quelli in questi potrebbe essere trapassata la sola fisica costituzione, che rende il corpo proclive alla stessa malattia, come appunto oggi giorno si crede che bene dai genitori ai figli si trasmetta la complessione organica disposta alla scrofola, ma non la scrofola stessa. Però, quantunque si voglia credere la nascita apportare un'influenza sullo sviluppo del diabete, rimane tuttavia a cercarsi, se debba dirsi semplicemente congenita, o veramente ereditaria la predisposizione, che gl' individui portano seco, nascendo. Gli esempi meno rari sono quelli senza dubbio di necessaria predisposizione congenita; rarissimi all'incontro quelli di possibile ereditaria influenza. Ne' miei malati per altro non si riconobbe nemmeno alcun contrassegno di qualche peculiare predisposizione congenita; e poichè per una malattia rara ad accadere non è forse ristretta osservazione quella d' undici infermi, dovrei credere piuttosto difficile, che facile ad occorrere una tale congenita predisposizione. E questa sarebbe la deduzione più severa, che noi trarre potremmo dai contrassegni empirici relativi a questa maniera di cagione predisponente della glucosuria. Aggiungendo però le considerazioni, che ricavare possiamo dalla fisiologia, ci è agevole d' arguire, anzi grandemente probabile la facilità d' una congenita predisposizione alla malattia predetta. I morbi, che più soggiaciono all' influenza delle predisposizioni congenite, sono quelli appunto, che più si collegano col modo d'essere della primitiva composizione organica e dello sviluppo successivo di essa; che vuol dire tengono maggiormente all' influenza del processo delle assimilazioni organiche. Ora che la glucosuria sia da collocarsi fra le malattie di questa natura, non pare certamente impugnabile per due ragioni principalmente: per non avere cioè trovata ancora una sensibile alterazione d' organismo, nella quale costituire si possa il vero stato morboso di essa, e per essere quella essenzialmente

congiunta con un particolarissimo disordine dei prodotti delle assimilazioni organiche. Come tale la glucosuria, può dunque facilmente tenere alle predisposizioni congenite; non si potrebbe egualmente riconoscere collegata colle influenze ereditarie. Però, se le cliniche osservazioni dimostrano molto più frequenti gli esempj delle predisposizioni congenite, che non quelli delle ereditarie, la ragione fisiologica s' accorda appunto con questo empirico contrassegno, disvelando bensì la facile maniera del generarsi le predisposizioni congenite, e non additandone veruna a comprendere le ereditarie. Pure sarebbe eziandio necessario di potere in qualche modo definire le qualità della fisica individuale originaria costituzione, alle quali maggiormente s' attiene la generazione della glucosuria; il che vedremo, se dall' esame dell' influenza del sesso, del temperamento, delle età e delle consuetudini della vita ci possa in alcuna maniera apparire.

6. Tutti i Clinici affermarono essere il diabete molto più frequente negli uomini, che nelle donne, fino al punto che Pietro Frank ne attesta di non avere mai osservato alcuna femmina diabetica. Io fra gli undici miei malati contai otto uomini e tre femmine: proporzione certamente molto acconcia a confermare la comune sentenza dei Clinici. Forse ella è questa una delle influenze meglio certificate dai contrassegni empirici: i quali all' incontro non ci apprestano eguale ragione a riconoscere l' influenza delle età.

7. Fra i miei malati quattro furono colpiti dalla glucosuria fra i 17 e i 22 anni, due fra i 25 e i 35, quattro fra i 37 e i 45, uno all' approssimarsi degli anni 50. L' età pubere, e quella più oltre degli anni 35 sarebbersi dunque fra i miei malati dimostrate le più influenti alla generazione della glucosuria, contrariamente all' affermazione di coloro, che dicono soggiacere ad essa soprattutto gl' individui dell' età dai 25 ai 35 anni. La prima di queste statistiche dimostrazioni s' avvicinerebbe pure all' osservazione di Venables, che dichiara di avere veduto frequente il diabete nei fanciulli. Se non che

per verità le concordi osservazioni sopra questo particolare scarseggiano tanto, che niuna conclusione bastevolmente fondata potrebbesene al certo ricavare; ove almeno non fosse questa sola, che cioè nelle età più estreme della vita la glucosuria occorre certamente più di rado.

8. Intorno al temperamento poi, considerato come causa predisponente della glucosuria, le sentenze dei Clinici sono pure così discrepanti, che Raimann ebbe ad affermare niente constare ancora di ciò che nella costituzione umana forma la predisposizione alla glucosuria. Pure le mie osservazioni mi condurrebbero in ben altra conclusione. Degli undici miei infermi di glucosuria sette avevano l' abito venoso-linfatico, tre il linfatico semplice, ed uno il linfatico-nervoso. In questo modo alcun che di linfatico era nel temperamento di tutti, e ciò molto concorderebbe colla testimonianza di Cawley, che dice la costituzione linfatica del corpo predisporre possentemente alla glucosuria. Nè per malattia piuttosto rara la costanza di una simile complessione organica in undici individui presi da quella è certamente un fatto di picciolo momento; il quale a me sembra molto acconcio a dimostrare, che non certo gli assolutamente linfatici, nè molto meno i solamente sanguigni o nervosi soggiaciono più facilmente alla glucosuria, ma bensì quei corpi che nella loro costituzione hanno qualche qualità media fra il linfatico ed il sanguigno, ovvero anche il nervoso; che vuol dire possedono eglino uno stato tale d' assimilazione organica, che è più progredita che in quelli di puro temperamento linfatico, e meno che nei veramente sanguigni e nervosi. Fu detto ancora che la glucosuria sorprende spesso gl' individui d' abito scrofoloso; ma per verità fra i miei infermi solo una giovane era stata afflitta da intumescenze scrofolose e da suppurazioni dei ganglj linfatici molto prima di cadere nella glucosuria; e così non potrei veramente per le mie osservazioni riconoscere le malattie scrofolose già manifeste, come causa predisponente della glucosuria. Ciò non pertanto io non potrei nemmeno non ravvisare la costituzione organica dei miei dia-

betici molto simile a quella degli scrofolosi. Qui non posso certamente sopra questo argomento entrare in molti particolari; ma pure siami solo permesso d' accennare brevemente quanto più può tornare in acconcio al mio assunto.

9. Nella Parte II. dei Prolegomeni alle Instituzioni di Patologia Analitica mi sono già studiato di comprovare, che la materia organica nella serie degli animali, nello sviluppo degli individui, nella coalizione delle parti organiche divise nel vivente, nella riproduzione d' alcune recise o perdute, nell' atto stesso dell' ordinaria nutrizione, e nelle pseudomorfosi sale per gradi allo stato della più completa composizione organica e del più pieno sviluppo delle sue forme e prerogative organico-vitali; che le granulazioni albuminose sono il primo generale elemento morfico; che dalle granulazioni suddette si passa alla formazione dei globetti bianchi del sangue, quindi dei rossi e della fibrina; che la generazione di nuovi viventi e di nuove parti organiche comincia sempre dall' albumina; che l' ossigeno è l' agente vero, il quale attua la successione delle formazioni organiche; che evidente documento di questa grande legge dell' evoluzione organica abbiamo nell' uovo incubato, ove da sola albumina col mezzo della sola influenza dell' ossigeno atmosferico si generano tutti i tessuti del nuovo vivente fino alla maggiore loro diversità e al maggiore loro grado di composizione organica, quali si osservano negli uccelli; che nella serie degli animali, e nel sesso d' una stessa specie di questi, e nelle diverse età d' uno stesso individuo si osserva mai sempre prevalere nell' organismo l' albumina, in proporzione che difetta il processo della respirazione; e viceversa prevalere la formazione dei globetti rossi sanguigni, la maggiore perfezione di essi e lo sviluppo maggiore della fibrina e del tessuto muscolare, in proporzione che si estende l' apparecchio respiratorio, e si allarga perciò la funzione di esso; che nella serie degli animali e negli stessi individui d' una stessa specie la fecondità si proporziona non poco colla preponderanza dello stato albuminoso nell' organismo generatore; che infine le riproduzioni

organiche pure sono tanto più facili e intere nei diversi animali, quanto più in generale si mantiene in essi la prevalenza dello stato albuminoso; cosicchè nei più perfetti, come nei mammiferi e negli uccelli, le riproduzioni organiche sono grandemente limitate, e la materia organica per servire ad esse e alla nutrizione medesima dell' individuo ha bisogno di passare per una serie maggiore di metamorfosi organiche progressive, e richiede una serie maggiore di organi inservienti alle funzioni assimilative. Tutte queste credo sieno grandi verità fisiologiche, che oggigiorno la scienza ha conquistate soprattutto per le diligenze dei microscopisti e degli studiosi della chimica animale: ma esse appunto gettano molta luce sull' oscura natura della diatesi scrofolosa. Per questa, come veggiamo i corpi disposti a depositi amorfi generalmente albuminosi, quali sono tra gli altri i tubercoli, li scorgiamo pure assai fecondi di pseudomorfosi di molte maniere, e di quelle specialmente in cui meno prevale l' influenza diretta dei globetti rossi sanguigni. L' infanzia, in cui scarseggia ancora l' influenza del processo della respirazione e prevale perciò lo stato albuminoso, e facile si osserva la generazione degli entozoi ed epizoi, è sopra tutte le altre età percossa dalla scrofola. Le femmine, certamente più albuminose degli uomini, mettono pure nella generazione dei nuovi viventi un' opera assai maggiore che quella di questi, e sono anche più di essi soggette alla scrofola: nè raramente veggonsi ricchi di prole i genitori scrofolosi, e le donne nel corso della tubercolosi polmonare producono pure non infrequentemente figli più del solito sviluppati. Per quanto poi sieno varie le descrizioni, che i Clinici hanno fatte dei contrassegni esteriori dell' abito scrofoloso, tutti non di meno si accordano nel riconoscere nei maggiormente disposti alla scrofola una tale costituzione di corpo, che, colla pienezza delle membra, colle forme rotondeggianti, colla bianchezza e finezza della cute, coll'abbondanza e finezza dei lunghi non neri capelli, col roseo vermiglio delle guance e di tutta pur anche la cute, addimostra congiunta la non molta ampiezza del torace, la poca rile-

vatezza ed energia dei muscoli, il delicato sentire e la dolcezza simpatica della fisonomia e delle maniere: tutti caratteri fisici e funzionali, i quali attestano bene la scarsezza dell' influenza dei globetti rossi sanguigni e della fibrina, ma non certamente quella dei primitivi elementi organici; onde il tessuto cellulare sviluppato assai più che il muscolare, e la prevalenza ancora del nerveo sopra di questo, come appunto si scorge e nelle femmine e nei fanciulli. Nè quasi altro che un ammasso vero d' albumina pajono i corpi dei cretini, che sono afflitti dalla diatesi scrofolosa in guisa da parere lo stato loro non altro che l' estremo effetto di questa tristissima temperie dell' umana costituzione. Così estimo che l' empirismo clinico abbia abbastanza fatto conoscere che veramente i più scrofolosi sono eziandio di corpo maggiormente albuminoso (1). Che se poi parve potere ogni maniera di temperamento soggiacere alla scrofola; e perciò si disse esserne assaliti i linfatici, i sanguigni ed i biliosi pur anche; e così coloro che hanno bianca finissima la cute, ed altri a pelle bruna e forte; quelli a capelli biondi e sottili, e quelli a capelli grossi e neri; gli adusti, e i carnosi; i coloriti, e i pallidi; i bene costrutti, e i contraffati dal rachitismo; i sensitivi, e gli apati; gl' ingegnosi, e i cretini; ciò non pertanto in mezzo a sì grande diversità di esteriori apparenze non è difficile di addarsi, che giammai negli affetti da scrofola si rinvengono veramente i contrassegni del puro abito sanguigno, o nervoso, o linfatico, o bilioso del corpo: giammai in essi scarseggia tanto la formazione organica e la massa dei materiali organici del liquido circolante, come nei corpi ad abito assolutamente linfatico o nervoso; giammai abbonda l' influenza del processo respiratorio e la formazione dei globetti rossi sanguigni e del tessuto muscolare, come negli abiti di corpo veramente sanguigno, o sanguigno bilioso. E realmente nè le intumescenze epatiche, nè i flussi emorroidali, nè le

---

(1) Questa espressione non si prenda a troppo rigore di significato, ma si intenda diretta a dinotare tutte quelle maniere di composizione organica, alle quali si presta più immediatamente l' albumina.

policolie, nè la gotta, i calcoli e le renelle, cui soggiaciono i venosi, veggiamo noi appartenere ancora agli scrofolosi. E i climi caldi, ed i luoghi paludosi, attissimi allo sviluppo della molto prevalente venosità, originano pure le scrofole; ed il supposto antagonismo di queste e delle febbri periodiche non si ripone per avventura, che nell' abito venoso, onde s' informano i corpi, che nascono e vivono nei luoghi maggiormente soggetti alle febbri periodiche. Che se peraltro l' abito venoso dechina un poco da questo suo più intero sviluppo, s' intende di leggieri come lasci appunto preponderare nell' organismo le parti albuminose, che abbondevolmente prodotte per mezzo delle prime funzioni assimilative, non sono più allora abbastanza sottomesse all' influenza del processo respiratorio. Ed ecco quegli scrofolosi che sembrano carnosi e robusti, e che aver possono pelle scura e capelli neri, sebbene non mai tanto quanto gli individui di semplice abito venoso bene sviluppato. Per contrario, se niuno vide mai scrofolosi i corpi d' abito puramente linfatico o nervoso, bene agevolmente si comprende, come in questi medesimi, rendendosi talora alquanto più efficace la formazione organica nelle prime funzioni assimilative, e non corrispondendo con tale efficacia quella pure del processo respiratorio, risulti appunto una di quelle tante modificazioni dei temperamenti, per le quali essi prendono attributi medj fra quelli dei tipi loro più essenziali; e così l'abito linfatico ed il nervoso s' accostino un pochino di più al sanguigno, cioè non posseggano più tanta scarsezza di materiali organici nella massa sanguigna, ma nemmeno li abbiano abbastanza convertiti in globetti rossi ed in fibrina. Questa maggiore efficacia delle prime funzioni assimilative può appunto molte volte derivare dalla maggiore influenza dell' apparecchio epatico, e quindi l' abito del corpo può benissimo allora prendere qualche sembianza del bilioso. Onde non punto ripugna colle meglio certificate leggi fisiologiche l'ammettere, che realmente una certa prevalenza di stato albuminoso possa nell'umano organismo nascondersi sotto le più disparate apparenze di fisici e funzionali

attributi, più o meno prossimi a quelli dei diversi temperamenti primitivi del corpo umano. Intendesi in questo modo come siasi potuto scrivere, che la scrofola si sviluppa in individui d' ogni qualità di temperamento, sebbene io stimi niente essere più erroneo d' una tale sentenza. La vera diatesi scrofolosa non sarebbe per me che una semplice diatesi albuminosa, e la trasmissione ereditaria sarebbe bensì di questa diatesi, ma non veramente delle malattie scrofolose propriamente dette. E se assai spesso la diatesi scrofolosa scorgesi piuttosto congenita di quello che ereditaria, come quando i figli provengono da genitori infermicci, o logori dagli abusi della vita, o vecchi o troppo giovani; e se pure l'acquistano i fanciulli per difetto delle influenze necessarie alla pienezza del loro sviluppo organico, come per iscarso o cattivo allattamento, per vizio d' aria in mezzo a cui vivono, per mancanza d' esercizio conveniente e simili perniciose influenze; tutto questo pure risponde ottimamente col pensiero fin qui dichiarato intorno alla natura della diatesi scrofolosa. La quale poi tanto chiaramente si addimostra negli effetti del processo flogistico, che esso solo per avventura basta a somministrarne il più giusto concetto. Tutti i Clinici hanno mai sempre riguardato le flogosi scrofolose, siccome distinte da tutte le altre; e la diligenza loro si è grandemente occupata nel noverarne tutti i più particolari attributi di quelle. Ma alla cagione primitiva di qnesti non si è forse posta una sufficiente attenzione; ed io avviso, che ove bene si riguardi in essi, non si stenterà punto di riconoscerli mai sempre originati dalla soprabbondanza dell' albumina che si versa nelle superficie e nella trama organica delle parti infiammate, e che insignemente modifica il processo chimico-organico della flogosi. Tutti questi fatti e tutte queste considerazioni mi sembrano bastevoli a dimostrare, che realmente le scrofole sorprendono i corpi, in cui prevale lo stato albuminoso, e generano prodotti morbosi ricchi d' albumina; sebbene non sappia dissimulare essere per avventura un tale argomento meritevole di molto più ampia ed accurata disamina.

Ora però, rimettendomi meglio in via, dico che veramente in tutti i malati di glucosuria da me osservati era innegabile alcun che di diatesi albuminosa; e sotto di questo aspetto la loro originaria costituzione teneva senza dubbio non poco della scrofolosa, comunque le scrofole non si fossero sviluppate che in un solo di essi. Così la sentenza di coloro, che dissero molto soggetti alla glucosuria gli scrofolosi, avrei io per pienamente confermata dalle mie osservazioni; per le quali mi sembrerebbe appunto di dovere ammettere, che la morbosa generazione dello zucchero nell' umano organismo non ha effetto, quando bene sotto l' influenza dell' ossigeno si compiono tutte le metamorfosi progressive della materia animale, ma solo quando esse per iscarsa influenza di quello s' arrestano al punto, che gli elementi albuminosi prevalgono. Sembrerebbe però che eziandio, a somiglianza della diatesi scrofolosa, una tale predisposizione richiedesse non iscarsa nell' organismo la quantità dei materiali organici, e quindi non troppo manchevole l' efficacia delle prime funzioni assimilative, come in generale si osservano nei corpi d' abito veramente linfatico e nervoso. Sarebbe pure la glucosuria uno di quegli effetti, che scaturiscono dalla materia animale in progresso di trasformazione organica, allorquando la sua quantità supera quella che può essere sottomessa dal processo dell'ossigenazione, e quindi consumata nelle ordinarie riparazioni organiche. Tale si è un' importantissima conchiusione, che credo discenda con bastevole probabilità dalle osservazioni degli undici diabetici raccolti nelle sale cliniche di Firenze. E però dovrebbesi egli mai presumere, che quei così detti temperamenti muscolosi, indicati da Nicolas e Guendeville, come i più predisposti alla glucosuria, non fossero veramente che abiti venoso-linfatici, nei quali colla naturale pienezza delle membra si trovassero pure discretamente voluminosi i muscoli, come non raramente interviene?

Se non che con queste ragionevoli congetture sulla qualità dell' umana costituzione maggiormente proclive alla glucosuria male s' accordano le predisposizioni originate dall' età e dal

sesso, le quali non rispondono colle condizioni dell' organismo, in cui più prevale lo stato albuminoso; subito che i fanciulli e le femmine vi soggiaciono meno degli adulti e degli uomini. Questa è certamente tale difficoltà, della quale non saprei dissimulare l'importanza. Pure, se savj medici non furono lontani dal credere la diatesi scrofolosa grandemente influente alla generazione dell' encefaloide e dello scirro, ancorchè questi malori non sogliano comparire, quando la scrofola infesta di più l' umano organismo; per eguale modo potrei io presumere nascesse dalla diatesi albuminosa la glucosuria, quando pur meno s' ingenerasse la scrofola. Dimostrerebbe ciò essere necessarie altre concause, affinchè la stessa diatesi albuminosa favorisca in un caso la genesi delle scrofole, in un altro quella dello scirro e dell' encefaloide, in un altro quella della glucosuria. In una parola, veduto che l' albumina è il materiale organico suscettivo ancora di metamorfosi successive, ed all' incontro il globetto rosso sanguigno e la fibrina, che, coagulati in mezzo ai labbri d' una ferita punto non si organizzano e ne impediscono la cicatrizzazione, sembrano inabili ad altre trasformazioni organiche; si può bene comprendere quanto sia facile, che la materia organica s'avvii dall' albumina per diverse serie di successive metamorfosi, e quanto perciò all' incamminarsi piuttosto per l' una, che per l' altra di queste, debbano conferire non poche circostanze diverse, e fra di queste la proporzione pur anche del materiale albuminoso cogli altri materiali organici del corpo vivente. Chè di vero se frequentissime veggiamo le scrofole, che pur diciamo accadere nei corpi a diatesi albuminosa, e rarissima invece si addimostra la glucosuria; ciò stesso comprova che può la diatesi predetta esistere mille volte più senza, che colla successione della glucosuria stessa; il che vuol dire non essere proprio la sola diatesi albuminosa che ne forma la vera predisposizione, ma bensì un peculiare stato dell' assimilazione organica, il quale bene si consocia colla diatesi suddetta, ma non similmente congiungere si può colle altre maniere dell' individuale complessione. Onde la diatesi albuminosa

dire possiamo veramente una concausa della predisposizione alla glucosuria, piuttosto che essa stessa tutta intera una tale predisposizione. Le quali cose io espongo non veramente per affermare, che il fatto intervenga assolutamente in questo modo, ma solo per dimostrare, che se da una parte l' osservazione clinica rispetto agl' individui più predisposti alla glucosuria, è fortemente avvalorata dalle nozioni fisiologiche, non è poi da queste medesime per un' altra parte contraddetta. Di tal che mi sembra, che giustamente alla non troppa larghezza del fondamento empirico soccorra senza dubbio assai bene il criterio razionale desunto dalla fisiologia; e così si possa debitamente concludere essere molto verosimile l' influenza del prevalente stato albuminoso dell' organismo nella generazione della predisposizione alla glucosuria; o almeno parere abbastanza comprovato, che veramente a questa predisposizione è onninamente contrario quello stato dell' organismo umano, in cui è più compiuto il processo delle assimilazioni organiche, e più estesa l' influenza dell' ossigeno nelle metamorfosi della materia animale: la quale stimo essere cognizione di non picciol momento per riguardo ad una malattia ancora tanto oscura.

Ma eziandio le predisposizioni acquisite non s' allontanano per avventura da questa medesima dimostrazione. Il diabete si disse assalire non di rado individui già stati antecedentemente percossi, ed anche deteriorati da malattie diverse, come sarebbero ascessi freddi, enormi suppurazioni, grandi emorragie, tisi polmonare, altre malattie croniche degli organi del respiro, simili malattie degli organi della digestione, affezioni epatiche, vermi intestinali, calcoli renali e vescicali, gotta, reuma, artritide, amenorrea, asma, isterismo, ipocondria, neuralgia, protratte febbri periodiche, alterazioni della bile, affezioni dei reni, esantemi, scabbie e leucorrea soppressi, iscuria, vizj degli umori, e non saprei quali altri malori ancora. Che però ognuna di queste qualità di malattia abbia realmente esercitata un' influenza diretta nella generazione del diabete, difficilmente persuadere se ne potrà chiunque pensi alla moltissima differenza

della loro natura. E là di fatto, come predisponenti al diabete, troviamo noverate così malattie intense all' universale dell' organismo, come alcune riposte in sole condizioni morbose locali, e fra le prime alcune potentemente offensive dello stato assimilativo, ed altre meramente convulsive; alcune croniche e consuntive, altre violente, come le grandi emorragie; alcune costituite in un principio molto specifico, come gli esantemi, la scabbia, la gotta ed il reuma, ed altre così indeterminate da essere pure denunciate sotto la generica denominazione di vizj d' umori e di malattie degli organi del respiro, o della digestione, o del fegato. Realmente quale mai analogia d' effetti saprebbesi, per esempio, immaginare fra le vaste suppurazioni e l' isterismo, fra la tisi polmonare e la gotta, fra le febbri periodiche ed i calcoli vescicali, fra le grandi emorragie ed i vermi intestinali, fra la scabbia e l' asma? Io credo bene che forse il più delle volte dopo tutte le noverate infermità sieno sopraggiunte le poliurie, anzichè la vera glucosuria; ma dico tuttavia che, quando consideriamo le malattie stesse avere le mille e mille volte imperversato nel corpo umano senza essere state seguìte da veruna maniera di diabete, possiamo bene a ragione rimanere dubitativi che pure, allorchè esso intervenne, non abbiano esse stesse operato ad originarlo. Certo egli è che in questo caso il fondamento empirico appare sì debole, che veramente per esso solo non potremmo mai avere alcun plausibile argomento della supposta influenza delle predette malattie nella generazione del diabete. Però, a non disprezzare del tutto le sopraindicate cliniche testimonianze, ci è pure forza d' esaminarle col soccorso del criterio razionale desunto dalla fisiologia. Ora che cosa veramente di comune influenza scorgere possiamo noi in malattie cotanto diverse? Non una di esse veggiamo appartenere alla semplice diatesi flogistica, non una alle flogosi acute: o non furono esse mai col processo flogistico, o se furono con esso, questo, già reso cronico, ebbe seco la consunzione, o le vaste suppurazioni, o le alterazioni umorali. E se a morbi locali si vide succedere il diabete,

questi ebbero sede principalmente negli organi inservienti alle organiche assimilazioni, polmoni cioè, fegato, visceri della digestione e reni. Tutto ciò porta a credere, che veramente in tutti questi casi, leso più o meno gravemente il processo assimilativo, possono appunto gl' individui essere stati precipitati in quel difetto delle ultime formazioni organiche, e in quella prevalenza dello stato albuminoso, col quale dicemmo potersi consociare pur anche la predisposizione alla glucosuria. Fin quì dunque possiamo in qualche modo riconoscere l' influenza, che tanto diverse ed opposte malattie potrebbero avere nondimeno esercitata per favorire la generazione d' uno stesso malore. Più difficilmente intenderemmo, come l' effetto medesimo avesse potuto scaturire dalle malattie costituite o nella presenza d'un principio specifico nell' organismo, o in una pura neurosi, o in agenti locali generanti un semplice stato convulsivo. Confesso il vero, che in tali casi, nei quali la lesione funzionale colpiva principalmente il processo dinamico della vita, io non saprei ravvisare possibile che la sopravvenienza della poliuria; o almeno, se pure dovessi reputarne seguìta la glucosuria, stimerei altresì di dovere da ciò solo riconoscere per quei morbi esercitata eziandio una grande influenza sul processo assimilativo, senza di che non vedrei possibile giammai la generazione di un sì peculiare vizio di questo, quale è quello dell' insolita produzione dello zucchero. E così parmi di dovere necessariamente pensare, che osservazioni di tale natura non furono veramente fatte con tutta la necessaria accuratezza, ed isfuggirono per avventura inavvertite certe particolarità molto importanti; e quelle così imperfette ed inconcludenti trasmise fino a noi la storia della scienza. Per la quale cosa mi sembra che, se pure alcuna conclusione si può ricavare dalle narrate testimonianze cliniche, questa sola è per l' appunto, che esse comprovarono vie più la non attitudine dei corpi maggiormente costituiti sotto l' influenza dell' ossigeno a soggiacere alla glucosuria; e ci aprirono l' adito a credere che, se pure le malattie più sopra accennate influirono mai alla generazione della glu-

cosuria, lo fecero solo col diminuire l' influenza predetta, e coll' apparecchiare l' organismo alla prevalenza di quello stato albuminoso, col quale vedemmo potersi consociare la predisposizione alla glucosuria. La quale avvertenza prende eziandio maggiore valore, se consideriamo, che Rayer per pneumonitide sopravvenuta a un diabetico osservava diminuirsi grandemente nelle orine la quantità dello zucchero, come se ne accertava il Biot col mezzo delle convenienti indagini chimiche. Onde sembrerebbe quasi di poter credere, che la diatesi flogistica e lo stato delle funzioni assimilative sotto la glucosuria fosse un vero antagonismo; di tal che si potesse giustamente affermare, che, fino a tanto che le metamorfosi organiche progrediscono col mezzo dell' ossigeno all' ultimo loro compimento, non si può nell'organismo animale stabilire quella particolare serie d' azioni chimico-organiche, che terminano colla morbosa generazione dello zucchero; ma invece queste trovano benissimo modo di effettuarsi ogni volta che, diminuendo l'influenza dell'ossigeno, s' arresta in qualche modo il processo delle organiche metamorfosi progressive, e così ridondano nell' organismo i principj ancora suscettivi di nuove trasformazioni. Corrisponderebbe pure con questa presunzione la recente osservazione dello zucchero trovato nel sudore di malati di coléra (1).

Ma sopra questo particolare richiama pur molto la nostra attenzione una osservazione di Bennevitz, il quale vide la glucosuria sopravvenire alla gravidanza, e cessare dopo il parto. Le orine contenevano per ogni libbra due once di zucchero diabetico, ed il sangue estratto aveva crassamento abbondante, e dolcigno ne era lo siero. La donna aveva i polsi duri, pieni e frequenti, e seguitava ad essere mestruata. Simili fenomeni aveva essa provati in un' antecedente gravidanza, che era la quarta; e simili provò pure nella sesta. Non visitata però dal medico, che nella quinta gravidanza, mancarono pure nelle altre le diligenze necessarie a bene raccogliere i segni certi della

(1) Archives Médic. 4.me Série. Tom. XXI, pag. 369.

glucosuria; se non che la somiglianza degli avvertiti fenomeni può fornire moltissima presunzione, che eziandio nella quarta e sesta gravidanza apparisse la glucosuria. In tale caso la continuazione della mestruazione ed il polso pieno, forte e frequente potevano essere indizio di qualche considerabile pletora; e noi avremmo così la glucosuria congiunta con tale stato dell' organismo, che non sembrerebbe molto simile a quello, con cui per le precedenti considerazioni abbiamo creduto consociarsi d' ordinario una tale malattia. Se non che la gestazione suole pure essere cagione d' una certa prevalenza dello stato albuminoso, e molti fatti ne fanno aperta testimonianza, fra gli altri l' albuminuria, cui non molto difficilmente soggiaciono le gravide, e i depositi albuminosi che tanto facili ed abbondanti nascono nelle malattie puerperali. Ma, mentre è quasi sempre irreparabile la glucosuria, nel caso della femmina di Bennevitz sarebbe essa ricorsa tre volte con grande facilità a cessare, e mentre suole generare la consunzione, non è avvertito che allora arrecasse verun detrimento alla nutrizione della femmina. Si direbbe quasi essere stata per essa la glucosuria un fenomeno della salute modificata dalla gestazione, anzichè l' effetto d' un vero processo di malattia. Il fatto mi sembra assai meritevole di considerazione, come tale appunto che darebbe a divedere non essere nemmeno la presenza dello zucchero nelle orine un sicuro contrassegno della morbosa generazione dello zucchero entro l' umano organismo. Egli è noto che dai Chimici oggi giorno venne bastevolmente provato, che nell'ordinario processo della chimificazione e della chilificazione comincia nello stomaco e seguita pur anche negl' intestini la conversione della fecola in desterina, in zucchero d' uva, e finalmente in acido lattico. Il Budge poi e Scharlan aggiungevano ultimamente, che lo zucchero generatosi per l' anzidetta conversione della fecola viene quindi dal fegato trasformato di nuovo, e così esso trovasi bensì nel sangue della vena porta, ma non in quello della vena epatica e degli altri vasi sanguigni; nè perciò si osserva nemmeno uscire colle orine. Di quì

adunque l' importanza di considerare l' influenza, che la qualità dell' alimento può avere nella generazione dei fenomeni diabetici. Già fino da antico tempo esimj Chimici, come Areteo, Aezio, Paolo d' Egina, Mead, Sydenham, Riverio, Morton, raccomandarono ai diabetici l' uso delle carni. Rollo le propose come rimedio ad impedire direttamente la formazione dello zucchero entro lo stomaco. Nicolas, Guendeville, Dupuytren e Thénard ne sanzionarono l' utilità: Dupuytren giunse anzi ad affermare che la dieta animale è di virtù così specifica contro il diabete, come la china contro le febbri periodiche. Ultimamente Bouchardat ed il Polli, credendo che la formazione dello zucchero diabetico derivi da una trasformazione della fecola e dello zucchero degli alimenti introdotti nello stomaco, pensarono pure che la dieta animale sospendesse immediatamente la generazione dello zucchero diabetico, e addussero fatti in prova di questa loro sentenza. Bouchardat accertava proporzionarsi mai sempre la quantità dello zucchero delle orine colla quantità delle materie feculente e zuccherine ingerite, e crescere nelle orine evacuate a non molta distanza dal pasto, diminuire in quelle emesse a maggiore distanza del pasto stesso, fino a che dopo 15 o 16 ore scompariva anche del tutto; nè possono valere allo stesso effetto i cibi vegetabili non contenenti fecula o zucchero, come crescione, spinaci, acetosa ec., i quali si possono innocuamente mangiare dai diabetici. Il Polli attestava dinanzi al Congresso delli Scienziati in Pisa di essere riuscito a far nascere in sè stesso ed in un suo amico un temporaneo diabete col molto uso di cibo feculento, cioè ad avere ottenuta un' insolita formazione di zucchero nello stomaco, quindi un aumento del flusso delle orine, e la presenza dello zucchero in esse, tutto poi cessando immediatamente col non prendere altro vitto di fecule: al che però sono contrarie le osservazioni e le conclusioni di Corneliani e di Ambrosioni (1). Non tacerò nemmeno essersi pure narrate guarigioni permanenti

---

(1) Corneliani, sul Diabete. Pavia 1840; pag. 109 e segg.

di glucosuria, ottenute coll' uso del vitto animale; fra le quali mi sembrano certamente considerabili le tre, di cui furono testimoni e relatori Bouvey (1), Bonnefous (2), e Van-Nes (3). Ora le osservazioni fatte sopra i diabetici di queste Sale Cliniche sono per tale riguardo d' una innegabile importanza; e già l' egregio Sig. Dottore Capezzuoli, a cui appartengono molte delle indagini chimiche intraprese sui prodotti e sul sangue di quei malati, ne rese conto al pubblico con varie sue Memorie, che a quest' ora sono molto conosciute. Però io, dispensandomi dalla superfluità di un nuovo ragguaglio di tutte le investigazioni chimiche intraprese così dallo stesso Sig. Dott. Capezzuoli, come da alcun altro, che innanzi mi era pure stato cortese dell' opera sua, dirò ora solamente le ultime risultanze ottenutene, e quelle precisamente che più concludono pel mio assunto, e che stringonsi in questa somma:

1°. L' assoluta dieta animale apportò sempre pronta diminuzione della sete, e poscia ancora dell' appetito, e della quantità delle orine emesse in 24 ore.

2°. Quest' ultima diminuzione non avvenne con eguale proporzione nei diversi ammalati; grande talvolta, poco valutabile tal altra, non di rado eziandio non costante: il minimo a cui si ridusse fu di libbre due ed once sette d'orina in 24 ore.

3°. Riaumentò la quantità giornaliera dell' orina, tosto che gl' infermi vennero rimessi all' uso promiscuo delle carni e dei farinacei; sicchè l' effetto della dieta animale non si mostrò durevole nemmeno nell' inferma che aveva sostenuta una tale dieta quattro mesi ed otto giorni. In essa, appena tornata al vitto ordinario, subito il giorno appresso aumentarono la sete e la quantità dell' orina, sebbene questa non tanto mai, quanto era dapprima.

---

(1) Gazzette Méd. 2.me Série, T. X, pag. 193.

(2) Op. c. Sér. c. T. II, pag. 156.

(3) Omodei Annali di Med., Vol. 113, pag. 652.

4°. La dieta animale si compose o di sole carni, o di esse con un' oncia o due once di pane, e talvolta invece del pane consueto fu dato quello di glutine.

5°. Le risultanze non variarono gran fatto sotto l' uso di queste differenti maniere di dieta, che sempre considerammo e dicemmo animale.

6°. La quantità dello sciroppo d' uva in una libbra d' orina tolta dall' insieme di quella emessa in 24 ore si trovò talora diminuita, talora non variata, e talora anche di poco aumentata da quello che era innanzi. Dal malato attualmente degente in Clinica raccolsi pure questo fatto ragguardevolissimo, che, giungendo a 57 libbre la quantità dell' orina emessa in 24 ore, mentre di 16 in 18 libbre era la quantità delle bevande prese nello stesso intervallo di tempo, appena sottoposto alla dieta assolutamente animale, subito il dì appresso le orine delle 24 ore non ascendevano che a 23 libbre, e la bevanda a 13, ed in sei giorni quelle si ridussero a libbre 7 e denari 2, e la bevanda a libbre 8. Queste orine sottoposte a nuova analisi fornivano per riguardo ad una libbra tolta dall' insieme la stessa quantità di zucchero diabetico, che vi si era pure trovata innanzi.

7°. Vedemmo in questo modo che il vitto animale non cambiava gran fatto la proporzione della quantità dello zucchero col liquido orinoso; ma, rendendo minore la quantità di questo emessa in 24 ore, rendeva pure necessariamente minore la quantità dello zucchero, che nello stesso intervallo di tempo esciva dal corpo col mezzo delle orine. Ed in questo proposito non saprei tacere questa notabilissima osservazione. Il 16 Gennajo, analizzate le orine della stessa malata, che poi messa a dieta animale potè tollerarla per più di quattro mesi, si conobbe contenere lo zucchero nella proporzione di denari 22 $\frac{3}{10}$ per ogni libbra, e poichè le orine evacuate in 24 ore erano di libbre 20, fu calcolato che ad once 18 e denari 14 circa ammontasse la quantità dello zucchero emesso colle orine in 24 ore. Il 10 Febbrajo l' inferma fu sottoposta a vitto puramente carneo: l' orina in due giorni si ridusse dalle 20 alle 6

libbre, ed allora (cioè il dì 12), sottoposta ad analisi, si trovò contenere di sciroppo diabetico denari 16 e $\frac{5}{10}$ in una libbra, quindi averne portato fuori in 24 ore once 4 e denari 3; che vuol dire circa $\frac{3}{4}$ e mezzo di meno del dì 16 Gennajo: differenza notabilissima, che, intervenuta nel solo spazio di 48 ore, non si poteva non attribuire all'influenza della natura dell'alimento. E dico intervenuta nello spazio suddetto, perchè la quantità giornaliera dell' orina poco o niente avea variato da quella del dì 16 Gennajo, e tutti i fenomeni diabetici avevano perseverato in eguale maniera; onde lice presumere che anche nell' orina non analizzata prossimamente al giorno 10 di Febbrajo si fosse mantenuta la quantità di zucchero trovatavi già il dì 16 Gennajo.

8°. Crebbe pure nei nostri diabetici sotto l' uso del vitto animale la quantità proporzionale delle materie organiche ed inorganiche: ciò che sembra essere conforme all' ordinaria influenza del vitto animale nello stato della salute, come pure dimostrava di recente il Lehmann (1).

9°. La giovinetta stessa, che sostenne l' uso del vitto animale per più di quattro mesi, mostrò non solo perseverante la diminuzione della quantità delle orine, variata per lo più da 7 a 9 libbre circa, mentre prima saliva dalle 18 alle 20 e 24 libbre; ma diede altresì a divedere costante una certa diminuzione della quantità proporzionale dello zucchero diabetico contenuto in dette orine, perciocchè, variando prima dai denari 20 ai 22 circa in una libbra dell' insieme delle orine di 24 ore, si mantenne poscia nei limiti di denari 16 a 21 circa; e solamente in un giorno, essendo l' orina discesa a libbre 4 e nel seguente risalita alle 5 $\frac{1}{2}$, si trovò in quest' ultima lo sciroppo diabetico nella proporzione di denari 23. Quando poi, dopo quattro mesi e giorni otto di dieta animale con sole due once di pane al giorno, l' ammalata volle riprendere il vitto ordinario, la sete tornò tosto a molestarla, la bevanda giornaliera

(1) Arch. Méd., Mai 1845, pag. 87, T. VIII, 4.me Série.

fu dalle 6 alle 8 libbre, e le orine dalle 9 alle 12; e per due analisi fatte di esse a non molti giorni di distanza l' una dall' altra risultò, che la materia sciropposa di quelle emesse in 24 ore ascendeva alle 9 e 10 once, quando a sole once 4 denari 3 erasi ridotta sotto l' uso della dieta animale.

10°. Da questa medesima inferma il 29 Febbrajo, essendo l' atmosfera sommamente umida, e la bevanda non maggiore del solito, cioè di circa libbre 6, si ebbero 14 libbre d' orina, delle quali una libbra conteneva denari 21, 8 di sciroppo diabetico: il che ne accertava essersi allora colla quantità delle orine aumentata entro 24 ore quella pure dello zucchero diabetico. Simile avvenimento osservammo eziandio, mentre l'ammalata era sotto l' uso del vitto ordinario, contenente non poca parte di materie feculente. Nei giorni 15, 16, 17 Gennajo l' orina evacuata in 24 ore dall' inferma era delle 16, 18 e 20 libbre, la bevanda presa delle 9 e 10 libbre: nel dì 18 si fece grandemente umida l' atmosfera, e l' orina delle 24 ore salì tosto a libbre 36, senza che molto si accrescesse la bevanda ingerita. Questa pronta e notabile influenza dell'umidità atmosferica sulla secrezione orinosa dei diabetici notammo sempre grandemente cospicua in questa giovanetta; ma ci apparve pur sempre, benchè meno manifesta, ed anche meno costante, in tutti gli altri malati di glucosuria, salvo l' ultimo ora degente in Clinica.

11°. Questa stessa malata fornì pure l' opportunità d' osservare, che, mentre era essa a vitto ordinario, nell' orina emessa da mezzanotte alle sei della mattina si contenevano denari 22, 3 di sciroppo, ed in quella emessa dalle 10 della mattina alle 10 della sera soli denari 20, 4, che vuol dire la quantità proporzionale dello sciroppo stesso essere stata minore in vicinanza, di quello che in distanza dal pasto. Questa stessa osservazione, ripetuta qualche altra volta, ci diede a conoscere la quantità dello sciroppo diabetico nell' orina emessa a digiuno, ora eguale, ora minore, ed ora maggiore di quella rinvenuta nell' orina emessa in poca distanza dal pasto.

12°. Procacciato due volte il vomito a due de' miei malati di glucosuria, dopo di avere ad essi somministrata una certa quantità di fecula di patate, si sono trovati in questa gl' indizj di modica quantità di zucchero, ed alcuno se ne è pure avuto una volta negli umori dello stomaco emessi per vomito suscitato la mattina, cioè quando l' ammalato non aveva preso alcun alimento da molte ore. Nel primo caso tuttavia la quantità presuntiva dello zucchero nei residui della fecula resi per vomito era tale da persuadere l' egregio Sig. Dott. Capezzuoli, che realmente non tutta apparteneva agli umori stessi dello stomaco, ma fosse anzi principalmente dovuta alla conversione della fecula in zucchero. Altre due volte per vomito a digiuno non si ebbe dalle materie dello stomaco alcun segno della presenza dello zucchero, come pure non si manifestò esso in quelle procurateci due volte per vomito dopo il pasto di pure sostanze animali.

13°. Le sperienze poi fatte dallo stesso Sig. Dott. Capezzuoli hanno dimostrato eziandio, contrariamente alle osservazioni di Bouchardat, che per la conversione della fecula in zucchero entro lo stomaco non è necessaria nè la temperatura di 40 gr., nè una leggiera alcalinità del sugo gastrico: egli ha conseguita artificialmente la sollecita digestione della fecula a 24 gr. di temperatura ed in liquido sensibilmente acido (1).

14°. Che se parve gli acidi dello stomaco, o la saliva, o una particolare materia facessero ufficio di diastasi, e procacciassero la trasformazione della fecula in zucchero; il Capezzuoli inoltre la conseguiva cogli umori di secrezione dello stomaco dei diabetici, e d' un altro affetto da malattia cronica di tal viscere, ed eziandio con quelli tratti dal quarto stomaco d' un sano agnello, non che colle materie separate dalla membrana mucosa delle vie aeree; e in ognuno di questi casi anche dopo di avere sottoposti i detti materiali a replicate lavature: d'onde

(1) Esperienze della digestione delle fecule, pag. 12. Art. estr. dalla Gazzetta Med. Toscana, Anno III, in 24°.

egli concludeva, che niun particolare principio proprio dei diabetici si può supporre essere in essi operatore della conversione della fecula in zucchero; ma a tale effetto bastare soltanto l' umore secreto della membrana mucosa, così dello stomaco, come delle vie aeree.

15°. Analizzato cinque volte il sangue tratto da alcuni dei diabetici raccolti nelle Sale Cliniche, tre volte si è trovato contenere zucchero: due volte in piccolissima, ed un' altra volta in molto notabile quantità, quasi superiore alla proporzione medesima, colla quale si rinveniva allora nelle orine dello stesso malato giusta le analisi instituite dall' illustre Prof. Cozzi. Quest' ultima volta il sangue era stato levato poco dopo il pasto: circostanza al certo meritevole di grande attenzione; tanto più che anche l' egregio Capezzuoli trovò maggiore la quantità dello zucchero nel sangue tratto da un diabetico poco tempo dopo il pasto, che non in quello della giovanetta diabetica, tratto da essa a digiuno. Se non che nelle orine di quello lo zucchero erasi sempre palesato in quantità maggiore, che non nelle orine della diabetica. Il Polli pure trovava non poco maggiore la quantità dello zucchero nel sangue tratto dai diabetici dopo il pasto, di quello che nel sangue stesso tratto a digiuno, ed il Bouchardat scorgendovelo nel primo di questi casi, non ve lo rinveniva punto nel secondo.

16°. Zucchero trovava lo stesso Capezzuoli nel pus d' un ascesso, raccolto da un diabetico vivente, ed eziandio nello siero effuso nel pericardio e nella bile della cistifellea raccolti dal cadavere d' un altro diabetico: non che nel sangue, nella orina, ne' ganglj linfatici del cadavere d' un terzo diabetico, nel muscolo sartorio e nella sostanza cerebrale del cadavere medesimo: zucchero trovava più volte il Prof. Cozzi nella materia degli escreati d' un diabetico ancora vivente, e quindi poi nella bile, nelle mucosità delle prime vie, nel tessuto cellulare e nel muscolare dello stesso diabetico già defunto. In esso era insorta la tubercolosi polmonare, e quando gli escreati vennero abbondanti e contenenti lo zucchero in notabile pro-

porzione, accadde altresì una considerabile costante diminuzione della quantità giornaliera dello zucchero nelle orine, le quali cominciarono invece a contenere albumina.

17.° Finalmente, dappoichè le necroscopie mi addimostrarono sempre il corpo dei diabetici privo di pinguedine, ben più che non suole osservarsi per altre malattie consuntive, pregai il Sig. Dottore Capezzuoli di ricercare nei tessuti la proporzione delle materie grasse; ed egli, fatto il confronto della proporzione di esse nella sostanza cerebrale ed in quella del muscolo sartorio d' un diabetico e d' un tisico, trovò mantenersi nei detti tessuti d' ambidue questi individui a press' a poco la stessa proporzione delle materie grasse.

Le risultanze dunque, a cui mi hanno condotto le indagini chimiche, che io faceva instituire e quelle che ne aggiungeva l' egregio Capezzuoli per più particolare oggetto de' suoi studj chimici, mi apprestano ragione di scendere nelle conclusioni che seguono, le quali riguardo come esattamente dimostrate.

1. L' alimento animale diminuisce nei diabetici la produzione giornaliera dello zucchero, e così ne fa certi che l' alimento feculento appresta materiali ad una tale produzione.

2. L' alimento animale non impedisce del tutto la generazione dello zucchero diabetico, ed in questo modo ne accerta, che questo si può originare anche senza cooperazione alcuna delle materie feculente ingerite. E tale fatto oggi giorno viene eziandio ampiamente confermato dallo Scharlan e dal Löwig che egli medesimo cita. Ambidue videro continuare la presenza dello zucchero nelle orine, a fronte che gli ammalati usassero il solo vitto animale; ed il Scharlan assicurossi inoltre, che, emessa per vomito la sostanza fibrinosa, di cui era stato nutrito un infermo di glucosuria, vi si notarono segni manifesti di zucchero (1): d'onde segue che eziandio quando sono ingerite le sole sostanze animali, e precisamente le azotate, e manca

(1) Giornale per servire ai progressi della Patologia ecc. Venezia 1847. Ser. II. Fasc. 68 e 69; pag. 342.

entro lo stomaco la presenza di qualunque materia feculenta, si ha tuttavia nei malati di glucosuria una sorgente di zucchero entro il loro stomaco stesso.

3. Quantunque però la produzione dello zucchero diabetico abbia un' indubitabile attenenza colla qualità dell' alimento ingerito; e quantunque sia provato che, o consti esso di materie feculente, o di sole sostanze azotate, nello stomaco dei diabetici misto colla massa alimentare in progresso di chimificazione si trova lo zucchero; ciò non pertanto non si può dire dimostrato ancora, che dalla trasformazione delle sostanze alimentari derivi lo zucchero diabetico, nè che questa morbosa trasformazione si operi nello stomaco. Imperocchè il poco zucchero trovato misto colle materie animali emesse per vomito potrebbe essere pure dovuto agli umori dello stomaco, che il Capezzuoli trovava una volta contenere zucchero, ancorchè vuoto affatto d' alimenti fosse lo stomaco; e l' aumento della quantità dello zucchero nelle orine dei diabetici nutriti di materie feculente, potrebbe anche derivare dalla consueta normale conversione delle fecule in zucchero, le quali così aggiungessero nuovo zucchero a quello morbosamente prodotto dal processo specificamente proprio della glucosuria. Nell' uno e nell' altro caso le risultanze delle nostre osservazioni sarebbero evidentemente riuscite medesime, ancorchè la sorgente morbosa dello zucchero diabetico fosse fuori dello stomaco, ed ancorchè non provenisse punto dai materiali ingeriti. Ma negli umori dello stomaco digiuno, per quale cagione mai si può egli credere esistente lo zucchero nei malati di glucosuria? Forse per effetto di secrezioni alterate? o forse per avanzo del molto zucchero prodottosi entro lo stomaco col mezzo delle conversioni delle materie alimentari? Non credo possibile affermare nè l' una, nè l' altra cosa risolutamente; quando anzi sembra poco probabile che la glucosa, bene solubile, possa non essere tutta condotta nel duodeno ed assorbita, e quando pure sembra meno probabile, che il sangue, il quale poche volte si è trovato contenere lo zucchero, possa poi tanto lasciarne filtrare dalla mucosa dello

stomaco, ovvero, fornendo i soli materiali a comporlo per atto di secrezione, solamente poi alla mucosa stessa dello stomaco e dei primi intestini li appresti, e niente a tutte le altre membrane della stessa natura.

4. Ciò non pertanto lo zucchero trovato nella materia degli escreati ne fa certi del potersi esso secernere eziandio dalla membrana mucosa delle vie aeree, e quello rinvenuto nella bile, nel tessuto cellulare, nel muscolare e nello siero effuso entro il pericardio ne addimostra, che pure dalle membrane sierose e dal fegato può essere segregato lo zucchero, non che venire infiltrato nella trama organica dei tessuti d' altra parte inalterati nella loro composizione organica. Di più, avendo noi osservato la più grande estensione della secrezione e del deposito dello zucchero diabetico, quando era grandemente diminuita la quantità di esso nelle orine, veggiamo in certa guisa da tale fatto additato, come il sangue si possa, per così dire, soprasaturare del principio zuccherino, ed allora questo abbia facoltà di filtrare quasi per ogni superficie, o tessuto, od organo secernente del corpo umano. Ma, dacchè nel sangue dei diabetici il più delle volte manca lo zucchero, e, quando vi si rinviene, ordinariamente vi è in piccola quantità, così egli è ragionevole il congetturare da ciò, che lungi dal generarsi esso nel sangue stesso, non si trovi anzi in questo che in istato di semplice passaggio, e per l'ordinario la secrezione venale basti a spogliarne tutta la massa sanguigna.

5. Posta questa deduzione, seguirebbe di dovere esaminare, se la sorgente dello zucchero diabetico fosse nei reni, come non pochi hanno pensato, o se piuttosto si dovesse derivare dalle prime vie, come principalmente presumono i moderni. Ma, dacchè zucchero diabetico si trova talvolta nel sangue, e dacchè, diminuendo nelle orine, ne filtra copiosamente per altri organi e tessuti, evidentemente la produzione di esso non è in quegli organi, che, appena lo ingenerano, lo escernono pur anche dal corpo, come i reni; bensì in alcun altro di quelli, che i materiali proprj mandano in circolo entro la massa

sanguigna. Queste considerazioni aggiungono grande valore alle dimostrazioni dell' influenza dell' alimento sulla quantità dello zucchero emesso colle orine; alle altre sullo zucchero trovato nella massa chimosa, ed infine al fatto della costanza e gravezza degli sconcerti gastrici nei diabetici, per quindi inferirne che molto probabilmente la genesi morbosa dello zucchero diabetico ha effetto nelle prime vie, e singolarmente nello stomaco.

6. Come però questa generazione si sostiene in modo tuttavia notabile, anche quando niuna materia feculenta viene ingerita, così necessariamente non si può crederla dovuta soltanto, come presumeva Bouchardat, alla conversione di quella in desterina e in glucosa; ma conviene bensì ammettere che un processo tuttavia occulto d'azioni chimiche si compie nelle vie alimentari, atto per sè stesso a trasformare buona parte delle materie alimentari in zucchero; il che sembra corrispondere eziandio da una parte colla molta fame dei diabetici, e colla enorme quantità d' alimento quotidianamente da essi ingerito; e dall' altra colla mancanza d' una pletora successiva, e colla spaventevole emaciazione, che anzi ne conseguita: tutte circostanze molto valevoli a dimostrare un grande consumo di materia alimentare, senza che serva nè all' ematosi, nè alla nutrizione.

7. Questa probabile genesi dello zucchero diabetico ci conduce pure a dovere argomentare dalla riconosciuta influenza della qualità e quantità dell' alimento a moderare la quantità dello zucchero emesso giornalmente colle orine l' efficacia della natura stessa dell' alimento nell' accrescere o diminuire il processo della stomacale ed intestinale saccarogenesi.

8. Però, se la qualità degli alimenti non è per sè stessa cagione diretta della glucosuria, devesi nondimeno considerare come una causa, o vogliamo dire, come uno degli elementi d'azione, che forse non poco moltiplici si riuniscono a formare la vera composta cagione di sì formidabile malattia. E qui voglio che pure si consideri avere io nel corso di circa 15 anni osservato undici malati di glucosuria, tutti appartenenti alle

classi inferiori della popolazione, e niuno mai averne osservato fra le classi più agiate. Che anzi de' miei malati i più appartenevano alla popolazione della campagna, cioè a quella che più suole cibarsi di sostanze farinacee. Nè in alcuno di questi malati aveva mai operato alcuna di quelle cagioni, che più sogliono deteriorare le assimilazioni organiche; nè contrassegno alcuno di tale deterioramento appariva in essi, anche quando già la malattia era sviluppata ed eziandio avanzata, tranne almeno in alcuni un certo discreto stato d' emaciazione. Così mentre si sviluppava e si compiva nei loro corpi un insolitissimo processo di composizioni organiche, non si dimostravano da un' altra parte nè i contrassegni d' alcuna valutabile discrasia o viziosità qualunque dell' ematosi, delle secrezioni e degli atti nutritivi, nè quelli d' un' alterazione sensibile degli organi tutti e delle loro funzioni: cosicchè devesi di filo riconoscere in questi corpi a poco a poco mutato il rapporto, che passa fra la natura degli alimenti e quella degli agenti che debbono elaborarli nelle prime vie: ed a questa mutazione di rapporto può appunto ognuno comprendere quanta influenza possa esercitare l' abituale maniera d' alimentazione. Nel quale proposito debbo altresì notare, che nella giovanetta, la quale sostenne il vitto animale per più di quattro mesi, non solo in tutto questo tempo fu minore la quantità dello zucchero emesso colle orine, ma, perduta la morbosa sete ed il morboso appetito, la giovanetta stessa tornò e si mantenne in tanto ordine e regolarità di funzioni, che in tutto esse veramente non differivano dallo stato della più piena salute; onde fu bello vedere allora l' inferma riprendere carni, colorito e forze; impinguare eziandio oltre il suo consueto, ed acquistare tutta la freschezza dell' aspetto e tutta la pienezza ed energia della persona, quali realmente si convengono alla più fiorente salute. Ove l' analisi chimica non avesse avvertito che tuttavia le orine contenevano zucchero, sarebbe stato impossibile di credere malata questa zitella. Volle essa il dì 23 Giugno 1844 uscire dallo spedale, mentre era in questo stato, e non sapeva persuadersi di non

avere ancora raggiunta la piena sua guarigione. Restituita alle sue consuetudini di vita, e nutrita quasi di solo vitto vegetabile, vide ben presto dileguarsi le apparenze della sua buona salute; tornare la morbosa sete ed il morboso appetito; di nuovo abbondare il flusso delle orine; e soprattutto cadere di giorno in giorno grandemente le forze, e venirsi essa emaciando con incredibile rapidità: di tal che accolta di nuovo nella Sala Clinica il dì 1° di Decembre dello stesso anno, io la trovava veramente ridotta nell' estremo dell' emaciazione e dello sfinimento: le orine giornaliere erano di 9 in 12 libbre, e contenevano zucchero nella proporzione di denari 26 $\frac{2}{10}$ per ogni libbra, e così ne portavano fuori da once 9 in 13 per giorno. L'inferma però dopo soli quattro giorni di decubito nella Sala Clinica cessò di vivere, somministrando a noi un documento d' osservazione meritevole della più grande attenzione. Certamente il sommo miglioramento della sua salute fu dovuto all' uso della dieta animale perseverato per quattro mesi e otto giorni: i rimedj, che essa prese in quest' intervallo di tempo, furono quelli medesimi già riconosciuti inutili in altri infermi; ed oltre di ciò nella Sala Clinica medesima, appena desisteva dall' uso del vitto animale, manifestava subitissimo l' aumento dei fenomeni diabetici. Tornata nella propria casa, il più grande mutamento delle sue consuetudini si fu certamente quello del vitto composto allora quasi affatto di sole sostanze vegetabili. Nemmeno può supporsi sì di leggieri occorsa qualche grave alterazione delle funzioni cutanee, dappoichè correva allora la stagione estiva, e quando sopravvenne l' autunnale, l' inferma aveva già soggiaciuto a grande detrimento della sua salute. Tutte queste circostanze comandano molto efficacemente di riconoscere dal vitto vegetabile il rapido e gravissimo inasprirsi della glucosuria in questa sventurata zitella, come dal vitto animale avevamo dovuto derivare il mirabile benessere riacquistato da essa. Egli è questo un nuovo fatto assai concludentemente dimostrativo dell' influenza, che l'alimento esercita nella generazione della glucosuria. Onde io fortemente propendo a

credere, che fra le cause predisponenti di tale malattia sia molto ragionevole di considerare l' abituale soverchio uso di vitto vegetabile, e singolarmente del farinaceo. Egli è pure di già conosciuto, che lo stomaco prende attitudine a meglio digerire il cibo consueto, di quello che l'insolito: e così avviene non difficilmente che dopo lungo uso di vegetabili e di pesce, male vengano digerite le carni da quelli stessi che prima ottimamente le digerivano: ed al contrario a coloro, che molto sogliono cibarsi di carni, riesca di leggieri penoso e difficile il digerire le sostanze vegetabili. Però a me sembrerebbe quasi di potere presumere, che sotto l' uso del vitto farinaceo potesse lo stomaco ognora più attuarsi a promovere la conversione della fecula in desterina e glucosa; fino a che poi, sopravvenuta la necessaria cooperazione di altre concause, la saccarogenesi ecceda tanto, da rendersi per ciò solo morbosa. Insensibili di fatto sono per lo più i primordj della glucosuria, e raramente riesce di conoscerne alcuna particolare cagione; nè a torto certamente riflette Heller, che forse lo zucchero nelle orine esiste non avvertito anche anni prima dello sviluppo dei fenomeni diabetici, ed a questa circostanza, più che ad altro, è dovuta l' oscura patogenia del morbo (1). Il quale pensiero verrebbe pure convalidato dalla citata osservazione del Polli, dello zucchero cioè comparso nelle orine di lui e d' un suo amico sotto lo stato della più intera salute, solo per effetto di abbondante vitto feculento preso. In niuno degli undici miei malati non si conobbe veruna abbastanza manifesta cagione della malattia. Comprenderebbesi in questo modo anche la somma difficoltà di vincere una tale infermità; dappoichè sarebbe essa in tale caso non altro che la conseguenza ultima delle qualità assunte a poco a poco dall' individuale costituzione sotto l'influenza delle costanti abitudini della vita. Nè pure comprenderebbesi meno la difficoltà di discoprire l' alterazione dell' organismo, nella quale riporre si dovrebbe il

(1) Annali di Chim.; Vol. VI, Marzo 1848, pag. 160.

vero stato morboso della glucosuria; perciocchè confonderebbesi essa allora coll' essere il più intimo della composizione organica, come addiviene appunto in chi, abusando d' alcuna nocevole sostanza, contrae alla fine certi malori, senza che pure si disveli l' alterazione rimasta nell' organismo. Io so bene che con tutto questo discorso non espongo che congetture; ma in tanta oscurità d' argomento egli è certamente dalle congetture che debbono cominciare i nostri tentativi di scienza; e perciocchè le esposte congetture mi sembrano validamente desunte dalle più essenziali pertinenze della glucosuria, e non poco confortate dalle analogie, così credo non debbano meritare il disprezzo di chiunque si trovi in grado d' estendere le convenevoli indagini intorno ad una malattia sì poco ancora conosciuta. Ed io certamente mi stimerei molto felice, se, così congetturando, avessi potuto mai aprire la via ad utili ricerche. Laonde non sia discaro che alla fine concluda non essere improbabile, che l' alimento vegetabile, e propriamente il farinaceo, sia una delle molto possenti cagioni predisponenti della glucosuria. E fu di fatto dai Clinici insegnato che lo scarso vitto, quello composto di sole sostanze vegetabili, il pane di segala, l' abuso degli acidi, dello zucchero, della birra e del sidro sono cagioni di diabete: per la quale cosa le congetture ch' io manifestava si rafforzano pure per la comune osservazione clinica, la quale almeno ci attesta non essere sfuggito all' attenzione dei Clinici, che caddero nella glucosuria piuttosto coloro che si cibavano nei modi predetti, di quello che gli altri nutriti di vitto sostanzioso ed animale. Aggiungerò eziandio, che de' miei malati uno erasi sempre nutrito di scarso e cattivo cibo, un altro aveva usato quasi sempre sole sostanze vegetabili, ed un terzo non aveva preso per vitto quasi mai altro che pane e legumi.

Una obbiezione, facile a prevedersi, credo tuttavia di dovere risolvere. Il minuto popolo, e quello in ispecie della campagna, si nutre quasi solamente di sostanze farinacee, o almeno le prende in proporzione molto maggiore delle sostanze animali:

però, se esse valessero alla generazione della glucosuria, parrebbe bene che questa dovesse occorrere molto più frequente, che poi realmente non occorre. Questa obbiezione è per verità di molto peso, e dimostra senza dubbio che il solo alimento farinaceo non basta alla generazione della glucosuria, e che d'altra parte molto difficilmente occorre l'influenza delle altre concause necessarie alla produzione dell' effetto. Però, allorchè fatti bene avverati attestano l' influenza della natura dell' alimento sulla generazione della glucosuria, non si può quella impugnare, solo perchè molto raramente segue l' effetto alla supposta influenza. Giova il rammentare, che delle cagioni composte non si può mai ragionare come delle semplici; e che molte volte può bene riuscire rarissimo il formarsi della cagione composta necessaria ad un dato effetto, ancorchè gli elementi d' azione che debbono comporla, dispieghino soventemente l' opera loro. Così dalla rarità degli avvenimenti possiamo arguire soltanto la difficoltà della riunione di tutto l'insieme delle concause necessarie alla generazione dell' effetto. Per lo che, se io dovessi ancora portare più oltre le mie congetture, direi che fino a tanto il molto esercizio della persona e l' aria libera e pura inspirata consumano abbastanza gli elementi respiratorj introdotti nell' organismo, non sono a temersi gli effetti della loro ridondanza in esso, come appunto negli animali selvaggi non nascono i tubercoli, che molto facilmente li affliggono, quando questi sono resi domestici; le scrofole assalgono meno gli agricoltori indurati sotto le fatiche, che il molle abitatore delle città, ancorchè il primo prenda cibo assai meno nutritivo di quello usato dal secondo. Quasi somigliante cosa credo sia a dirsi dell' influenza del vitto farinaceo riguardo alla generazione della glucosuria; sicchè presumo non possa punto valere ad infirmare la forza delle esposte congetture la rarità molta di quella in coloro, che pure usano abitualmente il vitto farinaceo.

Altra cagione reputata molto valevole alla generazione della glucosuria, si è l' influenza dell' umidità atmosferica. Dei miei

malati niuno fu esposto ad essa in modo da poterla considerare come causa occasionale della malattia, e quattro soli vi furono esposti a modo di causa predisponente: l' uno viveva in luoghi bassi ed umidi, e per cinque mesi dell' anno in vicinanza pur anche d'una palude: un altro passava buona parte del giorno in camera poco ariosa ed umida: il terzo pel suo mestiero di macellajo esponevasi spesso senza cautela all' azione libera dell' atmosfera, e non di rado dormiva sul nudo ed umido suolo della sua bottega: il quarto infine, esercitandosi nella pesca, passava spesso le intere notti in vicinanza alle acque. Eziandio in due di questi malati alla sete ed allo scolo più abbondante delle orine precedettero alcuni fenomeni simulanti un assalto di reuma. Ricorderò altresì che negli stessi miei malati apparve quasi sempre ben manifesta l' influenza dell' umidità atmosferica nell'accrescere la quantità giornaliera delle orine, e con essa quella eziandio dello zucchero: ciò che soprattutto notammo, come più sopra accennava, nella giovanetta che per noi fu subbietto delle più importanti osservazioni. Tutto questo mi fa credere, che senza dubbio l' umidità dell' atmosfera influisce alla generazione della glucosuria; e v' influisce principalmente per lo sconcerto delle funzioni cutanee. Almeno i maggiori disordini intervenivano nei nostri infermi così subitamente per gli aumenti dell' umidità atmosferica, che pare di non poter credere avesse allora potuto questa operare per altro modo, fuorchè per lo sconcerto delle funzioni cutanee. E qui desidero si voglia bene ponderare che, non aumentando allora solamente il flusso delle orine, come suole accadere anche nei sani, ma aumentando pure la quantità dello zucchero emesso con quelle in 24 ore, seguita di dovere riconoscere dall' influenza dell' umidità atmosferica e dal conseguente turbamento delle funzioni cutanee avvalorato il processo della morbosa saccarogenesi. E come così esso resta per tale cagione avvalorato a malattia già sviluppata, può bene credersi che dalla stessa cagione possa pure venire promosso a malattia non ancora insorta; e perciò anche i frequenti abituali turbamenti

della funzione cutanea, spesso del tutto inavvertiti, od anche non possibili ad essere avvertiti, sieno bene altra efficace cagione predisponente della glucosuria. La quale supposizione mi sembra certo non poco confortata dall'osservazione d'un certo Keith Zurey, che accerta di avere veduto sei diabetici inutilmente trattati con diversi metodi di cura essere poi guariti col dimorare in clima caldo; e da quella già fatta dall'Hunter, che nel suo lungo soggiorno nel Bengala non si vide mai un diabetico; ed infine da quella pure del Christie, che assicura guarire con molta facilità i diabetici nel Ceylan (1).

Le afflizioni dello spirito, gli abusi di Venere, l'onanismo, le eccessive occupazioni della mente, le soverchie corporali fatiche furono pure noverate fra le cagioni della glucosuria, che Sydenham diceva derivare da ogni maniera di cause debilitanti, Place dal difetto dell' assimilazione organica, Desault dai vizj degli umori, Rollo dall' azione alterata dello stomaco. Fra i miei malati uno era stato preso da malattia celtica, e quindi sottoposto a cura mercuriale, massimamente all' uso del deutocloruro di Mercurio, onde ne rimase assai debole ed emaciato, e dopo cinque anni non ancora bene ristorato delle sue forze, cadde nella glucosuria; un altro aveva soggiaciuto nell'infanzia ad ingrossamenti e suppurazioni dei ganglj linfatici, e quindi aveva quasi sempre dimorato in camera umida e poco ariosa, e preso cibo ordinariamente vegetabile; un terzo nell'infanzia aveva mangiata la fuliggine; un quarto aveva sostenuto le dure fatiche d' agricoltore, ed insieme usato per vitto quasi il solo pane ed i legumi, e sofferta eziandio l'influenza dell'umidità: tutti gli altri più o meno si erano pure per la condizione loro e per le consuetudini della loro vita trovati esposti, benchè assai meno, a queste medesime influenze. Così fra undici individui quattro sostennero senza dubbio la manifesta influenza di cause atte a deteriorare la nutrizione e le forze de' loro corpi, gli altri sottostettero a questa medesima influenza solo

(1) Gaz. Méd. 3.me Sér., T. I, pag. 703.

in modo oscuro e presuntivo; ma niuno fu certamente esposto alle cagioni che meglio promovono le assimilazioni organiche. Quindi le testimonianze dei Clinici e le mie osservazioni concordano nel dimostrare, che le cagioni proprie della glucosuria trovano modo d' operare il loro effetto, allorquando l' umano organismo per qualsivoglia altra cagione decade dal suo essere di buona assimilazione organica e di vigente vigorìa delle potenze vitali, o almeno non si sostiene quella nella più desiderabile perfezione: ciò che corrisponde con quanto ragionava più sopra intorno alle originarie predisposizioni degl' individui riguardo alla glucosuria. Però non saremo certamente renitenti di noverare fra le cause predisponenti di essa tutte quelle pur anche, le quali influiscono direttamente o indirettamente al deterioramento delle organiche assimilazioni, o ripongansi esse in antecedenti malattie, o in abusi della vita, o in azione insolita di qualche perturbativa potenza, o in che che altro valevole d' azioni o dinamiche, o chimico-organiche offensive dell' essere organico-vitale del corpo umano.

Infine Kämpf disse regnare talora epidemico il diabete, che a Reil e Thomann parve pure contagioso. Queste sentenze ci apprestano argomento a credere che talvolta il diabete siasi osservato assalire molti individui a un tempo a modo piuttosto di malattia epidemica, che sporadica. Qualche cosa di somigliante s' inchiude pure nel fatto di molti individui d' una stessa famiglia caduti nel diabete. In tutti questi casi manifestasi senza dubbio l' influenza d' una causa comune, che ha colpito parecchi individui; ma non se ne manifesta egualmente la natura, e però rimane tuttavia ignoto, se essa ripongasi nella disposizione ereditaria o congenita di quelli; ovvero in un contagio trasmissibile da individuo ad individuo, o in una influenza endemica o epidemica, o infine in qualsivoglia altra fortuita efficenza comune. Il fatto, che addimostra soltanto la contemporaneità o la successione straordinaria di diabetici in un determinato luogo e in un determinato tempo, non lascia scorgere per sè solo la cagione di quella: conviene eliminare

le altre possibili prima che sia permesso di collocarle in un principio contagioso, ovvero in un' influenza epidemica o endemica. Osservazioni compiute con tale accuratezza riguardo al diabete non conosco, e quindi non saprei con quanto giusto fondamento gli accennati scrittori abbiano profferite le loro sentenze. Notabile però riguardo ai miei malati, che dal Novembre 1842 fino all' Aprile 1844, che vuol dire nello spazio di poco più d' un anno, se ne offrissero sei, ed uno nel Novembre del 1841, e due nel Marzo del 1845, e dopo di questi uno nel Giugno dell' anno scorso, ed un altro nel presente. Così nell' intervallo di circa 15 anni nove diabetici mi si sono presentati nello spazio di poco più di tre anni, e due altri in distanza dai primi nello spazio di meno d' un anno; nè in tutto questo intervallo di tempo a me è occorso di vedere alcun altro caso di diabete, nè certamente ne è capitato verun altro nell' I. e R. Arcispedale di S.ª M.ª Nuova, in cui si ricovrano mai sempre più di mille malati. Questa frequenza del diabete nello spazio di tempo sopraccennato, la quale è veramente straordinaria, accenna necessariamente a cause straordinarie. D' altra parte gl' individui erano tutti diversi per provenienze di famiglia, per luoghi di dimora, e per consuetudini di vita: quindi fra tutte queste niuna influenza comune. Quando però considerare non si voglia l' indicata frequenza del diabete, come assolutamente fortuita, essa in tale caso non potrebbe additare che un' influenza cosmo-tellurica. In quest' epoca medesima dominava qui pure assai straordinariamente frequente la migliare, nè le malattie flogistiche vestivano più le qualità del carattere loro più legittimo, nè mancavano esantemi di varia maniera, e lo stesso grippe addimostravasi pure una volta grandemente comune. Una particolare costituzione epidemica regnava senza dubbio, la quale, allontanando i corpi dalla predisposizione alle vere flogosi e alla più decisa diatesi flogistica, li aveva fatti più propensi alle malattie reumatiche, catarrali, ed esantematiche. Dal 1845 in avanti era un poco rattemperata una tale costituzione, quando poscia nel 1848 cominciò di

nuovo a manifestarsi la propensione alle malattie catarrali, e nella primavera ed estate del passato anno assai comuni si resero le diarree mucose e le dissenterie, nè mancò pure qualche caso di quel mite coléra, che comunemente designasi col nome di colerina: ed appunto in questo nuovo stadio di costituzione epidemica io m' ebbi di nuovo ad osservare due altri casi di diabete. Confesso il vero: tutte queste circostanze mi sembrano molto atte a persuadere, che alla generazione delle glucosurie, da me osservate in picciolo spazio di tempo così straordinariamente numerose, abbiano realmente influito le cagioni epidemiche, chiaramente dimostrateci già dal contemporaneo dominio di altre malattie. Ed è pure notabile, che queste cagioni medesime, per la loro influenza, resasi pure assai manifesta sui corpi umani, erano acconce a digradare questi dal più perfetto essere delle loro assimilazioni organiche e delle loro energie vitali: avevano cioè per lo appunto quella natura, che superiormente ho dimostrato appartenere a tutte le cause predisponenti alla glucosuria. La quale inoltre, poichè si costituisce in una particolare lesione del processo assimilativo, è giusto eziandio di quelle, che più sentono la forza delle influenze epidemiche. Però tutti questi argomenti mi pare che molto si dieno mano a convincere, che veramente le glucosurie da me osservate abbiano ricevuto impulso anche dalla costituzione epidemica dominante.

Nè dopo tutto ciò io rammenterò certe altre cagioni, dalle quali si è detto essere nato talvolta il diabete, le quali per la loro attitudine ad agire specialmente sui reni si può piuttosto credere abbiano valso ad originare semplici poliurie. Considererei di tale maniera i diabeti, che si sono detti originati dall' abuso dei diuretici e degli emenagoghi, dalle cadute in piedi, dai colpi sulla spina dorsale, dalle malattie della midolla spinale, dalla ritenzione dell' orina e simili. Dopo che consta abbastanza l' attenenza della glucosuria colle cagioni turbatrici dello stato assimilativo, e dopo che molti argomenti persuadono essere nello stomaco una morbosa generazione di zucchero nei

diabetici, non si può tenere probabile che le poliurie nate per cause influenti specialmente sui reni fossero da riferirsi a vere glucosurie. In mancanza delle osservazioni dimostrative dell'esistenza dello zucchero nelle orine questo dubbio sembrami molto saviamente consigliato.

Le testimonianze dunque della comune sperienza clinica, confrontate e disaminate insieme colle particolarità più considerabili delle glucosurie da me stesso osservate, mi sembra che apprestino non leggiero fondamento alle dimostrazioni, che fino ad ora sono venuto esponendo, e che mi piace ora di riepilogare per finale conclusione del mio discorso.

1°. La glucosuria può senza dubbio tenere a predisposizioni congenite.

2°. Le condizioni meglio certificate dei corpi, che più vi soggiaciono, ripongonsi nella prevalenza dello stato albuminoso, o almeno nell' esclusione del più esteso e compiuto processo delle metamorfosi organiche operate col mezzo dell' influenza dell' ossigeno.

3°. Malattie precedenti, e consuetudini della vita acconce ad avvalorare le predisposizioni alla glucosuria non sono che quelle, le quali fanno retrocedere le assimilazioni organiche dal loro migliore essere.

4°. Le influenze epidemiche valevoli d'un simile effetto possono pure predisporre alla glucosuria.

5°. Molto probabile l'efficacia del vitto vegetabile e singolarmente del farinaceo nell'ingenerare una tale predisposizione.

6°. L'umidità congiunta colla bassa temperatura atmosferica, turbando le funzioni cutanee, influisce alla generazione della glucosuria, e sembra che ciò avvenga per sua azione diuturna a modo di causa predisponente, anzichè per azione forte e subitanea a modo di causa occasionale.

7°. La glucosuria si origina moltissimo più per forza delle cause predisponenti, che per quella delle cause occasionali, ordinariamente non avvertite, o realmente non esistite.

8°. Nata che sia, l'alimento feculento ha forza d'accrescerla, l'animale di moderarla.

9°. Le considerazioni eziologiche intorno di essa non rischiarano punto la ragione della saccarogenesi, ma dimostrano bene che una morbosa generazione di glucosa ha effetto entro lo stomaco.

10°. Se questa sola sia la sorgente dello zucchero diabetico, non appare abbastanza dall'esame delle cagioni della glucosuria.

11°. In ogni modo queste concludono sempre a comprovare che senza un singolarissimo insieme d'influenze turbative delle assimilazioni organiche la glucosuria non insorge: la quale perciò dobbiamo riguardare come malattia proveniente da una cagione molto composta.

12°. La rarità di essa stessa si può derivare unicamente dalla molta difficoltà di potersi insieme riunire tutti gli elementi d'azione necessarj a comporre la cagione di essa.

13°. Finalmente appare abbastanza manifesto un assoluto antagonismo fra la generazione della glucosuria e quella della vera diatesi flogistica.

Tali pertanto le conclusioni, che a me sembrano più severamente dedotte dal complesso delle osservazioni relative all'eziologia di così infausta malattia. Spetterà quindi all'esame delle altre pertinenze di essa il rendere aperto, se queste medesime confermino, o al contrario disdicano le conclusioni predette. Intanto i savj consigli del Pubblico potranno essermi guida a meglio portare poscia le mie considerazioni eziandio sopra di quelle.

SU DUE LIBRI DI APOLLONIO PERGEO DETTI DELLE INCLINAZIONI E SULLE DIVERSE RESTITUZIONI DI ESSI

DISQUISIZIONE

DEL SOCIO ATTUALE

CAVALIERE VINCENZO FLAUTI

Ricevuta il 13 *Maggio* 1850.

Tra gli altri libri del gran Geometra Apollonio, che formavan parte del *Luogo Risoluto* delle greche Scuole, ve n' eran due intitolati *περι νευσεων*, cioè *delle Inclinazioni*, l' argomento de' quali vien così generalmente dichiarato da Pappo: *Duabus lineis positione datis, inter eas inserere rectam magnitudine datam, quae ad datum punctum pertingat.* Ed egli poi vi soggiugne, che i diversi problemi di questo argomento erano altri *Piani*, altri *Solidi*, altri *Lineari*; ma che quelli nel genere de' Piani, scelti da Apollonio, come più utili a grandi applicazioni, erano i seguenti: I. In un cerchio dato di sito, adattare una retta di data grandezza, che passi per un dato punto II. Dati di posizione un semicerchio ed una retta perpendicolare al diametro, o due semicerchi co' diametri in una medesima retta; applicare tra le loro circonferenze una retta di data grandezza, che passi per un degli angoli di un semicerchio. III. Applicare tra' lati di un angolo una retta di data grandezza, che passi per un dato punto equidistante da' lati dell' angolo (1).

(1) È da credere, che gli antichi Geometri avessero anche trattati problemi di questa famiglia negli altri due generi, di che un esempio ne rimane, pel terzo de' problemi enunciati, nel caso del punto dato comunque, del quale si valsero per la trisezione angolare. Nè è presumibile, che come per questo problema ne avevano resa più generale

Quest' ultimo problema, il primo, e quello di un solo semicerchio e la retta, distinti ne' loro casi, e con le rispettive determinazioni componevano il primo degl' indicati due libri;

---

la soluzione, variando la posizione del punto, non avessero fatto ancor lo stesso pel semicerchio e la perpendicolare al diametro, e pe' due semicerchi, variando il punto di tendenza. E giova quì recare la soluzione del primo di questi, per comprovare il detto di Pappo, di esser tali problemi utili a grandi applicazioni.

PROBLEMA.

Dati di posizione il semicerchio POV (fig. 1ª) e la perpendicolare AR al diametro di esso: inclinare tra la semicirconferenza e la perpendicolare la retta RB di data grandezza, tendente al punto G dato nel diametro.

SOLUZIONE.

Dal punto B che si cerca, si ordini nel semicerchio la BF, e si tiri al centro C la BC. Pongasi $GB=x$, $RB=b$, e quindi $GR=b+x$, $GA=a$, $GC=c$, $CB=r$; sarà, pe' triangoli simili GAR, GFB, GR: GA:: GB: $GF=\frac{ax}{b+x}$; e però $CF=GF-GC=\frac{ax}{b+x}-c$. Ma $\overline{GB}^2=\overline{GC}^2+\overline{CB}^2+2CG\times CF$. Adunque sarà ne' loro simboli

$$x^2=c^2+r^2+\frac{2acx}{b+x}-2c^2,$$

equazione che convenevolmente ridotta diviene

$$x^3+bx^2+(c^2-r^2-2ac)x+(c^2-r^2)b=0.$$

La quale ne mostra esser *solido* il problema in tal caso; ed in essa ponendo $c=r$, cioè supponendo il punto G starne in P, si ha $x^2+bx-2ac=0$, corrispondente al problema *piano* di Apollonio.

Scol. Essendo $\overline{GB}^2+\overline{CG}^2=\overline{CB}^2+2FG\times CG$; sarà, toltevi rispettivamente le uguali grandezze $\overline{CO}^2$ e $\overline{CB}^2$, $\overline{GB}^2-\overline{GO}^2=2FG\times CG$. E moltiplicando il primo membro di questa equazione per $GB+BR$, ed il secondo per GR, n' emergerà

$$\overline{GB}^3+BR\times\overline{GB}^2-\overline{GO}^2\times GB-BR\times\overline{GO}^2=2FG\times CG\times GR.$$

Ma essendo GF: GB:: GA: GR, si ha $FG\times GR=GB\times AG$; e quindi $2GF\times GR\times CG=2GB\times AG\times CG$. Che però sostituendo questo secondo prodotto al primo nella precedente equazione, esso diverrà

$$\overline{GB}^3+BR\times\overline{GB}^2-(2CG\times AG+\overline{GO}^2)GB-BR\times\overline{GO}^2=0;$$

che coincide con quella del problema risoluto, e che potrebbe tradursi in un geometrico teorema, qual fu proposto dal Newton, per ridurre la costruzione delle equazioni cubiche ad *applicare una retta data tra un cerchio ed un' altra retta dati di sito, in modo che l' applicata passi per un punto dato* (App. de aequo const. lin. n. XXXIV.).

mentre l' altro problema de' due semicerchi, da se solo, atteso il gran numero di casi e de' diorismi loro corrispondenti, ne componeva il secondo.

Or non appena si ebbe conoscenza nella nostra Italia delle *Collezioni Matematiche* di Pappo, dalle quali sole, incompiute e mutile come sono, ci è dato raccogliere poca parte dell' estesa scienza geometrica degli antichi, e prima ancora, che dopo le non terminate fatiche dell' illustre Commandini venissero pubblicate in latino, e rese quindi di un uso più comune (1), si diedero i Geometri, principalmente gl' Italiani, a tentar la restituzione de' libri perduti di quel *Luogo Risoluto*. E torna a lode delle nostre felici regioni, che primo in questo aringo si fosse mostrato Francesco Maurolico, il quale, sulla semplice generalissima indicazione di Pappo, imprese a restituire i libri V. e VI. de' Conici di Apollonio.

Da questo primo esempio si mosse il geometro raguseo Marino Ghetaldo, già per altri lavori sopra Archimede conosciuto e riputato, a restituire l' argomento *delle Inclinazioni*; ma egli non valse, che a compiere solamente i problemi del I. libro, sia (come egli afferma nello scolio col quale chiuse il suo lavoro pubblicato in Venezia nel 1607, col titolo di *Apollonius redivivus* (2)), che una missione diplomatica presso

---

(1) Il Commandini mancato di vita non potè perfezionare il grave e difficile lavoro delle *Collezioni Matematiche* di Pappo, le quali dopo la di lui morte furono pubblicate dal suo genero Valerio Spaccioli, impari a tale impresa; ond' è, che a torto l' Halley, con poca urbanità vèrso un uomo tanto benemerito dell' antica Geometria, taccia la costui versione di assurda ed insulsa (*ita in plerisque absurda adeo et insulsa erat Commandini versio. — Proef. in Apoll. Perg. de Sectione* rationis, lib. II.). Ed avrebbe dovuto ancora considerare aver egli potuto lavorare su due Codici mss. della Biblioteca Saviliana, all' un de' quali dà l' Horsley l' epiteto di *esimio*, e che nel 1770 il credeva trascritto, con grandissima accuratezza ed eleganza, da mano italiana, da ben 250 anni indietro. Qual meraviglia dunque, se noi altri Italiani non avessimo potuto perfezionare tal versione! spogliati come siamo stati e siamo tuttavia dallo straniero di quello che prepariamo in aumento delle scienze e delle arti.

(2) Il Vossio nel cap. LVIII *de Scientiis Mathematicis*, dopo aver detto, che l' *Apollonius redivivus* era *Apollonii Pergaei Inclinationum Geometria*, così ripiglia: *Apollonium*

l' Imperator di Costantinopoli, della quale venne incaricato dalla sua repubblica, non glielo avesse permesso, sia che i tentativi fatti per risolvere compiutamente il problema del II. libro, non gli fossero riusciti felici (1). Ad ogni modo tal sua pubblicazione, alla quale lo spinsero due suoi amici, non fu inutile alla Geometria; poichè da essa venne mosso Alessandro Anderson, geometra scozzese traspiantato in Parigi, a trattare questo problema, pubblicando quivi, cinque anni dopo del Ghetaldo, tal suo lavoro col titolo di *Supplementum Apollonii redivivi* (2).

Il Ghetaldo tacque le analisi de' problemi che risolveva, riportandone la semplice composizione, con le rispettive determinazioni, e giudicò ben l' Horsley, ch' egli avesse trasmutate in sintesi le soluzioni ottenute con l' analisi algebrica (3); e

---

vero redivivum nuncupavit, quia cum Apollonii Conicorum libri Graece admodum forent vitiati; quos etiam secutus esset intralatione sua Federicus Commandinus: ipse loca corrupta ita sanitati restituerit; ut ex eo solvi possent problemata quae ante non poterant. Il che quanto sia poco esatto e puerile, il vede anche chiunque sia per poco versato nella Geometria antica.

(1) Si avverte che Ghetaldo in questo medesimo anno potè pubblicare eziandio il suo *Supplementum Apollonii Galli*, e l' altre opere *Variorum problematum collectio*, il numero di ben XLII, tra' quali sono quelli, che il Regiomontano non potè geometricamente risolvere. Sembra poi che l' Halley non avesse avuto per le mani l'*Apollonius redivivus*, e che avesse creduto aver costui trattato l' intero argomento *delle Inclinazioni*, così esprimendosi: *Denique inclinationum problemata, per omnes casus executus est Marinus Ghetaldus.*

(2) Ecco come sul proposito esprimesi lo stesso Ghetaldo: *Distulissem autem, ut omnia simul evolgerentur, libri editionem ad reditum meum libentissime, nisi Nicolaus Tuditius et Lucas Bonus ingeniosi sane viri et prudentes, mihique conjunctissimi aliud mihi suasissent; ajebant enim hac arte excitari, acuique multorum ingenia posse, ut dum problematis solutionem desiderant, ipsi interim studeant excogitare solutionem: acquievi, edidi librum, proposito tantum non soluto problemate, expecto dum solvatur ab alio*; e la sua aspettazione non rimase delusa.

(3) *Alias longe et admodum perplexos casuum variorum constructiones, ineunte saeculo decimoseptimo, in Apollonio suo redivivo Ghetaldus edidit, quas calculo algebraico derivatos (ut ex opere ejus postumo* de Compositione et Resolutione mathematica *sat liquido constat) in Apollonio suo sinthetice demonstrare aggressus est, dissimulato qua usus sit analysi.* Ed

come infatti l'Anderson confessò aver trattate le sue ricerche, per le quali non però riporta le Analisi geometriche, che per tal ragione veggonsi talvolta stentate. Ma che che ne sia non può negarsi alle une e le altre una tal quale eleganza, che se a prima vista non appare al paragone di altre, ciò deriva dal modo di esporle, e dal vedervisi compiute le costruzioni, e non già ridotte a lemmi o ad altri problemi. E sì l'uno che l'altro vi riportarono i casi e le determinazioni, da che risultano pel I. libro i nove problemi, che secondo l' indicazione di Pappo dovevano comporlo, come si ha in fine de' lemmi, che questo Geometra ne recò per tali libri, dicendovi: *Primus liber Inclinationum habet problemata novem*; il che non combinando con ciò che ne aveva egli medesimo già detto nella prefazione al VII. libro delle Collezioni Matematiche, cioè: *In primo autem libro demonstratur problema de uno semicirculo et recta, quod quidem quatuor casus habet, ut et illud de circulo in duos casus divisum: atque etiam illud de rhombo, duos quoque casus habens*, convien supporre, che in questa indicazione avesse egli ridotti in un solo problema due de' casi del semicerchio e la retta, come poteva benissimo avvenire per quelli della retta tangente o pur no il semicerchio.

Nessuna ragione tenne il Ghetaldo de' lemmi riportati da Pappo come adoperati da Apollonio nelle sue soluzioni e determinazioni, nè tampoco, pel problema del rombo, di cui per altro dà ne' due casi una non dispregevole soluzione. L' Anderson poi stabilì per fondamento di sue ricerche tre lemmi, che non sono in effetto, che la costruzione geometrica delle equazioni del 2.° grado. Da ciò si vede, che nè il Ghetaldo, nè l' Anderson s' impegnarono a procedere sulle orme segnate da Pappo per le soluzioni Apolloniane, ma che semplicemente cercarono riuscire nell' intento di dar risoluti tutt' i problemi di quella famiglia. Nè essi avrebbero potuto a quello uniformarsi, ripetendo le loro soluzioni dall' Analisi algebrica.

---

il veder riportata dal Ghetaldo la sola analisi geometrica del problema XII tra XLII ch' egli ne risolve nell' opera *Variorum problemarum collectio*, conferma vieppiù il detto dell' Horsley.

Or erano scorsi ben 160 anni da che questi due Geometri avevan trattato tale argomento, quando un insigne geometra inglese uscito dalla Scuola del Newton, e forte coltivatore dell' Analisi degli antichi, Samuele Horsley, giudicando con più severità che non meritavano i lavori de' due suoi predecessori Ghetaldo ed Anderson, intraprese a restituire fondamentalmente i due libri perduti *delle Inclinazioni*, cercando approssimarsi il più possibile alla mente del Geometra greco. E messosi al lavoro, tenendo innanzi l' argomento di esso tratto da Pappo, ne diede con grandissima esattezza geometrica le soluzioni di tutt' i problemi indicativi, divisi ne' due libri e ne' loro casi, con le rispettive determinazioni da lui dette *Limiti*, tenendovi quella forma medesima, che altri Geometri connazionali avevano osservata in restituire altri libri del *Luogo Risoluto*, modellandosi a' due libri *de Sectione rationis* pur di Apollonio, rinvenuti in arabo, e dall' Halley trasportati in latino idioma, e pubblicati per le stampe di Oxford nel 1706 (1). E tanta fu nell' Horsley la tenacità in adempiere ad una restituzione fedele de' libri *delle Inclinazioni*, da fargli trasandare ancora l' elegante soluzione dell' Ugenio pel problema *del rombo*, dandone una di minor eleganza, sol perchè egli giudicava aver dovuto quella via tenere il Geometra di Perga, così esprimendosi nello scolio dopo i problemi 4° e 5° lib. I.: *Problematum duorum ultimorum constructiones expositae* (sono essi i due casi pel problema del rombo) *fallor ni Apollonii fuerint*; e continuando il ragionamento per convincere di tale identità. Ma non potendo poi resistere al paragone delle soluzioni di Eraclito tra gli antichi, e di Ugenio tra' moderni, chiuse tale scolio dicendo: *Problematum 4.i et 5.i constructiones a nostris diversas, sed concinnas ad modum Heracliti et Hugenii, praeterire nefas esset*, e le riporta compendiandole; senza aver

(1) L' Halley restituì con esattezza greca i due libri di Apollonio *de Sectione spatii*, e Roberto Simson del pari i due *Determinatae sectionis*, cui ne aggiunse due altri, ed i due *de Loca Plana*. Ed a questo sistema rigoroso di restituzione, usato solo nella Scuola inglese, modellossi l' Horsley.

tenuto affatto conto di quella del Ghetaldo, che pur non manca di una certa eleganza; e che ha il merito di essere stata la prima ad apparire di nuovo conio eseguita da Geometri moderni. Ma poichè nè questa, nè l'Ugeniana veggonsi corredate della corrispondente analisi geometrica, non credo fuori proposito l' esibirne quì quella elegantissima orditavi dal Fergola, compiendola.

Problema.

Inclinare pel vertice di un angolo di un dato rombo una retta, che arrestandosi tra' lati dell' angolo opposto, sia quanto una retta data.

Cas. 1.° Vogliasi primieramente applicarla nell'angolo esteriore DCG (fig. 2ª) del dato rombo AC, e che passi per l' angolo opposto A di tal figura, e ne pareggi la *rg*.

Analisi geometrica.

Sia RG una tal retta; e pe' tre punti R, C, G intendasi descritto il cerchio PGCR, che interseghi la diagonale AC del rombo in E; e dal punto medio P dell' arco RPG conducansi a' punti R, C, E, G le rette PR, PC, PE, PG. Saranno uguali i due angoli ECG, EPG, che sono nello stesso segmento ERPG, non meno che gli altri DCB, RPG, ciascun de' quali compie due retti col medesimo angolo RCG. Ma l'angolo DCB è duplo di BCA, o del suo uguale ECG. Dunque sarà benanche l' angolo RPG doppio di EPG. Cioè saranno uguali gli angoli GPK, RPK, come il sono per costruzione i lati che li comprendono; e però sarà GK=RK, e l'angolo PKG=PKA. Quindi sarà PE un diametro del cerchio descritto, e retto l' angolo PCE. Ciò posto, essendo equiangoli i due triangoli AKE, PCE, sarà AE : EK : : PE : EC; e quindi le due rette AE, EC avendo per differenza la data AC, ed essendo reciproche alle due date EK, PE, si potranno esibire.

Composizione geometrica.

Costr. Sulla data retta *rg* descrivasi il segmento circolare capiente l' angolo uguale al dato RCG, ed *eg* sia la corda

della metà dell'arco *reg*. Inoltre si trovino le due rette AE, CE reciproche alla *eg* ed aventi AC per differenza. Finalmente dal punto E s' inclini alla BG la EG uguale alla *eg*; sarà G il punto cercato.

Dimost. Se la retta che unisce il dato punto A col punto G di già ritrovato non abbia la sua parte RG uguale alla data *rg*, intendesi esserne un altro punto M della CG soddisfacente al problema, cioè la retta AM abbia la sua parte LM uguale alla *rg*. Ciò supposto intendesi descritto il cerchio pe' tre punti L, C, M, che dovrà segare la CE in un punto N diverso da E; poichè segandola in E sarebbe $\overline{EM}^2 = \overline{EG}^2$. Si dimostrerà col ragionamento addotto nell'analisi geometrica essere $ANC = \overline{eg}^2$, e con ciò ad AEC, lo che è un assurdo.

Cas. 2°. La retta da inclinarsi per A (fig. 3ª) sia ora la RAG, nell' angolo interiore del rombo.

La soluzione per questo caso è precisamente la medesima, che pel precedente: ciò non ostante ne esibirò la semplice

ANALISI GEOMETRICA.

Sia RAG la richiesta retta, e descritto il cerchio pe' punti R, C, G, che interseghi in E la diagonale CA del rombo; dal punto medio P dell' arco RPG si tirino a' punti C, R, E, G le rette PC, PR, PE, PG. Sarà l' angolo RCG = RPG, e l' angolo RCE = RPE; e però siccome RCG è doppio di RCE, così sarà RPG doppio di RPE, e l' arco RE uguale all' arco EG; e quindi EP sarà diametro del cerchio ECG, e perpendicolare alla RG. Laonde essendo simili i triangoli EAK, ECP, sarà EK : EA :: EC : EP; e le due rette EA, EC, che hanno per differenza la data AC, e sono reciproche alle due date EK, EP si potranno geometricamente esibire.

Ritornando ora alla restituzione dell' Horsley, dirò come avendo egli esaurita la materia del lib. I., dicendo: *Ad alia propero legitima indagine post Apollonium nemini hactenus aggressa*, per nulla contento del lavoro dell' Anderson, come poi il dichiara nell'ultima noterella in fine del II. libro, s' introduce

a questo col porre due lemmi, il primo desunto da Pappo, l' altro che è una proposizione semplicissima di dati, ch' egli enuncia in modo generale, limitandone poi la dimostrazione al caso di cui aveva bisogno. E dopo aver trattato il problema de' due semicerchi concentrici, per tutti i suoi casi, dovendo procedere oltre, di ben quattro altri lemmi ha bisogno, i primi tre de' quali, che divide in otto casi, esigono, al modo come egli li tratta, lunghe e complicate dimostrazioni. Sicchè per questa ragione principalmente, il suo lavoro, eseguito per altro con sommo rigore geometrico, riesce alquanto duro pe' nostri tempi, che lo più frequente uso de' metodi algebrico-geometrici ha deviata l' instituzione matematica del sistema che vi tennero gli antichi, e che nel risorgimento di queste scienze, e fino a tutto il secolo XVII serbò la Scuola Italiana, l' Olandese e l' Inglese. Ma poichè una favorevole contingenza, della quale dirò più appresso, ha dato luogo ad una elegantissima riduzione di tali lemmi, da che molto pregio acquista la restituzione dell' Horsley, ho creduto far cosa grata a' dotti coltivatori dell'antica Geometria di quì recarla. Tal riduzione contiensi nel seguente lemma problematico, e nel teorema di dati, che vien dopo.

Lemma problematico.

Nel lato PQ del dato angolo P (fig. 4ª) sia dato il punto A; si vuol ritrovarne un altro D, dal quale inclinata ad esso lato la retta DC, nel dato angolo P, e sino all' altro lato PR, risulti dato il rettangolo di AD in DC.

Soluzione.

Al punto A della PQ costituiscasi l' angolo PAB uguale al dato N, ed il rettangolo dato sia quello di AB in M; sarà AB : DC : : AD : M; e però PA : PD : : AD : M; e la AD sarà data (29 Elem. vi).

I lemmi dell' Horsley sono nel seguente modo enunciati:

Lem. III. Due rette comprendano uno spazio dato in un dato angolo; e l' una di esse accresciuta, o minorata di una

terza retta data, serbi all' altra ancor essa accresciuta o minorata della stessa terza retta una data ragione: saranno date le rette proposte.

Lem. IV. Due rette comprendano uno spazio dato in dato angolo, e tolta ciascuna di esse da una terza retta data, le differenze risultino in data ragione. Le rette proposte saranno date.

Lem. V. Due rette comprendano uno spazio dato in dato angolo; ed all' una di esse aggiunta o tolta una terza retta, la somma o la differenza serbi ragion data alla somma o differenza di quelle rette; ciascuna di queste sarà data. Or tutti essi, distinti ne' loro casi, possonsi comprendere nella seguente

Proposizione di Dati.

Due rette X, Y comprendano un dato spazio in un angolo dato; e per mezzo di una data retta M, che loro si aggiunga o si tolga abbia luogo una delle seguenti analogie:

Lem. III.	I.ª	$X + M : Y + M :: P : Q$
	II.ª	$X - M : Y - M :: P : Q$
	III.ª	$X + M : Y - M :: P : Q$
Lem. IV.	IV.ª	$M - X : M - Y :: P : Q$
Lem. V.	V.ª	$M + X : X + Y :: P : Q$
	VI.ª	$M + Y : X \sim Y :: P : Q$
	VII.ª	$M - X : X + Y :: P : Q$
	VIII.ª	$M - X : X - Y :: P : Q$.

Dico che le rette X, Y risulteranno date.

Dimost. Dalla retta M, nell' angolo dato, costituiscasi il rombo ABMC (fig. 5ª); e pel

Cas. 1°, il prolungamento AX del lato AC dinoti la X, quello AY del lato BA dinoti la Y, e compiasi la figura come si vede. Sarà data la ragione di MF ovvero ED : EM, nell' angolo dato E; e però il punto D si apparterrà ad una retta MD data di sito. Ed è similmente data la AX, ed in esse il punto A. Adunque la determinazione delle AX, XD (X, Y) dipenderà dal lemma precedente.

Cas. 2°. Fatto lo stesso apparecchio precedente, le X, Y sieno prese dal punto M, e però dinotate dalle MF, ME. Il ragionamento procederà analogamente; ed il punto dato invece di essere A, nella retta di sito AX, sarà M nella retta di sito MF.

Cas. 3.° Costruita la figura, le X, Y sieno dinotate dalle BF, BY; e però le X + M, Y — M vengano rappresentate dalle CX, CE; il punto D si apparterrà alla retta di sito CD; e le MF, MD risulteranno date pel lemma precedente.

Cas. 4.° Il rombo costruito sia ora EF, e le MB, MC rappresentino le X, Y, sarà data di sito la AD; ed è pur data la MF ed il punto M in essa. Quindi ancor questo caso vedesi ridotto al lemma.

Cas. 5.° Essendo data la ragione di X + M : X + Y, sarà data, convertendo, ancor quella di X + M : Y — M (*cas.* 3.).

Cas. 6.° Dall'esser data la ragione di M + Y : X — Y, sarà, componendo, data ancor l'altra di M + X : X — Y; e per equalità l'altra di M + X : M + Y, che è il caso 1.

Cas. 7.° Data la ragione di M — X : X + Y, sarà pur data quella di M + X : X + Y; ed il caso presente riducesi al 5.

Cas. 8.° Finalmente essendo data la ragione di M — X : X — Y, sarà, componendo, data ancor quella di M — Y : X — Y; e per equalità l'altra di M — X : M — Y, che è il caso 4.

Laonde in tutti i casi rimane dimostrato il proposto teorema.

Proseguendo le considerazioni su questo argomento, non debbo tralasciare di dire, come lo avesse illustrato il Fergola, nel suo elaboratissimo trattato, che prima conoscevasi in sua Scuola col titolo di *Arte Euristica*; del quale poi fu da me pubblicato il Prospetto nel 1809 col titolo di *Arte d'Inventare*; e che finalmente avendolo io rifatto, per la dispersione di talune parti di esso, ed accresciuto specialmente per ciò che riguardava i nuovi metodi algebrico-geometrici, e pubblicatane la parte I.ª intitolandola *dell' Invenzione geometrica*, nell' Appendice al III. libro vi recai per saggio delle opere del *Luogo Risoluto Piano* i principali problemi de' libri di esso, tra quali l'elegantissima soluzione del Fergola al problema de' due semi-

cerchi separati affatto tra loro, e l' uno fuori dell' altro, che credo a proposito di quì riportare, perchè si renda più nota.

Problema.

Dati di sito i due semicerchi AIC, DGB (fig. 6ª) co' loro diametri per dritto; condurre dall' estremo A del primo di essi diametri la segante AIG, e fare che l' interposta IH tra le due semicirconferenze sia data.

Analisi geometrica.

Dal centro O del secondo de' due semicerchi tirisi sulla segante AG la perpendicolare OP, che risulterà parallela alla corda CI nel primo semicerchio; e nel prolungamento della linea AB de' diametri, prendasi la BQ uguale alla CD distanza tra quelli; indi dal punto Q si tiri la QF perpendicolare alla stessa AG. Finalmente si faccia QA : AC :: IH : IK.

Ed essendo parallele le tre rette CI, OP, QF, sarà CO : OQ :: IP : PF; e quindi IP = PF; che però tolte da esse le uguali PH, PG, resterà IH = GF. Ciò premesso, alla ragione di QA : AC è uguale tanto quella di FA : AI, quanto l' altra di IH, IK. Adunque sarà QA : AC :: GA : KA :: GA × AH : KA × AH. Ma è dato il rettangolo GA × AH come uguale al dato BAD. Adunque sarà pur dato l' altro KA × AH. Ed essendo data la KH, sarà data ciascuna delle AK, AH. E quindi si farà noto il punto H.

Stava la cosa in questi termini, quando un antico allievo del Fergola, il Sig. Raffaele Minervini, che dopo aver ben fatti gli studi matematici, gli aveva per lungo tempo messi da banda, per attendere attivamente alla professione d' ingegnere, da lui con molto profitto esercitata, vi ritornava per compiere l' argomento del II. libro delle Inclinazioni, per nulla conoscendo quanto vi si era già fatto, e neppure, com' egli afferma, la precedente soluzione del Fergola, pubblicata fin dal 1842, ed alla quale la sua è identica, a meno di una semplicissima inversione, che la rende un poco meno elegante; e messosi al lavoro, e compiutene analogamente le soluzioni di tutti gli altri

casi, e le rispettive determinazioni, si affrettò a stamparle. Nel qual tempo avendone fatta parola col suo collega di professione F. R., della nostra Accademia di scienze, costui senza dirmene il motivo, richiesemi l' opera dell' Horsley, che mostrò al Minervini; e nel medesimo tempo avendola egli scorsa, gli venne da prima il pensiero di rifare le dimostrazioni di que' tre lemmi sopra una retta, imitando l' Horsley, e quasi a modo de' problemi *Determinatae sectionis*, co' quali quelli hanno una certa analogia. Ma visto il poco vantaggio che ne ritraeva, gli si risvegliò la felice idea, che una costruzione in figura potesse contribuire alla buona riuscita, di che conferitone meco, si ottenne il risultamento di sopra esposto, dal quale il lavoro dell' Horsley acquista non poca perfezione.

Per compimento di tutto il fin quì esposto, aggiugnerò, che il Fergola, universalizzando l'argomento *delle Inclinazioni*, che piacquegli dirlo piuttosto *delle Applicazioni*, ne fece il soggetto di sue ricerche, in diversi Opuscoli, che veggonsi tra quelli di sua Scuola, da me pubblicati nel 1811, mostrando ancora in essi in quali problemi possa ottenersene il risolvimento a modo de' *piani*, quantunque di loro natura *solidi*, *ipersolidi* o *lineari*; facendo così col fatto rilevare quale preponderanza abbia in taluni casi la Geometria pura su' metodi algebrico-geometrici. Ed a questo proposito non istimo superfluo, atteso il modo come veggo da più tempo procedere l' instituzione matematica, di chiuder questa mia disquisizione con inculcare alla gioventù che si avvia per l' invenzione geometrica di coltivare ogni qualunque metodo per essa; e però di estendersi con alacrità all' apprendimento ed all' uso de' metodi attivi e comodissimi, che offre la moderna Analisi; ma di non trascurare, come ora purtroppo n' è invalso il costume, quelli dell' antica Geometria, che oltre alla loro venustà, stampano tale impronta sicura ed indelebile nell' animo di chi li apprende, da potervi in ogni tempo ritornar sopra, e prevalersene con vantaggio. Di che un esempio evidentissimo ne offre il fatto del Minervini, il quale ha potuto, dopo il lungo periodo

di ben cinquant' anni, porsi di nuovo in cammino, compilando la restituzione di un argomento geometrico, non senza qualche precisione ed eleganza. A ciò aggiungo, che i geometrici problemi possonsi alle seguenti classi ridurre, cioè altri essere di *ragione*, comprendendo in questa quelli di tal natura precisamente, non che gli altri di *grandezza* e di *specie*, che a quelli di ragione si rimettono; ed a questi, per la natura de' loro dati, non v' ha dubbio che possasi co' metodi algebrico-geometrici vantaggiosamente riuscire. Altri sono di *genesi*; e per essi può con pari successo adoperarsi l' uno e l' altro metodo. Finalmente che per quelli di *sito* i metodi algebrici sono inefficaci, se non vengano da una convenevole preparazione geometrica ajutati. E però conviene, che il Geometra il cui scopo non è di dare di un problema geometrico una tal quale soluzione, ma la più elegante che può ottenersene, sappia a proposito adoperare l' un metodo o l' altro; e talvolta accoppiarli insieme. Nè debbo tacere, che ne' problemi trascendenti, ne' quali l' Analisi algebrica si dimostra impotente, è alla Geometria che può in qualche modo ricorrersi.

Fig. 2.

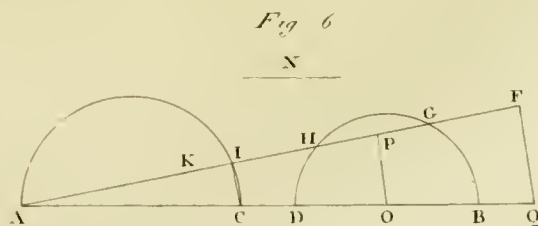
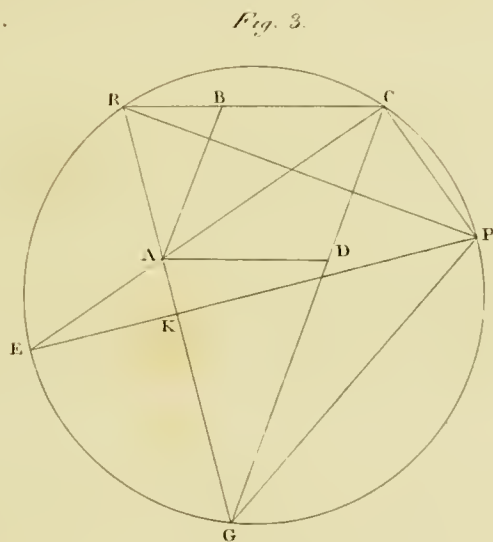
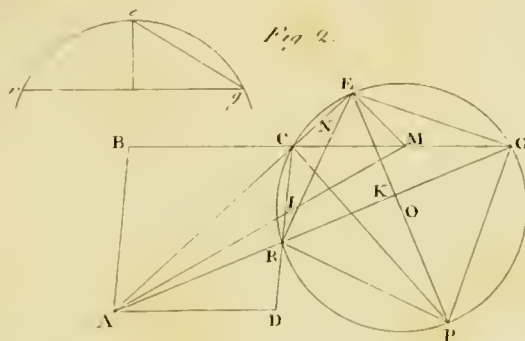
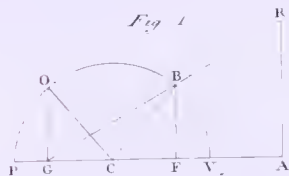
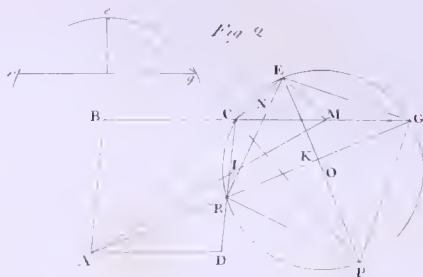
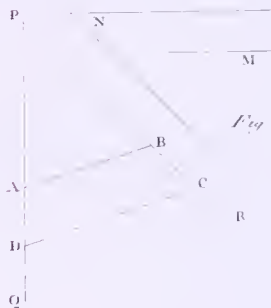
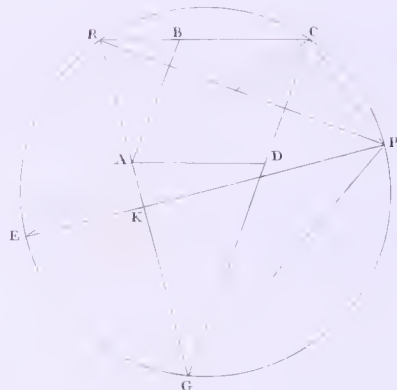
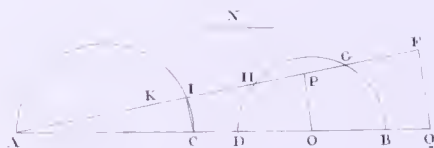
Fig. 3.

Fig. 6

N

G. Bruni inc.

Fig. 1
R
O
B
P
G
C
F
V
A
Fig. 2
c
f
g
E
N
B
C
M
G
I
K
O
R
A
D
P
Fig. 4
P
N
M
B
A
C
R
D
Q
Fig. 3
R
B
C
P
A
D
K
E
G
Fig. 5
F
B
X
M
A
C
D
T
E
Fig. 6
N
F
G
H
P
K
I
A
C
D
O
B
Q

G. Bruni inc.

SOPRA IL FENOMENO

CHE SI OSSERVA NELLE CALAMITE TEMPORARIE

DI NON CESSAR TOTALMENTE, NÈ QUASI TOTALMENTE, L'ATTRAZIONE FRA LA CALAMITA E L'ANCORA QUANDO, AL CESSAR DELLA CORRENTE NEL FILO CONDUTTORE AVVOLTO ALLA CALAMITA, SI CONSERVA L'ANCORA AD ESSA APPLICATA.

MEMORIA

DEL VICE-SEGRETARIO DOTTORE INGEGNERE

PIETRO DOMENICO MARIANINI

Presentata dal Socio Professore GIOVANNI BRIGNOLI DE BRUNNHOFF, *ed approvata dal Socio Cavaliere Professore* GIUSEPPE BELLI

Ricevuta il 5 *Luglio* 1850.

1. Col mezzo di un elettromotore voltaico di una coppia alla Wollaston ho prodotto una corrente elettrica nel filo metallico di una calamita temporaria a ferro da cavallo di forma ordinaria e collocata in modo opportuno ad esplorarne la forza attrattiva. Applicatavi l' ancora, trovai coi mezzi ordinarj che la forza di attrazione era di chilogrammi 24 circa. Tolta poscia la corrente e riapplicata l'ancora, trovai che la forza attrattiva era di soli 6 decagrammi, e, dopo alcuni successivi staccamenti dell' ancora dalla calamita, la forza suddetta era di soli due decagrammi; nè per nuovi staccamenti seguitò a sensibilmente diminuire (1).

(1) Il diametro delle sezioni circolari di questa calamita è di 3 centimetri; la lunghezza della linea luogo dei centri delle sezioni suddette è di centimetri 43,5; le facce ove nascono i poli sono piane; l' ancora da quella banda da cui si applica alla calamita presenta una superficie cilindrica convessa.

Produssi di nuovo col suddetto elettromotore la corrente nel filo della medesima calamita temporaria; vi applicai l' ancora, e poscia feci cessare la corrente lasciando l' ancora applicata (mentre nella precedente sperienza la corrente cessò quando l' ancora era dalla calamita lontana). Subito dopo esplorai la forza di attrazione, e la trovai di chilogrammi 7,4. (Riapplicata l' ancora dopo lo staccamento, la forza attrattiva si trovò di chil. 0,6). Ripetei più volte questa esperienza, colla sola differenza di esplorare la forza attrattiva non subito dopo di aver tolta la corrente lasciando l' ancora applicata, ma dopo un intervallo più o meno lungo di tempo, per esempio di due e fin di tre mesi, durante il quale non veniva giammai cambiata la posizione dell' ancora rispetto alla calamita; e trovai sempre la forza attrattiva fra i 7 e gli 8 chilogrammi.

Pertanto si può conchiudere che se cessa la corrente voltaica nel filo metallico di una calamita temporaria mentre vi è applicata l' ancora, non cessa totalmente nè quasi totalmente l' attrazione fra la calamita e l' ancora, ma ne rimane una porzione notabile, la quale si conserva per quanto appare inalterata finchè non viene rimosso o variato il contatto fra l' ancora ed i poli della calamita.

Ho anche osservato che se, dopo di aver tolta la corrente lasciando l' ancora applicata, si diminuisca la estensione del contatto fra l' ancora ed i poli della calamita collo strisciare quella su questi od altrimenti, benchè poscia si riconduca l' ancora alla sua prima posizione, la forza attrattiva si trova diminuita.

2. Ho poi applicata una carta sottile ai poli della calamita temporaria suddetta in modo che, applicandovi il grimaldello, rimaneva una piccola distanza fra esso ed i poli della calamita;

La piastra di zinco dell' elettromotore suddetto era amalgamata, e la superficie di essa, che immergevasi nel liquido, era circa di due decimetri quadrati. Avverto ancora che dopo ciascuna esperienza io asciugava la piastra di zinco e la amalgamava di nuovo se occorreva; procurava altresì che l' acqua acida avesse sempre la stessa attività; onde in ogni esperienza l' elettromotore aveva presso a poco la medesima forza.

ed in tal circostanza vidi che la forza attrattiva, mentre passava pel filo metallico della calamita la corrente prodotta dal medesimo elettromotore, era circa di chil. 9, e quella, che rimaneva dopo di aver tolta la corrente senza staccare il grimaldello, era circa di chil. 1, 3, ma stabile finchè non veniva cambiata la posizione del grimaldello rispetto ai poli della calamita. Adunque, acciò abbia luogo il fenomeno precedentemente descritto, non è necessario il contatto fra l'ancora e la calamita.

3. Vedendo che il rapporto della forza attrattiva, che si manifesta dopo di aver fatta cessare la corrente nel filo della calamita temporaria lasciando l' ancora ad essa applicata, a quella, che si manifesta mentre in esso filo vi è la corrente, è più grande quando il grimaldello si applica a contatto immediato coi poli che quando vi si applica a qualche distanza $\left(\text{giacchè } \frac{7,4}{24} > \frac{1,3}{9}\right)$, sospettai che il detto rapporto fosse per riuscire anche maggiore, e perciò l' esperimento più conspicuo, ove si facesse uso di una calamita temporaria e di un' ancora tali che, essendo questa opportunamente a quella applicata, i due contatti fra l' ancora ed i poli della calamita riuscissero, proporzionatamente alle dimensioni di questa, più estesi che gli analoghi contatti fra la calamita e l'ancora usate precedentemente.

Ho fatto perciò costruire una calamita temporaria a ferro da cavallo, le gambe del quale sono due cilindri retti ed eguali, avente ciascuno per base una figura composta di un rettangolo e de' due semicerchj costruiti sui due lati minori di esso, ed esse gambe sono poste in guisa che le due basi riescono in un medesimo piano, rispetto al quale le gambe stesse sono situate dalla medesima banda, e la retta, che unisce i centri di esse basi, riesce perpendicolare ai lati maggiori di essi rettangoli. La parte media, che unisce fra loro le gambe del ferro da cavallo suddetto, è incurvata a semicerchio e di forma congrua a quella delle gambe stesse. L' ancora poi ha la stessa

forma che il ferro della calamita. Quelle facce di questa calamita, nelle quali nascer devono i poli, e le corrispondenti dell'ancora sono diligentemente spianate affinchè, quando l'ancora è applicata alla calamita, il contatto reciproco riesca assai esteso. La foggia di questa calamita diversa da quella delle ordinarie fu scelta coll'intendimento di rendere più agevole il possibilmente esatto appianamento delle facce suddette (1).

Ripetendo su tale calamita le due sperienze nel primo paragrafo descritte, trovai che, mentre il filo era invaso dalla corrente, la forza attrattiva era di chil. 78 circa; e che, dopo di aver tolta la corrente, lasciando però applicata l'ancora, l'attrazione era circa di chil. 37. Quì adunque il rapporto della forza attrattiva, che si manifesta dopo di aver tolta la corrente senza staccar l'ancora, a quella, che si manifesta durante il circuito elettrico, è maggiore che nelle sperienze precedenti.

Accennerò ancora che (avendo poi l'ancora ricevuto un urto accidentale, il quale ne ammaccò alcun poco le facce appianate così che, quando essa veniva alla calamita applicata, il contatto reciproco non era più così esteso come prima, e l'ancora tuttavia non barcolava) ripetute le due medesime sperienze, trovai che, durante il circuito elettrico, la forza attrattiva era di chil. 25, e che, dopo di aver tolta la corrente senza staccare l'ancora, la forza attrattiva era di chil. 8. Ma rinnovato l'appianamento ebbi ancora i risultati di prima.

Dunque lo aumentare la estensione dei due contatti fra l'ancora ed i poli della calamita influisce ad ingrandire il rapporto della forza attrattiva, che si manifesta dopo di aver tolta la corrente mantenendo l'ancora applicata, a quella, che si manifesta durante il circuito elettrico.

4. Vedendo che, dopo cessata la corrente, rimane una porzione notabile di forza attrattiva fra la calamita temporaria

(1) La lunghezza delle facce di questa calamita, nelle quali nascono i poli, è di centimetri 8,4, la larghezza di 1,35; e la lunghezza della linea luogo dei centri di quelle sezioni piane di essa calamita, le quali sono eguali alle facce suddette, è di centimetri 17,5. Essa è avvolta da 68 giri di filo della grossezza di un millimetro e un quarto.

e l' ancora, non solo se l' ancora siasi conservata a contatto coi poli della calamita, ma anche se siasi conservata ad una piccola distanza da essi; ho pensato di imitare, in certo modo, col ferro dolce le calamite stabili d' acciajo. Feci costruire una calamita temporaria, il cui ferro ha le gambe foggiate e reciprocamente poste come quello della calamita descritta al paragrafo precedente: ma la parte media, che unisce fra loro le gambe, è piatta, ed il filo di rame, pel quale deve passare la corrente, ne avvolge soltanto le gambe, e ciò allo scopo di potere più agevolmente con apposito congegno, che feci costruire, collocare essa calamita in tali circostanze che, allo staccamento del grimaldello, esso si discosti dai poli della calamita sol di quel poco che si desidera. L' ancora è foggiata in guisa che, venendo convenientemente applicata alla calamita, essa ne tocca le facce ove nascono i poli secondo due striscie, che occupano tutta la lunghezza di esse facce (1).

Disposte le cose in guisa che allo staccamento dell'ancora, questa si scostasse dai poli della calamita solo di un diecimillimetro circa, ho prodotto col solito elettromotore la corrente nel filo, e poi la ho tolta essendo applicata l' ancora. La forza d' attrazione fra l' ancora e la calamita fu di chil. 35. Riapplicai l' ancora dopo lo staccamento e disposi le cose in guisa che, staccandosi essa dalla calamita, non le si discostasse che di mezzo diecimillimetro circa, e così le mantenni per tutte le successive sperienze a fine di esser certo che l' ancora non andasse mai distante dalla calamita più di quello che andò dopo il primo staccamento. Sperimentata la forza di attrazione, la trovai di chil. 10, 19. Sperimentata poi per più volte, i risultati furono fra i 9, 89 ed i 10, 27 chilogrammi. Nei giorni successivi sperimentai molte volte la forza attrattiva di questa calamita, ed avvennero per conseguenza molti staccamenti

(1) Il ferro di questa calamita temporaria pesa chil. 4, 75; l' ancora pesa chil. 1, 39. La lunghezza delle facce ove nascono i poli è di centimetri 13, 1, la larghezza di cent. 1, 8. Il filo avvolto alle gambe è della grossezza di millimetri 1, 25 e forma 55 giri su ciascuna.

dell' ancora. Dopo dieci giorni da che fu impresso il magnetismo, la forza attrattiva oscillava fra i chil. 8, 98 ed i 9, 41. Lasciata poi l' ancora applicata per 26 giorni, trovai la forza attrattiva di chil. 9, 42; e provata ancora molte volte, la trovai sempre superiore agli 8, 98 chilogrammi. Dopo 36 giorni, nei quali lasciai sempre l' ancora a contatto coi poli della calamita trovai l' attrazione di chil. 10, 01. Riapplicata dopo lo staccamento trovai l' attrazione di chil. 9, 26; ed una terza volta la trovai di chil. 9, 82.

Ho poi allontanata l' ancora dai poli della calamita, fino alla distanza di 8 diecimillimetri, e, riapplicata, l' attrazione fu di chil. 3, 06.

Allontanata finalmente di molto l' ancora dalla calamita, e poi riapplicata, l' attrazione fu di chil. 1, 95.

5. Ora, volendo io passare ad esporre il modo con cui soglio rendermi ragione del fenomeno, che si osserva negli esperimenti descritti precedentemente, gioverà registrare dapprima le due seguenti sperienze, ed alcune considerazioni su di esse.

1.ª Ho presi venti cilindretti di ferro dolce fra loro eguali della lunghezza di centimetri 8, 2 e ciascuno del peso di grammi 1, 27. Essi erano privi di polarità, ed anco di magnetismo dissimulato (1). Magnetizzatone uno, ne esplorai poscia la forza col magnetometro; indi formai di tutti un fascio, ed, estratto poscia il suddetto, ne esplorai nuovamente la forza, e trovai che essa era circa la stessa.

2.ª Magnetizzai similmente tutti gli altri, tenendoli dopo la magnetizzazione fra loro separati. Esplorai con esso magnetometro anche la forza di ciascuno di questi, e, lasciato trascorrere un intervallo di più di sette ore, esplorai di nuovo la forza di ciascuno dei venti cilindretti, nè la trovai sensibilmente diminuita. Poi li unii tutti formandone un fascio in

(1) Veggasi la Memoria sul magnetismo dissimulato ecc. del Cav. Stefano Marianini nel Tomo XXIII delle Memorie della Società Italiana delle Scienze.

guisa che tutti i poli *nord* fossero da una banda, e per conseguenza tutti i *sud* dall' altra. Separati di nuovo fra loro, trovai col mezzo dello stesso magnetometro che la forza di ciascuno era notabilmente diminuita. Le deviazioni, che essi producevano nell' ago del magnetometro prima di essere stati uniti in fascio, erano fra i 30° ed i 43°; quelle, che producevano dopo, erano fra i 13° ed i 22° (1).

Questa diminuzione di forza magnetica, a motivo della prima di queste sperienze, non può attribuirsi ai piccoli urti e sfregamenti, che i cilindretti soffrirono nell' unirli in fascio; nè può giudicarsi effetto del tempo trascorso fra le due ultime esplorazioni della loro forza magnetica, poichè il tempo assai più lungo, che lasciai trascorrere fra la prima e la seconda esplorazione, non aveva prodotto in essi diminuzione sensibile di forza; conviene adunque attribuirla ad una magnetizzazione contraria (2), che ciascuno soffrì dall' insieme di tutti gli altri.

Ora è manifesto che se, uniti in fascio i suddetti ferri, essi, per ipotesi, non si fossero magnetizzati reciprocamente in senso contrario, il fascio stesso avrebbe avuto una forza magnetica maggiore di quella che realmente aveva.

È poi noto che, se due cilindri o prismi, aventi le basi egualmente o quasi egualmente oblunghe, di ferro dolce della stessa qualità e di egual grado di crudezza, hanno eguali lunghezze, il più sottile può conservare una forza magnetica avente col suo peso rapporto maggiore di quello, che col peso del men sottile ha la forza magnetica che questo può conservare. Due fili di ferro dolce della lunghezza di un decimetro e del diametro di due diecimillimetri, purchè si preservino da

(1) Questa esperienza è in sostanza una ripetizione di un' esperienza del Coulomb; e le considerazioni che seguono su di essa, se non sono nuove, sono rettificate secondo la teoria del magnetismo dissimulato. Veggasi la succitata Memoria.

(2) Dissi *magnetizzazione contraria* e non *smagnetizzazione*, poichè allorquando col mezzo di una calamita si toglie la polarità ad un ferro, il magnetismo in esso non è distrutto, ma, almeno in parte, dissimulato da magnetismo impresso in senso contrario. Veggasi la citata Memoria sul magnetismo dissimulato.

urti anche piccoli, dalle torsioni ecc., ponno conservare tal forza magnetica che, unendo il polo *nord* dell' uno col *sud* dell' altro, vi sia fra loro un' adesione maggiore del triplo del peso di uno di essi.

Se adunque si formasse un fascio con un grande numero di sottilissimi fili di ferro dolce tutti fortemente magnetizzati nello stesso senso, ammesso per ipotesi che questi nel formare il fascio non si magnetizzino reciprocamente in senso contrario, è manifesto che il fascio avrebbe una grande forza magnetica. Ed il rimanere nel fascio soltanto una tenue forza, come realmente accadrebbe, dovrà attribuirsi alle contrarie magnetizzazioni reciproche, che avrebbero luogo nei fili suddetti.

Ora se si considera un ferro come composto da un ammasso di sottilissimi fili (supposto che esso venga magnetizzato in guisa che nascano i poli in que' due tratti della sua superficie ne' quali terminano i fili suddetti) è ragionevole l' ammettere (come farò) che, ove cessi la causa magnetizzante, i fili suddetti si magnetizzeranno reciprocamente in senso contrario; e che a questo reciproco magnetizzarsi in senso contrario di tali fili dovrà attribuirsi, almeno in gran parte, la grande diminuzione di forza magnetica che accadrà nel ferro suddetto.

E quì si noti che, siccome il fenomeno, che si osserva nella precedente sperienza, avrebbe luogo anche se i cilindretti fossero d' acciajo di qualunque qualità e tempra, e siccome anche i cilindri o prismi d' acciajo di data lunghezza, qualità e tempra ponno conservare più forza magnetica in proporzione del loro peso se sono più sottili, ne viene similmente di conseguenza esser ragionevole l'ammettere per l'acciajo ciò che ho ammesso poc' anzi pel ferro dolce.

6. Immaginiamo ora di aver presente una calamita temporaria a ferro da cavallo, e, per semplicità, avente in un medesimo piano le facce ove nascono i poli. Quando dirò che l' ancora è ad essa *applicata a contatto* o semplicemente *applicata*, sempre intenderò che lo sia in una medesima guisa

ed a contatto immediato coi poli. E quando dirò che l'ancora è ad essa *applicata ad una piccola distanza*, intenderò che sia applicata alla detta distanza dai poli, e come se dopo messa a contatto si fosse allontanata dalla calamita con moto perpendicolare alle facce di questa nelle quali formansi i poli.

Il ferro di questa calamita temporaria lo immaginerò composto da un ammasso di fili conformati in modo da occupare coi loro estremi quelle porzioni dei poli, nelle quali la calamita è a contatto coll'ancora quando questa è a quella applicata.

Per ciò che si è detto al paragrafo precedente si può ritenere che, se la grossezza de' fili suddetti non eccedesse una certa misura, ciascuno di essi, quando per ipotesi fosse separato dagli altri e gli venisse impresso quel medesimo stato magnetico che assume quando passa la corrente nell'elica della calamita temporaria, conserverebbe o in tutto od almeno in parte notabile il detto stato magnetico anche dopo cessata la causa, che glielo ha impresso. Siccome i suddetti fili, dall' insieme de' quali immagino composto il ferro della calamita, ponno essere sottili quanto piace, così riterrò che la loro grossezza non ecceda la misura suddetta.

Considererò anche l' ancora come risultante da un ammasso di fili analogamente sottili, che co' loro estremi occupino quelle porzioni della superficie dell' ancora, nelle quali essa è a contatto colla calamita quando è a questa applicata.

Ritenuto tutto ciò, le grossezze, le forme e le posizioni de' fili, de' quali considero composte la calamita e l' ancora, sono ancora abbastanza indeterminate da poterle ritenere, come farò, tali che il numero de' fili, di cui considero composta l' ancora, eguagli quello dei fili, di cui considero composta la calamita, e che quando quella è a questa applicata, gli estremi di ciascuno de' fili, di cui quella è composta, si adattino esattamente cogli estremi di un rispettivo filo di quelli, che compongono la calamita.

Ora la grande diminuzione di forza magnetica, che accade nella calamita temporaria nel caso che cessi la corrente nella

sua elica, e l' ancora o sia lontana ovvero venga allontanata da essa, deve attribuirsi almeno in gran parte alle contrarie reciproche magnetizzazioni che hanno effetto tra i fili di cui considero composta la calamita stessa (paragrafo precedente). Così pure la grande diminuzione di forza magnetica, che accade nell' ancora nel caso che dalla calamita venga allontanata cessando o no la corrente, deve attribuirsi almeno in gran parte alle contrarie magnetizzazioni reciproche de' fili di cui considero composta l' ancora stessa.

Ora, ove cessi la corrente nella spira e l' ancora si conservi alla calamita applicata o a contatto od a piccola distanza, avranno effetto tra i fili componenti la calamita delle contrarie reciproche magnetizzazioni minori che nel caso in cui cessasse la corrente e l' ancora venisse allontanata dalla calamita o fosse già da essa lontana; e tra i fili componenti l' ancora delle contrarie magnetizzazioni minori che nel caso in cui essa venisse allontanata dalla calamita cessando o no la corrente. Ciò si appoggia al fatto noto che, allorquando ai poli di una calamita qualunque sono applicati o a contatto o a piccola distanza i poli, ad essi rispettivamente amici, di un altra, la forza magnetizzante di essa è diminuita; poichè: quando al togliere la corrente si conserva l' ancora applicata a contatto alla calamita temporaria, tutti i fili di cui questa è composta, i quali sono calamite, hanno applicati ai loro poli i poli ad essi rispettivamente amici di altrettante calamite, le quali sono i fili di cui l' ancora è composta, onde le loro forze magnetizzanti riesciranno diminuite; ed in analoghe circostanze trovansi i fili di cui considero composta l' ancora: e, quando al cessare della corrente si conserva l' ancora alla calamita applicata a piccola distanza, tutti i fili di cui considero composta la calamita temporaria hanno ai loro poli applicati, non a contatto, ma a piccola distanza, i poli ad essi rispettivamente amici dei corrispondenti fili i quali costituiscono l' ancora, onde le forze magnetizzanti di que' fili riusciranno pure diminuite; ed in circostanze analoghe trovansi i fili costituenti l' ancora.

Poichè adunque, nel caso in cui cessi la corrente nell' elica e si conservi il grimaldello alla calamita applicato o a contatto od a piccola distanza, hanno effetto tra i fili componenti la calamita delle contrarie reciproche magnetizzazioni minori che qualora cessi la corrente e l' ancora venga allontanata dalla calamita o si trovi già da essa lontana, e tra i fili componenti l' ancora hanno luogo delle contrarie magnetizzazioni minori che quando questa venga allontanata dalla calamita cessando o no la corrente; è manifesto che in quel caso dovrà rimanere: nella calamita una forza magnetica maggiore di quella che vi rimane nel caso che cessi la corrente e l' ancora o sia lontana ovvero venga allontanata dalla calamita: nell' ancora una forza magnetica maggiore di quella che vi rimane nel caso che venga dalla calamita allontanata, cessando o no la corrente.

Dunque nel caso che cessi la corrente e l' ancora si conservi applicata alla calamita, o a contatto o ad una piccola distanza, rimarrà fra la calamita e l' ancora un' adesione maggiore di quella che fra esse avrà luogo nel caso che, essendo cessata la corrente ed essendo l' ancora dalla calamita lontana, venga quella a questa applicata o a contatto o a quella piccola distanza rispettivamente (1).

---

(1) Qualora si separino le calamite formanti un magazzino magnetico, e magnetizzandole si aumenti la forza di ciascuna, indi si riuniscano a formare il magazzino, accadrà in esse ciò che accade nei fili, di cui considerai formata la calamita temporaria, quando cessa la corrente senza essere applicata l' ancora; vale a dire ciascuna di esse subirà dall' insieme delle altre una magnetizzazione contraria.

Se poi, dopo di avere un' altra volta separate le suddette calamite, con nuove magnetizzazioni si riducano ad avere presso a poco quel grado di forza permanente, che gli si era impresso colle precedenti magnetizzazioni, indi ai poli di esse si applichino a guisa di grimaldelli de' ferri, e poscia (lasciando così applicati questi ferri) si componga il magazzino; poichè i detti ferri sono calamite, che coi loro poli toccano i poli ad essi rispettivamente amici delle calamite cui sono applicati, accadrà manifestamente per queste ciò che accade pei fili, di cui immaginai composta la calamita temporaria, quando cessa la corrente voltaica e l' ancora si conserva applicata; vale a dire la

7. Quella contraria magnetizzazione reciproca, la quale, ove cessi la corrente nell' elica e l' ancora si conservi alla calamita applicata, ha effetto tra i fili componenti la calamita e tra quelli componenti l' ancora, non è improbabile che abbia effetto non soltanto in un tempo brevissimo succedente alla cessazione della corrente, ma anche in seguito. Se avesse effetto soltanto in un tempo brevissimo succedente alla cessazione della corrente, è manifesto che quella forza attrattiva, che rimane, si conserverebbe inalterata. Se ha effetto anche in seguito, la forza attrattiva, che rimane, andrà successivamente diminuendo. Ma in quella guisa che, allorquando con una calamità si va magnetizzando un ferro od acciajo, in esso cresce assai la forza magnetica in principio della magnetizzazione, e va poi successivamente crescendo con minore intensità in guisa che, poco dopo il principio della operazione

---

contraria magnetizzazione reciproca fra le singole calamite riuscirà minore che quando si opera nel primo modo.

Ora ecco come possa sui magazzini magnetici eseguirsi un' esperienza, che ha somiglianza con quella che forma il principale soggetto di questa Memoria.

Se dopo di avere fortemente magnetizzate ad una ad una le calamite di un magazzino, si applicherà alla maggiore di esse l' ancora del magazzino stesso, ed alle altre de' ferri come nella sperienza testè descritta, e poi si comporrà il magazzino, indi si toglieranno tutti i ferri applicati alle calamite secondarie, lasciando applicata l' ancora alla maggiore; le contrarie magnetizzazioni, che si saranno effettuate fra le calamite componenti, saranno minori di quelle che si sarebbero effettuate ove si fosse allontanata anche l' ancora; onde fra l' ancora ed i poli del magazzino vi sarà un' adesione maggiore di quella, che si troverebbe qualora, essendo stata rimossa anche l' ancora, venisse di nuovo applicata.

Tutto ciò viene confermato dal fatto. Separate le sette calamite, che formavano un magazzino magnetico che reggeva chil. 9, trovai che esse reggevano rispettivamente

chil. 0, 33; 0, 77; 0, 66; 1, 44; 0, 77; 0, 75; 0, 11.

Le magnetizzai una ad una strisciandone simultaneamente le gambe sui poli di una calamita temporaria; e con ciò acquistarono tal forza permanente da reggere rispettivamente

chil. 1, 55; 2, 01; 2, 1; 3, 45; 1, 89; 1, 98; 0, 34.

Indi alla calamita principale applicai l' ancora del magazzino ed alle altre applicai a guisa di grimaldelli de' cilindretti di ferro poco più sottili delle rispettive calamite.

magnetizzante, li successivi aumenti di forza sono piccolissimi, ed in seguito insensibili; così è naturale che, ove la contraria magnetizzazione reciproca de' fili abbia continuamente un qualche effetto, cioè produca in essi una continua diminuzione di forza magnetica, questa diminuzione andrà tuttavia continuamente scemando ed in guisa che poco dopo il suo principio diverrà piccolissima ed in seguito insensibile; molto più che quì la causa magnetizzante va continuamente scemando. Da ciò si fa manifesto che la forza magnetica, che rimane nella calamita e nell' ancora quando cessa la corrente e l' ancora si mantiene applicata alla calamita, deve (trascorso che sia un brevissimo tempo) conservarsi inalterata o pressochè inalterata.

8. Osservo quì che: siccome le forze magnetizzanti di due calamite, di forze e grossezze poco diverse, riescono molto diminuite quando l'una di esse sia posta coi poli a contatto dei

---

Avendo poscia ricomposto il magazzino e decomposto di nuovo, trovai che le singole calamite non avevano scemata sensibilmente la loro forza.

Applicata di nuovo l' ancora del magazzino alla calamita principale, ed alle altre i cilindretti, come sopra, io composi ancora il magazzino, e poi rimossi i cilindretti, lasciando soltanto applicata l'ancora del magazzino. Esplorai poscia la forza di attrazione fra l' ancora ed il magazzino, e la trovai di chil. 14, 36. Riapplicata poscia l' ancora ai poli del magazzino, esso non resse che chil. 10, 4 abbandonando l' ancora all' aggiunta di un ectogrammo. Applicata ancora l' ancora, ebbi lo stesso risultato; e ripetuta questa operazione una terza volta, il magazzino non potè reggere chil. 10, 4, ma soli 10, 3.

Decomposto dopo tutto ciò il magazzino, trovai che le calamite componenti reggevano ordinatamente

chil. 0, 45; 1, 22; 1, 1; 1, 89; 1, 12; 1, 11; 0, 25.

Magnetizzai poscia di nuovo nel modo suindicato una ad una le sette calamite componenti; con che acquistarono presso a poco le forze, che avevano dopo la magnetizzazione precedente. Indi applicai l' ancora alla calamita principale, ed alle altre i soliti cilindretti: ricomposi il magazzino, e poi ho rimossi i cilindretti, ed anche l' ancora strisciandola sui poli della calamita principale. Riapplicata questa, trovai che l' attrazione fra essa ed il magazzino era di chil. 10, 6.

Egli è riflettendo su tali esperienze, nelle quali m' imbattei cercando di rinforzare il magazzino suddetto, che mi si offerse alla mente la suesposta spiegazione del fenomeno, che forma l' argomento di questa Memoria.

poli ad essi amici dell' altra e i due contatti sieno estesi per due superficie non troppo piccole rispetto alle grossezze delle calamite stesse; così la magnetizzazione contraria, che ha luogo tra i fili componenti la calamita temporaria ove cessi la corrente ed il grimaldello si conservi applicato a contatto coi poli della calamita ed esso sia tale da toccare i poli stessi in due superficie molto estese, deve essere molto minore che la contraria magnetizzazione che ha luogo ove cessi la corrente mentre l' ancora non è applicata. Analogamente può dirsi rispetto ai fili componenti l' ancora. Dalle quali cose resta spiegato come la forza magnetica, che rimane nella calamita e nell' ancora quando cessa la corrente e l' ancora si conserva alla calamita applicata ed i contatti fra l' ancora ed i poli della calamita sono molto estesi, superi di molto quella, che rimane ove cessi la corrente e l' ancora venga allontanata dalla calamita o sia già lontana da essa.

Osservo pure che: siccome, quando di due calamite l' una è applicata co' suoi poli a contatto de' poli ad essi rispettivamente amici dell' altra, le loro forze magnetizzanti riescono diminuite di più se i due contatti sono più estesi; così è chiaro che a diminuire la contraria magnetizzazione reciproca, e de' fili componenti la calamita temporaria, e di quelli componenti l' ancora, influirà l' ampiezza dei due contatti fra questa ed i poli di quella; giacchè quando sono più ampii questi contatti, sono più ampii anche i contatti fra gli estremi dei singoli fili componenti la calamita e gli estremi dei rispettivi fili componenti l' ancora. Dal che si fa manifesto che il fenomeno di cui si tratta deve riuscire più conspicuo quando, pari essendo le altre circostanze, i contatti fra l' ancora ed i poli della calamita sieno più estesi; il che concorda colle sperienze del paragrafo 3.

Così pure dall' essere le forze magnetizzanti di due calamite diminuite meno quando i poli dell' una sono situati di fronte ai poli rispettivamente amici dell' altra, ma ad una piccola distanza da essi, che quando lo sono a contatto immediato,

si fa manifesto che il fenomeno stesso deve essere meno conspicuo se si conservi l' ancora applicata alla calamita ad una piccola distanza, che se la si conservi applicata a contatto; e ciò concorda colla sperienza del paragrafo 2.

9. Ora cade in acconcio di dare una facile spiegazione del seguente noto fenomeno.

« Allorquando, messa in attività, con un elettromotore a forza decrescente, una calamita temporaria a ferro da cavallo onde sperimentarne la forza, lo staccamento dell' ancora accade dopo qualche tempo; se poi, senza mai interrompere il circuito elettrico, si applica di nuovo l' ancora, anche subito dopo lo staccamento, si trova che la calamita non può reggere che un peso notabilmente minore di quello che aveva retto prima. »

Rivolgo, per semplicità, il discorso sulla calamita temporaria che intendevamo aver presente nei tre precedenti paragrafi. Fingiamo prodotta una corrente voltaica decrescente nella sua elica e che l' ancora si tenga lontana dalla calamita. La forza magnetica di questa andrà continuamente scemando; ed il continuo scemare di questa forza deve attribuirsi almeno in gran parte alle successive contrarie magnetizzazioni reciproche de' fili costituenti la calamita, alle quali dà luogo il continuo decrescere della corrente.

Ma quando, prodotta essendo la corrente nell' elica, si conservi l' ancora alla calamita applicata, le contrarie magnetizzazioni suddette vengono in parte impedite; laonde in tal caso la forza della calamita temporaria dovrà scemare con meno celerità. Se poi, dopo qualche tempo che è prodotta la corrente nella spira della calamita temporaria e che vi si lascia l' ancora applicata, venga questa rimossa, è manifesto che verranno a compiersi le contrarie magnetizzazioni suddette, le quali erano in parte impedite dall' applicazione dell' ancora; oltre che i fili componenti l' ancora si ridurranno reciprocamente a pochissima forza magnetica: laonde diminuirà la forza magnetica nella calamita e nell' ancora. Pertanto se anche subito dopo si applicherà nuovamente questa a quella, la forza di

attrazione dovrà essere minore di quella che vi era anche un sol momento prima dell'allontanamento dell'ancora dalla calamita.

10. Cogli stessi ragionamenti fatti ne' paragrafi 6 e 9 può dedursi che, se in due ferri (de' quali l'uno abbia le sue estremità a contatto con quelle dell' altro o molto vicine ad esse) venga impresso da una causa qualunque del magnetismo in guisa che i poli dell' uno riescano a contatto o vicini rispettivamente ai poli ad essi amici dell' altro; al cessare od al diminuire la causa magnetizzante, il magnetismo in essi diminuirà meno che se, nei due medesimi ferri mantenuti invece fra loro lontani, venisse impresso quel medesimo stato magnetico, e quindi cessasse o similmente diminuisse la causa magnetizzante. Ed in questa circostanza, se venga diminuita la causa magnetizzante, i ferri stessi conserveranno forza magnetica maggiore di quella che acquistata avrebbero se la causa magnetizzante fosse stata così diminuita fin dal principio della sua azione.

Così pure con ragionamenti analoghi ai testè citati può dedursi che, essendo applicato un ferro ai poli di una calamita a guisa di grimaldello, se si avvicinino ai poli di essa i poli di un' altra, il nord al sud ed il sud al nord, in quel ferro diminuirà bensì la polarità; ma se ne conserverà più di quella che esso acquisterebbe se venisse applicato alla calamita, essendo già avvicinati nello stesso modo ai poli di essa i poli dell' altra.

11. Se poi riflettendo sui ragionamenti fatti ai paragrafi 6 e 9, si considera che la forza di una calamita per magnetizzare un pezzo di ferro o di acciajo, che le venga applicato a contatto secondo tutta la sua lunghezza, riesce diminuita non pure quando ai poli di essa sieno applicati i poli ad essi rispettivamente amici di un' altra, ma anche, benchè in minor grado, quando ad un sol polo di essa sia applicato il polo amico di un' altra; si vede 1° che se si prenderanno due verghe di ferro o d' acciajo, e si adatterà un estremo dell' una ad un estremo dell' altra, indi, con qualunque mezzo, si ma-

gnetizzerà il loro insieme in guisa da far nascere i poli negli altri due estremi, al cessare od al diminuire della causa magnetizzante, in ciascuna verga la forza magnetica diminuirà meno che se in esse si fosse impresso il medesimo stato magnetico e si fossero mantenute fra loro disgiunte: 2° che il magnetismo, che in quel caso rimarrà nelle due verghe, dovrà diminuire al solo allontanare l' una dall' altra.

Relativamente a ciò feci la seguente sperienza.

Ho presi due cilindretti d' acciajo eguali del diametro di cinque millimetri e della lunghezza di quaranta. Tenendoli con apposito congegno fra loro uniti in guisa da formare un sol cilindro, li magnetizzai col mezzo di una calamita; e dopo ciò il loro insieme deviava l' ago del magnetometro di 46°.

Li separai poscia, ed in seguito li riunii come erano prima, e dopo ciò il loro insieme deviava l' ago del magnetometro di soli 36°.

Per togliere il dubbio che questa diminuzione di forza dipendesse dai piccoli urti e sfregamenti, che i cilindretti soffrirono, e per nulla dalla contraria magnetizzazione che, secondo le cose premesse, deve aver luogo nei sottili fili, di cui può immaginarsi composto ciascuno d' essi cilindri, allorchè viene l' un cilindro dall' altro allontanato; ripetei la stessa esperienza coll' avvertenza di tenere applicati ai loro estremi più lontani due ferri, quando allontanava un cilindro dall' altro e fino a quando li aveva di nuovo riuniti; dopo di che trovai che l' insieme de' due cilindri deviava l' ago del magnetometro non di 36°, ma di 41°.

Così operando veniva manifestamente diminuita la contraria magnetizzazione de' fili suddetti, mentre si aumentavano gli urti e gli sfregamenti. Se dunque il fenomeno dovesse ripetersi unicamente da questi, l' ultima deviazione avrebbe dovuto essere minore di 36°; ma poichè fu maggiore, deve esso ripetersi, almeno in parte, dalla contraria magnetizzazione suddetta.

12. A conferma della prima deduzione del paragrafo 10 registro la seguente sperienza.

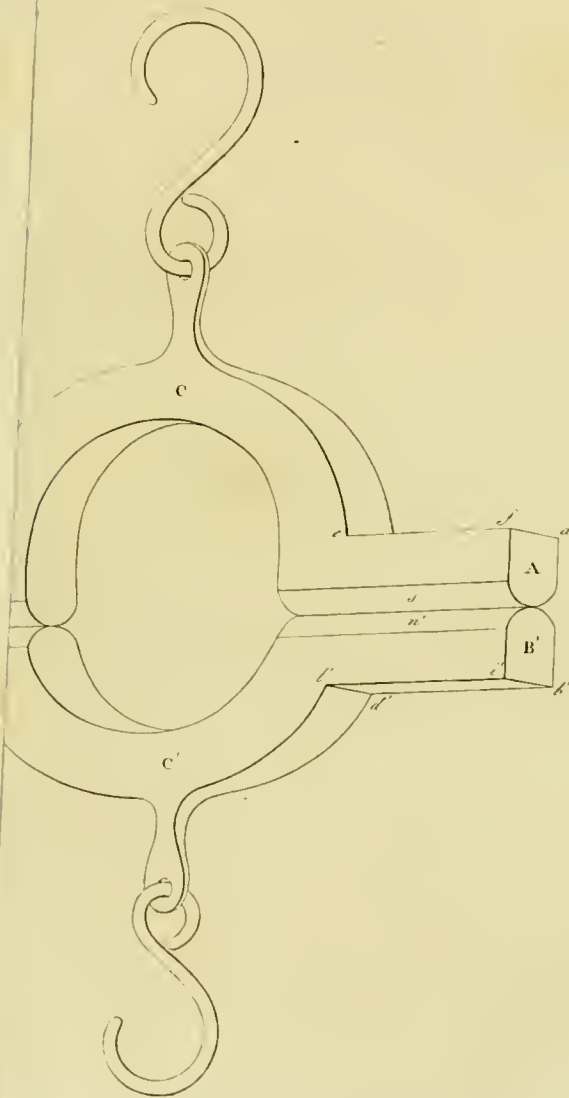
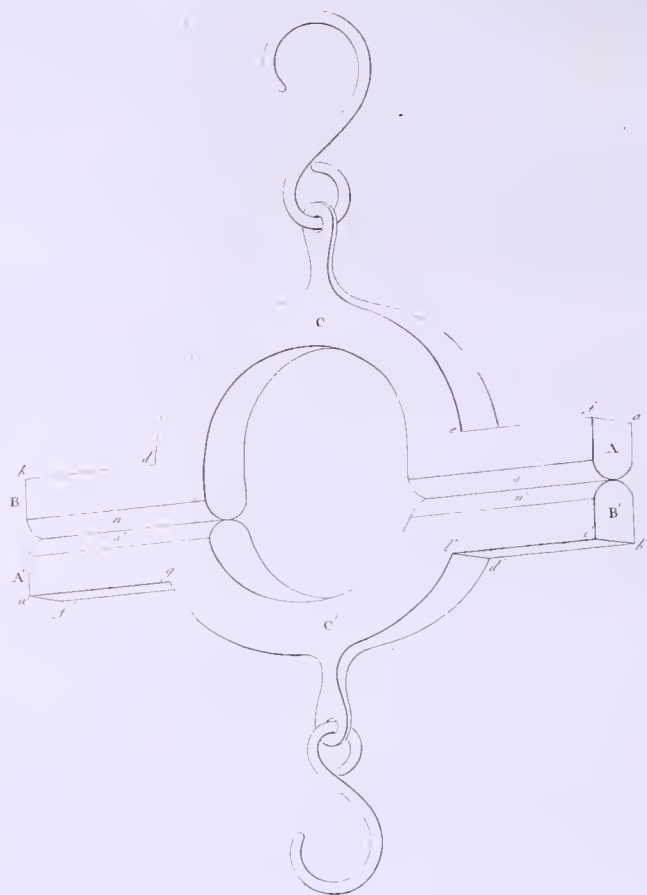
Ho fatto costruire due ferri dolci foggiati a guisa de' grimaldelli delle calamite à ferro da cavallo di un sol pezzo, ma incurvati nelle loro parti medie in modo che quando si applicano fra loro reciprocamente come ciascuno s' applicherebbe alla rispettiva calamita, essi si toccano soltanto per due linee vicine alle estremità. Veggasi la figura. Il maggiore di questi ferri pesa chil. 0,09; l' altro chil. 0,07. Io li chiamerò *ancore*.

Ho presi due magazzini magnetici a ferro da cavallo, dei quali uno regge chil. 13, l' altro chil. 10; ed applicai l' ancora maggiore BCA ai poli del primo, colla faccia *efa* al polo nord e la *bd* al polo sud, e l' ancora minore ai poli del secondo, colla faccia $g'a'f'$ al polo nord e la $l'd'b'i'$ al polo sud. Mantenendo le dette ancore così applicate ai due magazzini, posi l' un magazzino di fronte all' altro in guisa che essi avessero di rimpetto i poli amici; indi li avvicinai fra loro finchè le due ancore fossero applicate l' una all' altra come nella figura. In tal situazione queste ancore erano due calamite di ferro dolce, che si toccavano fra loro coi poli di nome contrario; onde dovevano conservare porzione notabile di forza magnetica anche dopo cessata la causa che eccitò in esse il magnetismo, cioè dopo di averle allontanate dai magazzini e non fra loro. Infatti, tenendole così fra loro applicate, le ho rimosse dai magazzini e trovai fra esse un' adesione di chil. 0, 36. Dopo lo staccamento, applicate di nuovo l' una all' altra, l' adesione non arrivava a chil. 0, 07 peso della minore.

Ripetuta più volte questa esperienza, trovai sempre l' adesione fra chil. 0, 3 e 0, 5. Anche quì ho trovato che la forza attrattiva non diminuisce sensibilmente collo trascorrere del tempo, purchè non venga cambiata la posizione di una delle ancore rispetto all' altra. E dopo lo staccamento, ovvero dopo di avere allontanata molto un' ancora dall' altra rimovendo il contatto per istrisciamento, trovai sempre l' adesione minore di chil. 0, 07.

Credo bene di avvertire che in tali esperienze ed anche nelle seguenti ho sempre operato in modo che il magnetismo

G. Bruni inc.

C
A
B
B'
A'
C'
G. Bruni inc.

nelle due ancore riuscisse nel senso, in cui vi era stato impresso la prima volta.

13. Se nell' eseguire la precedente sperienza, prima si applicano le due ancore l' una all' altra come lo sono nella figura, e poi, tenendole così unite fra loro, si applicano simultaneamente ai magazzini nel modo suindicato (i quali perciò dovranno essere di già collocati di fronte l'uno all'altro, come sopra, ed alla opportuna distanza) si trova poi fra esse una adesione minore. E così deve essere, come facilmente si vede riflettendo sull' ultima deduzione del paragrafo 10.

14. In diverse guise si può imprimere nelle due ancore questa tal forza magnetica, che si conserva finchè venga mantenuto l' opportuno contatto fra esse. Ma il modo che trovai più acconcio è quello praticato nella sperienza, che passo a descrivere.

Ho applicato al polo nord del maggiore dei due magazzini suddetti la faccia *efa* dell' ancora BCA ed al polo sud del minor magazzino la faccia $l'i'b'd'$ dell' altra. Poscia, mantenendo queste circostanze e movendo opportunamente i magazzini, avvicinai fra loro le due ancore ed applicai l'una all'altra le facce n, s', conservando le altre due s, n' alquanto distanti fra loro. Poi, conservando tutte le altre circostanze, ho portato fra loro a contatto anche queste due ultime facce, così che era l' una delle due ancore all' altra applicata, come nella figura. Tenendole così applicate fra loro, le ho in fine rimosse dai magazzini e trovai che l' adesione fra esse era di chil. 1. Dopo lo staccamento, applicata di nuovo l'una all'altra, trovai che la residua forza attrattiva non era sufficiente a reggere la minore di esse.

Operando in modo analogo a questo, mi riuscì di far reggere dalla reciproca forza attrattiva delle due ancore il peso di chil. 0, 08, posta essendo una sottil carta fra le ancore stesse.

15. Riflettendo che nei sottilissimi fili, di cui può immaginarsi composta una qualunque delle due ancore, allorquando cessa di agire su di essa una causa, che fortemente la magne-

tizzava, diminuisce molto la polarità a motivo di magnetizzazioni contrarie operate su di essi, e che quindi (secondo i principj del magnetismo dissimulato) deve rimanere in ciascuno di essi una suscettibilità maggiore per ricevere un aumento nella polarità che per ricevere una diminuzione, si deduce che: se col mezzo di una forte calamita si magnetizzeranno le due ancore, la prima col sud in *s* ed il nord in *n*, l'altra col sud in *s'* ed il nord in *n'*, indi, tenendole lontane dalla calamita, si applicheranno l'una all'altra come nella figura, e poi alle facce A, B' si avvicinerà un polo (per esempio il nord) di una calamita, sarà maggiore l'aumento, che questo produrrà nella polarità de' fili costituenti l'ancora ACB, della diminuzione, che produrrà nella polarità de' fili della A'C'B' (a meno che l'azione del polo suddetto sulle due ancore non sia troppo gagliarda); onde sospettai che, rimovendo poi il polo nord suddetto dalle facce A, B', senza separare le ancore, fosse per rimanere fra queste un'attrazione maggiore che prima di avere avvicinato il polo suddetto alle facce stesse, qualora però l'intensità dell'azione di tal polo sulle due ancore non abbia ecceduto una certa misura. E per simile ragione sospettai che fosse per accadere lo stesso qualora il polo suddetto si avvicinasse invece al mezzo C dell'ancora maggiore ovvero al mezzo C' della minore.

Applicai pertanto l'ancora ACB al maggiore dei magazzini suddetti, colla faccia *s* a contatto col nord e la *n* col sud. Indi, rimossa questa, vi applicai la A'C'B', colla faccia *s'* al nord e la *n'* al sud. Rimossa anche questa ed applicate le ancore fra loro come nella figura, dopo un notabile esercizio trovai l'attrazione di chil. 0, 095.

Applicate di nuovo fra loro come poc'anzi, avvicinai alle loro facce A, B' il sud del magazzino suddetto fino alla distanza di millimetri 0, 15; e, dopo di averlo rimosso, trovai fra le due ancore l'attrazione di chil. 0, 21.

Magnetizzate di nuovo le due ancore come poc'anzi, indi applicata l'una all'altra ed avvicinato invece il polo nord alle

facce A, B' fino alla stessa distanza, dopo di averlo rimosso, trovai fra le due ancore l' attrazione di chil. 0, 26.

Ripetuta ancora due volte questa esperienza, ma avvicinando il polo nord del magazzino, la prima volta al mezzo C dell' ancora maggiore, la seconda al mezzo C' della minore, e sempre fino alla distanza di millimetri 0, 15, ebbi le attrazioni di chil. 0, 24 e 0, 21.

16. Accennerò ancora le seguenti esperienze, le quali offrono fenomeni aventi relazione coi precedentemente registrati.

1ª. Se due calamite a ferro da cavallo eguali e di forze circa pari si uniscano come per formare di esse un magazzino, ma in guisa che il nord dell' una sia vicino al sud dell' altra ed il sud della prima al nord della seconda, applicando poi ad esse i grimaldelli, si trova fra questi e le calamite pochissima attrazione; se ne trova invece alquanta ove, essendo già applicati i grimaldelli alle calamite, vengano queste unite fra loro nel modo suindicato.

2ª. Se si decompone un magazzino magnetico, mantenendo il grimaldello applicato alla maggiore delle sue calamite componenti, si trova fra questa ed il grimaldello un' attrazione, della quale è sempre minore l' attrazione che si trova, rimosso che sia stato una volta il grimaldello dalla calamita medesima.

Decomposto un magazzino magnetico a ferro da cavallo costituito da sette calamite semplici, e che può reggere chil. 10, applicai alla maggiore di queste il grimaldello del magazzino e trovai l' attrazione di chil. 0, 92.

Ricomposi il magazzino e vi applicai l' ancora; indi lo ho decomposto lasciando l' ancora applicata com' era alla maggiore delle calamite componenti; e questa in tal circostanza resse chil. 1, 8; ma dopo lo staccamento dell' ancora, non ostante un lungo esercizio, resse soltanto chil. 1, 2.

3.ª Se ad una calamita stabile a ferro da cavallo si applica l' ancora, e poi uno o più ferri, che uniscano fra loro le gambe della calamita vicino ai poli, si trova fra l' ancora e la calamita una certa adesione. Si trova un' adesione minore, se

invece prima si applicano alla calamita i ferri medesimi nel modo stesso, e poi l' ancora.

Al magazzino magnetico usato nella precedente sperienza applicai l' ancora nel modo ordinario, e poi vi applicai anco due paralellepipedi di ferro, uno da una banda, l'altro dall'altra dell' ancora e poco distanti da essa, in guisa che ciascuno d' essi congiungesse le due gambe del magazzino e bene vi si adattasse. Ciascuno di questi due paralellepipedi era poco meno pesante dell' ancora. Esplorai allora la forza attrattiva fra la calamita e l' ancora e la trovai di chil. 4, 8.

Dopo lo staccamento, lasciando applicati com' erano i due paralellepipedi suddetti al magazzino, vi applicai di nuovo l' ancora, ed allora trovai che la forza d' attrazione fra questa ed il magazzino era soltanto di chil. 2, 36.

17. Credo bene di richiamare quì in fine le principali proposizioni di questa Memoria.

1.ª Se cessa la corrente nell' elica di una calamita temporaria mentre l' ancora vi è applicata a contatto, rimane una forza attrattiva fra la calamita e l' ancora notabilmente maggiore di quella che si trova se l' ancora viene applicata dopo cessata la corrente; e quella forza si mantiene sensibilmente inalterata finchè non venga cangiata la posizione dell' ancora rispetto alla calamita.

2.ª Il medesimo fenomeno ha luogo, benchè in minor grado, anche se l' ancora venga applicata ad una piccola distanza dai poli della calamita.

3.ª A rendere questo fenomeno più conspicuo giova la maggiore estensione de' contatti fra l' ancora ed i poli della calamita.

4.ª Questo fenomeno sembra dipendere da contrarie magnetizzazioni impedite ne' fili sottilissimi, di cui possono immaginarsi composte la calamita e l' ancora.

5.ª Il fenomeno stesso può ottenersi su due ferri anche senza l' intervento di correnti elettriche, col mezzo di calamite.

6.ª Esso non manca di aver luogo (paragrafo 11) se i due ferri vanno a contatto fra loro da una sola banda.

SULLA INSUSSISTENZA
DELLA GENERAZIONE SPONTANEA
MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE

DOTTORE GIULIO SANDRI

Ricevuta il 25 *Novembre* 1850.

Ora che tanto si va discorrendo sulla generazione spontanea, e da molti ella viensi anche favoreggiando; siccome oltre le conseguenze morali e religiose, ch' io lascio ad altri il vedere, questo punto assai da vicino tocca la dottrina de' contagi, e il modo principalmente di cessar essi morbi sì funesti agli uomini, agli animali e alle piante, riserbandomi di fare osservazioni speciali sopra casi particolari, come quelle (1) che opposi alle ragioni colle quali un chiarissimo personaggio tentava provare la spontanea generazione de' funghi; io m' avvisai di trattar qui l' argomento eziandio in generale, prendendolo ne' suoi diversi rispetti, conciossiachè la verità meglio appaja dal mirare la cosa in tutti i suoi ragguardamenti.

1. A chi volgesse attentamente lo sguardo scientifico su tutta l' ampia estensione del nostro globo, non si saprebbe se meraviglia maggiore destasse il considerare la quantità sì prodigiosa delle varie specie d' esseri peculiari che vi si trovano accolti; o piuttosto il veder come questi, sebbene a morti e distruzioni di continuo soggiaciano, pure sempre si rifanno gli

---

(1) Lette all' Accademia di Agricoltura Commercio ed Arti di Verona nella Tornata del 23 Maggio 1850.

stessi, ricompajono sempre identici in guisa, che descritti bene una volta dal Naturalista, si riconoscono per li medesimi anche dopo secoli e secoli.

2. Del quale rifacimento così fedele a intendere, per quanto a noi quì permettesi, il modo, vuolsi innanzi tratto notare la divisione di tutti i corpi naturali nelle due numerosissime schiere di *organici* ed *inorganici*. Gli organici od organizzati son così detti perchè, godendo della vita al cui ministero si esigono particolari funzioni, vanno forniti di acconci speciali stromenti o sia *organi* per l' esercizio di esse: e gli inorganici così vengon chiamati perchè, di vita mancando, di tali stromenti pur mancano.

3. Oltracciò i corpi organici nascono e muojono, essendo la loro esistenza più o meno determinata, e al tutto dipendente da esterne influenze: essi hanno la macchina loro composta di tessuti di varia sorte; fluidi che regolarmente scorrono dentro solidi; crescono a poco a poco per interno svolgimento di materia, laonde succhiano il loro alimento, lo condiscono o sia elaborano, lo assimilano appropriandosi il confacente e discacciando l' inopportuno, il superfluo, quello che per vecchiezza diventò inetto; conciossiachè la vita si eserciti e si mantenga per un giuoco incessante di mettere e di levare, di addizioni e di sottrazioni, addizioni di cose nuove e sottrazioni di vecchie. E ad eseguire tante e sì varie funzioni, gli organi destinativi, queste parti pure cotanto varie, stanno insieme unite con tale accordo che questa esiste per quella, quella per questa; ciascuna per tutte, e tutte per ciascuna, quasi fossero parecchie vite in una sola, o una vita che da parecchie risulti; una principale che sia di parecchie secondarie il concorso.

4. E i corpi inorganici all' opposito non nascono, ma si formano; non muojono, ma se finiscono, ciò avviene soltanto per distruzione: essi ponno avere durata indefinita, non dipendendo ella punto dalle influenze esteriori: hanno sostanza omogenea cioè simile e identica in ogni lato; non fluidi che discorrano per entro solidi. Ove si formino, questo succede tutto

ad un tratto; ed ove si aumentino, il fanno per sopprapposizion di materia: e le parti loro possono esistere staccate dal tutto egualmente ch' esistevano ad esso unite; ed anche, ove l' abbiano, colla medesima distribuzion regolare di molecole che appellasi *cristalizzazione*, non costituendo questi de' tutti propriamente detti, de' tutti indivisibili o sia *individui*, siccome gli costituiscono gli organizzati.

5. Ma, ciò premesso, per qual cagione succede egli mai che le specie, quantunque sì numerose, sempre si mantengano identiche, sempre identiche si rifacciano (N. 1.)? Magistero sì dilicato e geloso a quali si affidò mai agenti precisi tanto ed esatti che in tal moltitudine e in tale diversità d' oggetti serbassero costantemente un ordine sì perfetto?

6. Quanto agli esseri inorganici si dotarono le minime lor particelle, le elementari molecole di peculiari tendenze reciproche, in vigor delle quali si avessero a congiungere, se con molecole della stessa natura, sempre sotto quelle apparenze e forme determinate; e se con altre, anche sempre in quelle stabilite proporzioni e soltanto in quel dato numero, per cui di necessità debbono sempre uscirne identici corpi. E queste rispettive tendenze, il cui giuoco mantiene in continuo movimento di composizioni e scomposizioni, di passaggi e trasformazioni la morta materia, e la cui conoscenza porge in mano al chimico il magico poter delle analisi anche più minute e più difficili, e di formare que' molteplici artificiali prodotti che giovano cotanto alla vita sociale; queste rispettive tendenze, io diceva, regolate da leggi le più costanti e precise, queste insite forze degli atomi, sì disgiunte che unite già calcolate appuntino in ogni loro accidente con quella esattezza ch' è propria della Natura, sono gli agenti, cui si commise la conservazione perenne delle inorganiche specie.

7. E pel regno organizzato l' importantissimo affare della conservazion delle specie, della perenne successione degl' individui affidossi a germi proprj, dai quali, come da peculiari progenitori, avessero per linea non interrotta a derivare. I quali

germi sì gelosamente eseguiscono l' incarico loro commesso, che non di rado ricopiano nella prole le stesse malattie, gli stessi difetti, gli stessi accidentali caratteri, lo stesso temperamento, la stessa fisionomia dei genitori o degli avi; sicchè distinguer si possano le razze, le varietà e le famiglie. E sebbene addivenga che, essendo questi esseri soggetti alle influenze degli agenti esteriori (N. 3.), per clima, esposizione, alimento, coltura ed altre cagioni, diversino assai gli uni dagli altri; serbano però sempre la tendenza al primo tipo, anzi essenzialmente non l' abbandonano mai, e ad esso poscia ritornano anche nelle accidentali apparenze quando se ne presentino le acconcie opportunità. E se alle volte pur si permette fra le specie dello stesso genere, o di genere affine, qualche bastardo, chiamato altrimenti *ibrido* che vale ingiurioso, perchè fatto in onta alla Natura; quest' ingiuria tuttavia non si lascia andar molto lungi: non riguardo alle piante, in cui non si può aver ibridismo di secondo ordine (1), e quello di primo suolsi mantenere soltanto cogli sforzi dell' arte; e molto meno riguardo agli animali, in cui il mulo, se mai avvenga, suol essere sterile, sebbene apparentemente possegga tutte le parti generative allo stato di perfezione. Cotalchè gli esseri organici non solamente procedono sempre da esseri organici, da esseri organici simili, ma anche da esseri di specie identica: e se in ciò abbia luogo qualche deviazione procurata massimamente dall' artifizio dell' uomo per servire a' suoi comodi, a' suoi desiderj, ella poi cessa tosto da se medesima, o torna all' ordine presta-

---

(1) *Gallizioli*: Elementi Botanico-Agrarj. Firenze, 1809. Tom. I., pag. 398. A scansamento di soverchie note si avverte, che pe' fatti, in cui non si faran citazioni, si ponno vedere, oltre quest' opera del Sig. Gallizioli, le seguenti pur vulgatissime. *Pollini*: Elementi di Botanica. Verona, 1810. *Blumenbach*: Manuel d' Histoire Naturelle. Paris, 1803. *Pino*: Elementi di Storia Naturale degli animali. Milano, 1808. *Jacopi*: Elementi di Fisiologia e Notomia comparata. Milano, 1808. *Jussieu Adriano*: Elementi di Botanica e Fisiologia vegetale. Traduzione. Torino, 1846. Corso elementare di Storia Naturale ad uso dei Collegi e degl' Istituti di educazione ec. Zoologia del Signor *Milne Edwards*. Edizione italiana. Milano, 1846.

bilito, non soffrendosi punto che il mondo si popoli di capricciose generazioni (1).

8. Ma tale essendo il modo tenuto per la conservazion delle specie di cui la Natura si mostra tanto sollecita, tale essendo il generale procedimento appien conosciuto, noi qui vogliamo indagare se facciasi pur luogo a qualche eccezione, vale a dire se gli esseri organici procedano sempre o tutti da esseri organici lor somiglievoli, oppure si possa dar eziandio quella che appellasi *generazione spontanea*. E per meglio garantirci da errore procureremo di considerare la cosa sotto i suoi varj aspetti, facendo cominciamento da quanto ci addita l' osservazione.

9. Questa, ch' è la sola fonte del sapere in opera di oggetti naturali, e senza della quale non avvi alcuna verace cognizione di fatto, non ammette generazione spontanea. L' uomo s' accorse che tutti gli esseri organici che riguardano da vicino i suoi bisogni o i suoi piaceri, quelli di cui dovette far uso, e su cui gli fu dato di tener sempre l' occhio, avendoli in suo potere, tutti sempre veniano da proprio germe. Vide, per esempio, che da proprio germe e sol dalla vite veniva la vite;

---

(1) Il bastardo non può nascere che da specie similissime, come tra il cavallo, l' asino, l' onagro e lo zebro; tra il becco e la pecora, tra il cane, la lupa e la volpe; e tra alcune specie di passeri. Ed egualmente rispetto alle piante: col polviscolo della *nicotiana paniculata* fecondasi, per esempio, la *nicotiana tabacum*; e la *digitalis purpurea* con quello della *lutea*. E sebbene altri animali in un eccesso di libidine copran talvolta eziandio spontaneamente, e con piacere, femine assai diverse, come il toro la cavalla, l' accoppiamento sempre torna al tutto infruttuoso.

A infrenare l' ibrida generazione; 1°, com' è detto qui sopra, essa non si permette che tra specie molto affini: 2°, la femina la quale concepisce il bastardo si sconcia più facilmente, come vedesi nella cavalla che dall' asino concepisca il mulo, e nell' asina che dal cavallo concepisca il bardotto: 3°, ne' bastardi soglion esservi maschi assai più che femine: 4°, il bastardo animale d' ordinario è sterile; benchè pretendasi avervi esempio che fecondasse il mulo, e non ne manchino alcuni in cui partorì la mula; in complesso tuttavia sì rari, che si teneano portenti. L' uccelletto per altro che viene dal Calderugio e dal Canario è fecondo; ma sterili i figli suoi. Nelle piante il bastardo può esser fecondo anche successivamente, ma non generar nuove specie.

da proprio germe e solo dal frumento veniva il frumento; e così tutte l' altre piante ch' ei volle moltiplicare: vide che da proprio germe e solo dal cavallo veniva il cavallo; e così tutti gli altri animali, anche i più piccoli che domandavano le sue cure per trarne vantaggio, come l' ape stessa e il filugello.

10. Ed anche rispetto agli enti che non interessavano gli umani bisogni così da presso, ma piuttosto la nobile curiosità scientifica, il Naturalista quando si piacque d' istituire le accurate sue osservazioni, s' avvide che da proprio germe pur ne venivano quelli che prima si credean nati dalla ventura; e nel rintracciare i loro organi riproduttori e la maniera di propagazione, moltissimi chiari personaggi si segnalarono. E si conobbe come l'erba più esile, e il verme più minimo e l'insetto, da proprio germe procedessero, scoprendo pur il sesso di molti, distinguendo il maschio e la femina, e l' intera formando genealogica storia anche di esseri che sfuggono allo sguardo comune.

11. L'attenta osservazione giunse pure a disvelarci la genealogia della minutissima crittogama nell' *uredine* e nella *botrite*, non pure scorgendole chiaramente derivare da germe proprio, ma seguendone anche lo sviluppo e l' intero procedimento. Quando l' attenzione si rivolse di proposito all' animaluccio che ha nome dalla sua picciolezza, all' *acaro* producitor della scabbia, si riconobbe aperto la sua propagazione col mezzo del proprio germe, ravvisando e il genitore e la genitrice, e l' accoppiamento, e la durata della gravidanza e quella del deporre le uova, e la forma di queste, e il numero dei piccini che da ogni mettitura si producono, e il modo con cui la madre se li trae dietro attaccati alle zampe; ed altri simili particolari notati prima dal Waltz sulla pecora (1).

12. Negli stessi infusorj, in quegli animaletti che nascono dopo alcun tempo nell' acqua o in altro liquido in cui mettesi a giacer qualche pianta o sostanza animale, fu pure scoperto

(1) Pozzi: Epizoozie. Milano, 1812; pag. 280 e segg.

dall' accurato Naturalista il modo di generazione, il provenire cioè l' individuo ognor da individuo della sua specie; essendosi, per esempio, conosciuto che si moltiplica per mezzo di uova il *trichoda lepus*; che viviparo è il *volvox globator*; che in alcuni, come le *vorticellae*, crescono i novelli a guisa di bottoni sul corpo dell' adulto; che in altri la moltiplicazione succede col dividersi il corpo del genitore, o pel lungo come nel *paramoecium*, nel *cyclidium*; od obbliquamente come nel *monas*: e avendovene pure di quelli, in cui la riproduzione si fa nell' una e nell' altra guisa.

13. E di parassiti che si sviluppano e vivono in altri animali sotto forma di vermi, recando anco non di rado moltissimo danno, s' è pur veduta la derivazion dall' esterno, vale a dire da uova di certe mosche dai Naturalisti appellate *estri* (N. 48.). Il che tutto vien à provare che per discoprire che l' essere organizzato procede da proprio germe, non occorre che l' osservazione più o meno attenta, insistente ed assidua secondo il caso.

14. E dove non può arrivar ella stessa l' osservazione, sottentra quella sua figlia od emanazione, l' analogia; quella guisa di ragionare che tanto estende ed amplifica il nostro sapere, che ci fa dedur con certezza anche ciò che non veggiamo, e a identici effetti cause identiche assegnare. Per l' analogia un colono che ravvisi ulivi in un campo, un pastore che ravvisi pecore in un prato, una contadinella che polli ravvisi in un' aja, senz' andare fantasticando come le circostanze od il suolo abbiano potuto produrli, dicono tosto e con sicurezza che l' ulivo sen viene da un altro ulivo, le pecore da altre pecore, e i polli dalle proprie uova; perchè la sperienza loro ha mostrato che solo dall' ulivo l' ulivo sen viene, solo dalla pecora viene la pecora, e soltanto dall' uovo il pollo. Ed egualmente il viaggiatore che s' imbatta in uomini per lui novelli, in uomini selvaggi, senza fantasticare come il paese o la selva gli abbia prodotti, sa di certo che provennero da altri uomini, perchè da quanto egli vide in prima l' uomo non viene mai

che dall' uomo. E il medesimo argomento si tiene e senza tema alcuna di errare, anche dallo spirito più triviale per tutti gli altri oggetti vegetabili od animali, di cui siasi una volta chiaramente veduto l' origine. E il medesimo pure si tiene dal Naturalista per tutti quelli che, oltre la volgar cognizione, egli ha potuto osservare distintamente e assoggettare al suo impero, dall' immensa balena, dal macchinoso elefante fino all' acaro ed all' invisibile monade; dall' adansonia e dal cedro del Libano fino alla botrite e all' uredine; e agli altri ancor più minuti, se pur ve n' abbia, de' quali egli sia potuto una volta arrivare a veder con chiarezza la guisa di moltiplicarsi.

15. Nè solamente l' analogia guida con sicurtà per dedurre l' origine degl' individui della specie stessa che si vide altra volta; ma vuole pur estendersi a quelli del genere e della classe. Imperciocchè abbattendoci in nuovo animale, in nuova pianta, la cui propagazione non siasi da noi veduta, punto non dubitiamo nel dire e nel credere che da individui lor simili anch' essi provengano: tale essendo la generale sperienza che abbiamo fatto, la quale senza bisogno di prova ulteriore o dimostrazione, ci presenta la cosa quasi come un assioma, specialmente chi degli oggetti naturali più si conosca, avendone fatto convenevole studio.

16. E tale argomento di analogia, anche pe' casi che l' apparenza renderebbe meno credibili, viene maggiormente afforzato dall' osservare che per essere stata la Natura cotanto larga di vite, popolato volendone ogni angolo del globo, ogni zona, ogni clima, il monte, il piano, l' aria, la terra, il continente, l' isola, l' oceano, il mare, il lago, il fiume, la fonte e l' acqua stessa termale, e facendo che gl' individui medesimi, piante od animali, da parecchi altri minori venissero pur abitati; a mantenere di queste vite acconciamente la durazione secondo portava l' indole, il luogo e l' altre circostanze di ciascun essere, e a mostrarci ad un tempo quanto ella possa divagare senza smarrirsi, nella generazione per assicurarsi l' effetto ella ebbe ad usare una quasi infinita varietà di mezzi e di precauzioni,

che per dare maggior corpo alla prova del nostro assunto, benchè solo in parte ed alla sfuggita, noi verrem quì toccando.

17. In alcuni esseri organici la generazione si opera per separazione di parti. Nel più de' zoofiti di tempo in tempo dal corpo sporgono de' bottoni o sia gemme che in breve divengono altrettanti animali. Il polipo, oltracciò, quasi fosse da per tutto seminato di germi, qualunque brano sen tagli, è capace di mutarsi in nuovo individuo. Degl' infusorj, toccati pure dianzi (N. 12.), ad alcuni nascono presso la coda due pallottoline, le quali cresciute si lanciano via e divengono figli, che alla lor volta poi fanno il medesimo. Altri di forma rotonda provan nel mezzo del loro corpo un traversale strangolamento che quindi li fende, di uno facendone due; ciascuno de' quali poscia pur due ne forma, e così via via. In altri lo stringimento e la fenditura anzichè pel traverso avviene pel lungo: ed in altri le trasversali fenditure sono parecchie, dando così luogo a molti figli ad un tempo. Il volvoce, entro cui può scorgersi alle volte fino alla quarta generazione, squarciasi per dare uscita ai figliuoli, e dopo tosto corrugato sen muore. Anche tra le idatidi se ne veggon di quelle che son ripiene di altre, ciascuna delle quali acchiude delle nipoti, che pur si scorgono pregne di figliuole. La guisa di moltiplicazione per separamento, non rara fra gli animali delle infime schiatte, è assai comune alle piante. Avvi in alcune de' corpicciuoli che, giunti a maturità, come nel *lilium bulbiferum*, e nelle poe *bulbosa* ed *alpina*, cadendo in terra vi allignano egualmente che le vere semenze. Le così dette radici bulbose sono pure di somigliante virtù, acchiudendo tutte la ragione di una pianta novella, o di più, massimamente se sieno composte come nell'aglio. I *turioni* delle radici tuberose o somiglianti, tengono parentela colle antidette, poichè separati, come vedesi nelle patate, ciascuno può dar origine a pianta nuova, imitando con ciò in qualche maniera il polipo: come lo imitan del pari le moltissime altre piante che per margotte, barbatelle, talli o tallee o magliuoli agevolmente si moltiplicano serbando anche il pregio

della varietà, come ben conoscono gli agricoltori e i giardinieri: e gli ultimi pur conoscono che ne' *cacti* godono di tal facoltà le stesse foglie che poste in terra metton radici. Ed è a questa medesima facoltà che si appoggian gl' innesti, poichè col trasporto delle marze sopra i soggetti non si fa che moltiplicare le vite sulle altre vite. Nè sempre fa d' uopo che per moltiplicare di questa guisa le parti si stacchino dall'individuo generatore. La rizofora porta rami pieghevoli e pendenti che i botanici dicono *sostentati*, i quali giunti coll' apice a terra, vi barbicano sorgendo in piante novelle; e ripetendo queste poscia il medesimo, un solo piede vale talvolta a coprire gran tratto di suolo e a formare intricatissima selva. E in egual modo il fico indiano, sul quale ascese Zaccheo per osservare il nostro Signore che andava a Gerico, d'un solo piede formar potrebbe un boschetto di molti insieme congiunti a pergolato. Nel Bengala a qualche miglio da Patna, circa mezzo secolo fa si vedeva un albero di questa sorte con 50 in 60 figli ad esso uniti, del diametro di 370 piedi, e gettante al meriggio un' ombra di più di 1100 piè di circonferenza. Nel che ci si offrono chiarissimi esempi di margotte e di pergole naturali (1).

18. Altro mezzo di generazione si è quello per mezzo del sesso, in cui 'l germe esistente nell' apposito organo feminile abbisogna di essere fecondato dal mascolino. E quì se ambi i sessi ritrovansi nello stesso individuo hassi l'ermafrodismo, che può essere di due specie: perciocchè o v' ha bisogno dell' azione reciproca di due individui che a vicenda e fecondano e son fecondati, come nella lumaca: oppure l' individuo fecondasi da per se stesso, come succede e in altri vermi o somiglianti animali che a motivo del loro separato soggiorno o del loro torpore o della loro immobilità, non si sarebbero mai

(1) Col poligono viviparo, ne' cui sterili fiori di sotto vengon bulbetti; e più ancora col genere *caelebogyne* delle euforbie, nel quale si vede semente senza che veggasi organo maschile, e colle spore delle crittogame, in cui pure non apparisce vera fecondazione (N. 36.), la Natura sembra passare dalla propagazione per distaccamento di parti a quella per mezzo di seme propriamente detto.

andati a trovare; e nel più delle piante, che di movimento pure essendo prive, non avrebbero potuto accoppiarsi. Ma nelle piante questo ermafrodismo può essere doppio; vale a dire nello stesso fiore, o in fior differente benchè sullo stesso individuo. Nello stesso fiore è il più comune, perchè anche il più comodo alla fecondazione: e acciò questa riesca ancora più agevole, la femina suole starsene collocata nel mezzo, e i maschi intorno ad essa: ed in oltre nel fiore diritto suol essere il maschio più alto della femina, e più corto nel fiore pendente, affinchè più di leggeri cada sur essa la polvere che egli sparge. Ove poi li due sessi trovinsi in fior diverso e sull' individuo medesimo, il maschio per la stessa ragione è locato superiormente, ed usano essere strette le foglie, e mancare dal lato della femina le intermedie, come scorgesi nel grano turco.

19. L' altra guisa di moltiplicazione co' sessi è il rimanersene questi in separati individui, e rinviensi in alcune piante; ma colla precauzione e che l' individuo femina soglia trovarsi non molto distante dal maschio, e che la femina produca sempre sementi di maschi e di femine, come scorgesi nella canape. Negli animali questa guisa è la più generale, potendo essi, per essere provveduti di moto spontaneo, andarsi a visitar quando vogliono per eseguire lor nozze: ed appartiene a molti vermi, a tutti gl' insetti, a tutti i pesci, i rettili, gli uccelli e i poppanti: ne' quali però diversifica molto la struttura delle parti inservienti alla riproduzione per acconciarsi in tutti alla propria mole, alla propria organizzazione, alla propria specie, alle proprie abitudini, al luogo di dimora, e alle altre singole peculiarità.

20. Ma le dette parti con tanta cura e variazione architettate, anche doppie in non poche specie, come nel ragno, ne' crostacei; e ne' serpi che han duplicato la verga, inutili tornerebbero al tutto se non vi fosse stato l'amoroso incentivo per metterle in esercizio. E quanto mai la Natura in questo non fu ella avveduta e possente? Non a torto gli antichi ne

fecero un irresistibile Nume, a cui tutti i viventi nell' un tempo o nell' altro, in quest' occasione od in quella dovean soggiacere. Onde anche il Mantovano Filosofo e Naturalista non men che Poeta ebbe a cantare (1): *Omnia vincit amor, et nos cedamus amori.*

21. E per saggissima economia l' amoroso stimolo non si eccita se non quando può con buono effetto venir adempinto. Gl' impuberi d' ambi i sessi trovansi insieme senza punto sentirlo: nè più lo sente la femina dell' animale rimasta feconda, che anzi suol respingere il maschio se la ricerchi o solleciti. Non si desta che ne' tempi dell' anno, i quali per la nascita della prole e per l'allevamento sono i più acconci. Nell' uomo può destarsi in ogni stagione, e quasi in ogni stagione eziandio nel majale. La cagna non riceve che due volte all' anno. La pecora può trovarsi in calore dal Novembre all' Aprile, poichè portando cinque mesi, il parto sempre viene in luce al punto di approfittare dell'erba fresca. E il medesimo è a dire di tal provvidenza per tutte le altre specie di viventi anche d' ordine inferiore, ai quali fu assegnato nell'anno il tempo convenevole in cui provare l' amoroso incentivo.

22. Per accender il quale usò la Natura molt' arte. Nell' uomo la brama di successione, le vaghe forme, il geniale aspetto, le tenere occhiate, il sorriso, il bel tratto, la grazia, e tutti gli altri pregi e le doti relative degli oggetti da unirsi, mezzi sono assai proprj; non che l'umore che va irritando le parti massimamente in vicinanza dell'altro sesso. E soprattutto con quest' umore separato e posto in moto a quell' epoca, il quale esse parti irritando solletica, si desta l'amoroso appetito negli animali; cresciuto poi anche e da certo odore che allor solamente, o allor più forte, si esala, e da certi gesti o suoni di convenzione, chè sono dell'amor loro linguaggio ben espressivo.

23. E siccome la Natura dopo avere stimolato col bisogno a ciò ch' ella desidera, compensa col piacere nel soddisfarlo,

---

(1) Egloga X. Vers. 69.

piacere più o meno grande secondo che più o meno grande era il bisogno stesso; così volle che a quest'atto, che formava per essa il maggior bisogno, il maggior piacere andasse congiunto, piacere che diresti provar soavissimo gli esseri stessi più torpidi, quali son le lumache. E di vero negli umidi giorni d'Autunno tu ne scorgi due rizzarsi col loro corpo l'una rimpetto all'altra lontane circa un pollice, e mandato fuori l'organo maschile, allungarlo, intrecciarlo, dirigerlo nel feminile, avvicinarsi scambievolmente insinuandovelo, agitare i tentoni, ed essere di tratto in tratto assorte in tremiti convulsivi, e rimanersi in quell'estasi ben tre giorni, per rinnovarsela poi dopo altri venti.

24. Negli animali ora detti, ciascuno provveduto di entrambi i sessi, l'azione è al tutto reciproca. Non così nel più degli altri, che solo hanno un sesso. In essi generalmente si è il maschio l'assalitore, essendo il più robusto ed audace; e la femina spesso non accetta quello che brama, se non dopo essersi mostrata alquanto ritrosa. Ma perchè anche in questo conto l'uniformità fosse retta, ne' gatti è la femina che assale il maschio e lo obbliga a soddisfarla: e forse il sesso più audace è la femina eziandio negl'insetti, ne' quali è certo il più robusto. In generale suol essere la parte maschile che s'introduce nella feminile: ma per fare che la varietà nè men quì mancasse, avvi pur femine, le mosche delle case, che insinuano l'estremità del loro addomine in un'apertura del maschio.

25. Nè tuttavia fa sempre mestieri che le parti sessuali d'un individuo in quelle dell'altro vengano insinuate. Ciò non sembra certamente succedere nelle *efimere* che, a differenza degli altri insetti i quali rimangono accoppiati per ore, si fecondano svolazzando a sciami per l'aria, sì sfuggevoli ed istantanei essendo i reciproci toccamenti, che l'occhio non arriva a distinguerli. Nel più degli uccelli manca affatto la verga, essendovi in cambio una pupilla appena visibile esternamente che nell'atto dell'accoppiamento debbe schizzettare nell'organo femineo l'umore prolifico. Nelle rane il maschio, privo

al tutto di arnese, non introduce punto l' umor seminale per entro la femina, ma tenendola abbracciata, mentr' è in amore, ne feconda le uova a misura che da essa vengon deposte. Nella maggior parte de' pesci non avvi commercio alcuno tra la femina e il maschio, ma questo sparge l' umore prolifico sulle uova che da quella pria si deposero. Ed abbracciamento non avvi nè anche tra le salamandre acquatiche: nel tempo de' loro amori il maschio nuota intorno la femina, ed innaffia da lungi le uova ch' ella va deponendo.

26. Ma in questo fatto de' pesci istinto molto singolare vuol esser quello del maschio che, passando sopra le uova deposte, gli faccia conoscere quelle della propria specie per fecondar solo esso; ovver l' istinto delle uova, per cui, potendosene trovar insieme tante diverse, pure tutte si appropriino soltanto il prolifico umore della schiatta loro. Il quale singolarissimo tatto si rinviene eziandio nelle piante. In un prato, in un campo, in un pometo, in una selva, dove tante specie trovandosi al tempo medesimo in fiore, e tanti diversi pollini trammisti volando per l' aria, ogni pistillo non si piglia che il suo, e la Natura non usa di formar ibridi abbandonata a se stessa. I pori dello stimma sia per virtù loro propria, sia per quella dell' umor glutinoso che all' epoca della fecondazione suol invischiarli, sembrano assai fedeli guardiani per respingere ogni cosa straniera e dar passaggio soltanto al rispettivo fluido fecondatore.

27. Nè si può a men di ammirare la corrispondenza, che tra loro serbano gl' individui di sesso diverso nel trovarsi a giuoco nel tempo stesso, non solamente fra gli animali, ma e nelle piante dioiche. Siccome l' antera appena matura lancia il suo polviscolo, nè prima nè dopo, così usano il maschio e la femina fiorir ad un tempo; e quando l' uno è in istato di versar la sua polvere, l' altra è già in quello di accoglierne l' aura fecondatrice; al qual uopo in tal punto essa apre anche maggiormente i pori degli stimmi e i canali degli stili che, succeduto siffatto passaggio, vengono poi chiusi per sempre.

28. Ed oltre i movimenti che noi quì dicemmo, altri parecchi assai meravigliosi, a facilitare e por in sodo la fecondazione, si operan ne' fiori e negli organi sessuali. Quanto ai primi, non agevole essendo che il polline giunga sopra il pistillo il quale sia più lungo degli stami in fiori diritti, avviene di veder questi pendenti sino che si è lanciato il polline, e poi tosto raddrizzarsi il peduncolo, perchè l' ovario sen resti nella direzione ad esso più acconcia: di che sono comunissimi esempi le fritellarie *imperialis* e *meleagris*, l' aquileja e le campanule. E siccome la fecondazione in generale non si effettuerebbe di leggeri sotto dell' acqua, sia perchè questa trasporta via il polline, sia perchè al suo contatto egli scoppia, nè può bene andarsi a fissar sugli stimmi; così le piante acquatiche in quell' epoca a tale scopo usano uscirne. Onde, vedi esempigrazia, le ninfee comunissime ne' fossi della bassa provincia, volgarmente dette *capellazzi*, sporgere il fiore in sul mattino dall' acqua, indi aprirlo, verso il meriggio alzarsi alcuni pollici dalla superficie di essa, ed alle quattro o in quel torno serrarlo, e discendere immergendosi ancora, per ripetere il di vegnente lo stesso, e seguitare finchè, avvenuta la fecondazione, rimangono poi sempre col frutto sott' acqua. Un fatto consimile osservato dagli Egizj nella *nynphaea lotus*, pianta copiosa nel Nilo, fece lor credere aver essa relazione col Sole; onde gliela consacrarono, figurando pur ch' ei nascesse da questo fiore, di cui veggonsi anco fregiati monumenti, statue e medaglie. La vallisneria, pianta dioica volgare ne' nostri fossati, ha la femina attaccata al fondo mediante un lungo peduncolo a spira, e al tempo della fioritura svolgendo questo peduncolo recasi a galla. Il maschio che a galla pure si reca, allorchè è ben fiorito staccasi dal suo piede, e così libero va girando intorno alla femina quasi per vagheggiarla, e dopo venutogli il destro e il punto opportuno di lanciarle il suo polline, egli perisce seguendo la corrente che lo trasporta, ed ella si ritira in basso a perfezionare il suo portato.

29. Mirabilissimo è pure il giuoco degli organi sessuali al momento che debbe compiersi il grand' atto. Oltre l' aprirsi de' fori dello stimma e dello stilo ricordato di sopra (N. 27.), l' organo feminile per meglio acconciarsi a ricever il polline, o piega, se in fiore non pendulo sono troppo alti, gli stili infra gli stami, come vedesi nella passiflora e nella scapigliata; oppure gli eleva se troppo bassi e fuori della più opportuna direzione. Nell' *epilobium angustifolium* all' aprirsi del fiore il pistillo trovasi pendente fra i due petali inferiori, quasi ad angolo retto cogli stami: ma poscia prende ad alzarsi; ed arrivato a livello di questi, scioglie i suoi quattro stimmi che prima stavano insieme uniti; i quali, divergendo fra loro, si dirigono verso l' antera per riceverne il polline. Ma in generale i movimenti maggiori si osservano per parte degli stami. Alcuni, come nell' urtica e nella parietaria, sprigionansi elasticamente a guisa di molla, e così lanciano a posto la polvere. Altri colti da quasi orgasmo amoroso per la vicinanza della femina già preparata ad accogliere l' aura loro fecondatrice, si atteggiano del modo più acconcio a meglio servirla. Ove troppo ad essa avvicinati la ingombrino co' filamenti, se ne allontanano alquanto. Se troppo lontani, avvicinansi o tutti insieme, o a due a due, o l' un dopo l' altro a vicenda. Se troppo alti, s' incurvano a porre le antere al piano stesso degli stimmi, cui toccan pure con esse, come nella ruta. Ed avvi anche di quelli che, stando immobili col filamento, approssimano allo stimma la versatile antera, come scorgesi chiaramente nel giglio. Nè mancano esempi ne' quali entrambi i contraenti si mostrano scossi ad un tratto, andandosi reciprocamente ad incontrare lo stimma e l' antera per una inclinazion simultanea di stili e di filamenti, come nelle malve ed altre parecchie. Succeduta poi la fecondazione, tornati gli organi sessuali al primo lor posto, più non si muovono.

30. E proseguendo a toccare soltanto così indigrosso i fatti della generazione, ricordiamo qualmente assai varietà pur si vegga in ciò che molti animali in una volta non fecondano

che per un solo portato, come l' uomo, il cavallo, il cane e tutti i poppanti; ma parecchi, siccome gli uccelli, in un atto possono fecondare tutte le uova che si depongono dalla femina in una stagione, in un' intera covata. Così, pogniam figura, quelle della gallina che sono moltissime (N. 43.) e punto non nascono se non furon gallate, ponno essere tutte feconde per un solo commercio che siasi prima avuto col gallo. E il medesimo è a dir degl' insetti, ne' quali un unico accoppiamento basta per fecondare tutte lor uova per numerose che sieno. Ed avvi in questo proposito cose pur singolari. Le femine dei gorgoglioni fecondate in Autunno partoriscono uova o corpicciuoli che ne tengono luogo; dai quali in Primavera escono sole femine: queste partoriscono femine viventi; e queste anch' elle solo femine pure viventi, e così via via sino all' undecima generazione; nella quale ricompajono in Autunno anche de' maschi, i quali colle ultime femine accoppiandosi danno ricominciamento al detto genealogico giro.

31. E rispetto alla variazione che in questa grand' opera la Natura volle mostrare, noi veggiamo eziandio che alcuni esseri sono monogami, vale a dir si contentano di sola una femina, colla quale pur vivono in compagnia, come parecchi uccelli. Ed alcuni sono anche monogami nella più stretta significazione, siccome è il caso di quegl' insetti che dopo la copula sen muojono, costando loro la vita il momentaneo piacere di darla ad altri. Il più degli animali tuttavia sono poligami, potendo un maschio fecondar molte femine, come scorgesi nel cavallo, nell' asino, nell' ariete, nel pollame; e nel capro che ne può servire fino a cenciquanta. Questa preferenza di poter impregnare parecchi dell'altro sesso cotanto frequente ne' maschi, non è però ad essi così esclusiva che non contisi pur qualche esempio in contrario. L' ape regina tiene a sua disposizione 600 in 700 mariti, ai quali a suo grado si congiugne; ed essi quindi sen muojono o pel sofferto disajo, o d'inedia, od uccisi dalle operaje. Tra le piante poi il servir molti maschi ad una femina sola è comunissimo.

32. Ma qualunque sia la svariata maniera tenuta dalla Natura per operare la fecondazione, grandissimi furono i provvedimenti che prese affine di porla in sicuro. Negli animali vedi una sterminata quantità di fluido prolifico, di cui basta minima particella ad ottenere l' effetto. E ne' pesci oltre la grande abbondanza vi scorgi anche la proprietà di operar freddo, fuori della femina, e misto all' acqua e in essa dilavato. Nelle piante, oltre i mezzi pria menzionati (N. 18-28.), ad assicurarsi che il polline andasse immancabilmente sopra il pistillo, ne fece portatori i zeffiri, l' aria, gl' insetti; e lo produsse in tal copia da non potersi tutto disperdere dalle bufere, dai venti, o predare dagli animalucci, come dalle api che ne traggon la cera: sebbene per altro la continua umidità di pioggerelle o di nebbie, sia perchè impastandolo nol lasci volare al suo posto, sia perchè lo faccia scoppiare prima che siavi arrivato, apporta grave danno ai ricolti. A conoscere la quantità di questo polline basta osservare che, camminando ne' pascoli o prati fioriti, ce ne rimangono coperti i piedi; che ne' campi de' cereali si scorge al levare del Sole alzarsi a guisa di nebbia; e che si credettero piogge di zolfo il rapito dai luoghi, in cui abbondano i cipressi, e altrove portato dai venti.

33. E pari a quello della ricchezza dell' umor fecondante, è lo sfoggio che fa Natura in sue nozze anche per altri rispetti. Trovasi allor l' individuo nel suo pieno vigore, allo stato di perfezione; e alcuni prendono tale stato anche soltanto per questo importantissimo scopo, come il baco da seta che sotto forma di farfalla nè men si ciba, e l' *ephemera virgo*, la quale passati nell' acqua sotto forma di verme e di larva ben due o tre anni, vestite l' ali dopo un tramonto per dar opera alla generazione, alata non può vedere il Sole nè anche una volta. Si mostran le piante del verde loro più intenso, alcune crescendo pur di calore, come l' *arum maculatum*, che si vide ascendere fino a gradi 21, a 24 l' *italicum*, a 42 il *cordifolium*: hanno i succhi più elaborati, onde in tal punto elle soglionsi raccogliere per gli usi medicinali: olezzano della maggiore

fragranza, e più fortemente dell' odore ad esse proprio, se anzi allora non ne acquistano alcune di particolari, come l'*arum dracunculus*: mettono in vista nel fiore, che è il letto lor nuziale, le tinte più vive e più dilicate, le quali ad imminente fecondazione si trovano al grado massimo d' intensità; come allora al massimo grado trovasi pure il trasudamento di zucchero dal fiore. E il simile avvien degl' insetti: solo in quest' epoca sfoggiano, per esempio, la pompa e lo splendore metallico della veste verde dorata le cantaridi, e manifestano l'odor penetrante, e il principio acre ed irritativo che opera come possente farmaco. Gli uccelli spiegano piume più terse, e fanno risuonare la selva de' loro concenti, innamorando quasi l' aria stessa de' loro amori. Il muto armento guizza più vispo ed abbellito di squame più rilucenti; ed ogni essere fa pompa di ciò che ha di più vago. Le nozze si celebrano soprattutto in Primavera, allorchè un mese fu nominato Aprile dall' aprirsi della stagione ovver da Afrodite, dea della fecondità, cui s' era da Pagani questo tempo consacrato. Se ne celebrano tuttavia eziandio in altre parti dell' anno: dai pesci e dai cervi specialmente in Autunno; e nel cuore del Verno dalle crittogame, nelle quali Natura volle mostrare un sentor di vita e di veglia, anche mentre nel resto sembra morta od assopita.

34. Il luogo acconcio a tale celebrazione per gli animali suol essere qualche recesso, in cui se ne stanno occulti e tranquilli; ma il cane la compie senza riguardo anche in pubblico e in mezzo ai romori. I pesci allorchè sono in frega s' accostano alla riva, ove più ne trovano il comodo e maggiore la sicurezza dell'effetto cui mirasi. Degl' insetti molti s' accoppian volando nell' ore più temperate; ed alcuni acquistano l' ali solo a tal epoca. Le formiche stesse che veggiamo quasi sempre terragnole, alla fine d' Estate vestendo l' ali, nel loro imeneo formano alle volte degli sciami di particolare figura, quasi colonne che ascendono per l' aria e discendono in bizzarro ondeggiamento.

35. Avvenuta la fecondazione, scompare tutto il brillante nuziale apparato, e vi sottentra un' idea di squallore, ogni cura volgendosi a perfezionare la prole. Nelle piante cadono tosto lo stimma, il tessuto conduttore, le antere e i filamenti; poscia i petali, e d' ordinario anche gli stili ed il calice, di cui più non v' è duopo: e tutto l' umor si dirige all' ovario per nutricarlo e crescerlo in frutto. Negli animali la femina diventa più mansueta e più guardinga per non offendere quello che si porta in seno; è più misurata ne' suoi movimenti, massime l' ultimo tempo di sua gravidanza: la quale varia moltissimo di durata, essendo generalmente più corta negli animali più piccoli. Così, verbigrazia, la lepre e la femina del coniglio portano un mese; meno di due la gatta; fra i due e mezzo e i tre la cagna; quattro la scrofa; cinque la pecora e la capra; otto la cerva; nove la vacca; circa undici la cavalla. I più piccoli portano meno avendo bisogno di moltiplicarsi più spesso a motivo che per la lor picciolezza sono più esposti a venire distrutti dagli altri maggiori: e per la stessa ragione essi danno anche più figli ad un portato (N. 44.).

36. Il qual portato ov' esca in luce già vivo, gli animali si dicon *vivipari*, come tutti i poppanti, ed alcuni eziandio di altre classi, e massime de' vermi: e dove la vita non ancora sia desta, gli animali diconsi *ovipari*, come sono gli uccelli, e in generale anche gli anfibj, i pesci e gl' insetti. Nei vivipari il figlio si sviluppa dentro la madre col nutrimento ch' essa gli va somministrando. Negli ovipari sviluppasi fuori di lei coi materiali onde l' uovo fu da essa fornito. Sicchè tu vedi sbucciare, pogniam caso, il pulcino bello e formato, senz' aver avuto alimento se non da ciò che si trovava nel guscio. Il seme delle piante, che propriamente è l' uovo vegetale fecondato, reca pur chiuso negl' invogli suoi quanto gli necessita pel suo primo sviluppo, e per mettersi in istato di prender poscia il nutrimento d' altronde. L' attacco di esso alla madre somiglia a quello de' feti operandosi mediante il funicolo umbilicale e durando fino alla perfetta maturazione: mentre nell'

uovo animale, per esempio di gallina, sol da principio aderisce di tal guisa il tuorlo all' ovaja; e per la fecondazione poi distaccandosi, discende nell' ovidutto, ove circondasi dell' albume che vi trasuda, e finalmente giugne in cloaca, ove di corto si veste del guscio. Negli squali e nelle razze pare siensi riuniti entrambi i modi, nutrendosi prima il novello a sole spese della madre per mezzo di vasi con essa continui, come ne' veri vivipari, e poscia eziandio a quelle dell' uovo per vasi che si continuan con esso, come ne' veri ovipari. E si formano embrioni anche senza veruna continuità colla madre nè prima nè dopo. Nelle crittogame scorgi del confuso cellulare tessuto, le cui cellule poscia sviluppandosi si riempiono di una materia semifluida e granullosa, i granellini della quale ripartisconsi quindi in varie masse, che organizzandosi diventan le spore: le quali se ne rimangono poi sempre libere nelle lor cavità; e differiscono dal comun seme delle altre piante anche per essere senza invogli proprj, e come nudi embrioni che nel germogliare nulla mandano fuori, e non fan che allungarsi o crescere per qualche lato. E in molti altri rispetti quì la Natura si piacque variare. Gli embrioni non sempre stanno raccolti in sito speciale, ma sovente anche disseminati si trovano in diverse parti dell' individuo, come nel lombrico terrestre che li tiene in cinture poste dietro gli anelli; nelle tenie che han le ovaje sopra ciascuno de' grandi internodj, onde la più gran parte del corpo loro è composta: e trovansene fin anche misti e quasi confusi cogli stessi organi della nutrizione in alcune alghe, in cui la stessa cellula serve a nutrire e a generare, potendo ogni globetto della materia verde contenutavi, diventar organo riproduttore. Non sempre la prole ha per uscire un proprio forame. Nelle najadi ella sviluppasi dall' ultima articolazione; e le attinie partoriscono per la bocca. E nè men sempre ogni uovo sì vegetabile, che animale, dà nascimento a un solo individuo. Più gambi si veggono spesso germogliare da un grano di frumento o di riso: e la sanguisuga *ottoculata* depone un uovo che in prima contiene un fluido acquoso, dal quale escono poscia otto in dieci, ed anche più vermicelli.

37. Ma le uova affine di svilupparsi abbisognano di covazione, la quale o abbandonasi alla Natura, o si fa dalla madre. Nel primo caso quelle della lucertola, esempigrazia, si covano dal calore solare; dal calor dell' arena quelle de' coccodrilli e delle tartarughe; dal calore de' letamai quelle di molti serpi. Dal calore del Sole vengono pur covate quelle de' pesci che per ciò si depongono dove possano meglio sentirlo: e dal calore dell' atmosfera si covano eziandio generalmente quelle degl' insetti. E comechè noi dicemmo quì sopra, che le uova di questi animali vengono abbandonate, è tuttavia da notare la somma diligenza che si ha di allogarle sempre nel sito più acconcio al loro sviluppamento, e dove il *neonato* ritrovi tosto di che soddisfare a' suoi bisogni. Questa cura è tale e sì costante che diresti la madre dotata del più fino giudizio, della maggiore penetrazione anche negli esseri più infimi, quali sono gl' insetti medesimi. Alcuni depongono le uova entro foglie, entro frutti, entro legni, entro animali viventi, cui forano col pungolo onde le sole femine sono per ciò fornite. Il più delle gallivespe (*cynips*) dal foro praticato nel vegetabile, fanno uscir dell' umore, che addensandosi poscia in gallozzole, forma l' abitazione de' loro figli. Il larvicida od icneumone alloga le sue uova ne' bachi d' altri insetti e massime de' papiglioni. E de' becchini o sia necrofori (*necrophorus vespillo*, n. *germanicus*) la madre prima di deporre le uova seppellisce il corpo di qualche ratto o talpa o simile picciol quadrupede, onde poi si nutre la prole, egualmente che s' ebbe a nutrire la madre stessa. Le femine di varie specie del genere vespajuola (*sphex*), costrutti prima de' nidi con sabbia od argilla, vanno in cerca di ragni o de' bachi di qualche falena, e spesso anche senza ucciderli, ma solamente storpiandoli affinchè non possan fuggire, li traggon entro essi nidi, e quinci depongono un uovo in ciascuno. La larva in nascendo succhia il grande insetto preparatole dalla genitrice, e in esso trova pure un acconcio alloggio per incontrarvi a suo tempo la trasformazione. E ciò che dee far meraviglia maggiore si è, come queste madri,

benchè non abbiano più a vedere le uova deposte nè la prole, e benchè alcune allo stato loro anche nutransi di vegetabili, pure siccome la prole in quello di larva si nutre di animali, hanno cura di porre accanto alle uova animali sostanze, affinchè tosto nata abbia in pronto di che cibarsi. E simile pratica ha pur la *xylocopa violacea*, che per la prole scava una schiera di cellette ne' vecchi legni; e la *x. muraria*, che con arte ancor maggiore fabbrica i nidi suoi di rena o pietruzze cui salda con liquido cemento che si trae dallo stomaco. Alcuni insetti (quei del genere *Chalcis*) depongon lor uova fin nelle uova di altri: onde alle volte da quelle, per esempio, della falena neustria si vede, in vece della sua larva, uscir una specie particolare di piccola mosca.

38. La covatura si fa dalla madre in tutti gli uccelli, eccetto il cucolo, il quale, forse per avere il ventre poco atto a tale operazione, se ne dispensa, ed usa in cambio l' artifizio d' insinuar di soppiatto le sue uova, similissime per avventura in tutto, anche nel tempo richiesto per nascere, a quelle di altri benchè più piccoli uccelli, come la cutrettola bianca, la canaparola e la capinera, d' insinuarle, io diceva, nel nido di questi e farle ad essi covare. Io non istarò quì a rammentar la premura che la femina fecondata ha di prepararsi il nido, l' intelligenza nello sceglierne gli opportuni materiali e il sito più confacente a' suoi bisogni e alle sue abitudini, nel dargli la convenevole forma e la debita ampiezza: nè accennerò la diligenza con cui si opera la covazion da essa femina assistita ne' monogami, del pari che nella preparazione del nido, anche dal maschio; il quale o sottentra a quando a quando in suo luogo, o le va a procacciar il cibo, o la rallegra del suo canto rimanendosene a qualche distanza per non servir mai di guida a chi meditasse rapina. Il voler anche solo toccare queste cose per singolo mi farebbe parer infinito. Ricorderò quinci soltanto quel provvedimento saggissimo, che l'uovo già formato rotondo per uscire più agevolmente dal dilatabile foro non grande, comunque si volga, sempre spinge in alto il suo tuorlo, e del

tuorlo medesimo sempre al di sopra se ne rimane la cicatricula, presso cui sta il punto acchiudente il germe da svilupparsi; per guisa che sempre questo si trova più vicino al covante a meglio sentirne il calore. E precauzione alquanto simile a questa noi scorgiam presa per l'uovo vegetabile; imperciocchè il seme nel germogliare sempre rivolge in basso la parte che debbe formar la radice, e in alto quella che il tronco, in qualunque modo si fosse pria collocato.

39. E in opera di covatura sono da rammentare alcune specieltà. Non tutte le femine degli uccelli han nido proprio. Della crotofaga ani fino a cinquanta si uniscono a covar nel medesimo che grandissimo prima si costrussero insieme. E molte dell' alca torda depongono ciascuna un uovo nel luogo stesso tra le fessure degli scogli, e covano poscia a vicenda. Nella vipera la covatura si effettua dentro la madre, da cui nascono i figli vivi; donde il nome a quest' animale che è raccorciamento di *vivipara*. Nell' insetto appellato cocciniglia (*coccus*), e nel genere *chermes*, i figliuoli si sviluppano pure dentro la madre che li difende servendo lor come di tetto eziandio dopo morta. Nella rana pipa la covatura si fa sopra il corpo della femina, ove il maschio, dopo avere distese le uova, le feconda. Queste indi a circa tre mesi schiudono i girini, i quali avendo presa di poi la forma lor naturale, discendono dal dorso della genitrice. Gli onischi e gli asellidi portano anch' eglino seco lor uova, finchè se ne sviluppano i figli, in un ricettacolo particolare o sacco posto sotto del ventre. E il ragno saccato, che in pari modo seco le reca, arrischia sino la vita con chi tentasse strappargliele. Le femine de' granchi le portano e le covano attaccate sotto la coda. E un che di somiglievole, benchè propriamente non sia covatura, ci offre la famiglia dei didelfi, così chiamati appunto per avere le femine di varie specie, in certa guisa, due matrici; conciossiachè tengono sotto l'addome una grande bisaccia, che può mediante appositi muscoli chiudersi ed aprirsi, nella quale comprendonsi le mammelle. I figliuoli che al primo nascere son picciolissimi

e quasi aborti, vi rimangono poppando finchè rivestiti di pelo, e acquistata colla facoltà di vedere e di camminare, anche una convenevol grandezza, ne vengono fuori nascendo, per così dire, una seconda volta, come la favola vuole avvenisse di Bacco.

40. Quello che quì sopra abbiamo accennato della vipera, della cocciniglia e del *chermes*, ci mostra come grande non sia la differenza tra l' oviparo ed il viviparo: conciossiachè nel primo non facciasi che covar l' uovo fecondato dentro la madre, e nel secondo si covi fuori di lei. Ed è perciò stesso che a classi di ovipari alcuni vivipari appartengono, come a quella de' pesci l' anguilla, un blennio e l' asello comune; per tacere degli squali che pur si sviluppano dalle uova dentro la madre: a quella degl' insetti due specie di mosca viventi sull' edera, la carnaria, ed anche lo scorpione secondo il Redi. Da monocoli si portan nel ventre uova e vivi animali. Ed alcuni, come l'accennato gorgoglione (N. 30.) sono ovipari o vivipari giusta il tempo in cui partoriscono.

41. Ma in qualunque modo lo sviluppo della prole sia succeduto, alcune specie d' animali si prendono cura di essa, ed altre no. Se la prendono tutte quelle che allattano o covano fuori di se, e prendonsela fino a tanto che la prole medesima n' abbisogni. Nè fa mestieri ch' io quì tratteggi come la genitrice mostri pe' suoi figliuoli e avvedutezza in sottrarli ai pericoli, e coraggio in difenderli esponendo per essi fino la propria vita, e sollecitudine in procacciar loro il cibo, imbeccandoli anche, siccome vedesi negli uccelli, e istruendoli a ciò che deono far poscia, come al volo gli uccelli stessi, tostochè già pennuti si possono affidar all' aria. Il che dà a divedere che di queste cure la Natura fece alle madri un bisogno strettissimo, non senza unirvi un piacere assai grato nel soddisfarlo, volendo che lo stesso allattamento andasse accompagnato da un cotal dilettevole senso di voluttà.

42. E sebbene la cura della prole sia più particolare ai poppanti e agli uccelli, non ne mancano chiarissimi esempi, nè anche tra gli animali comunemente stimati per li più dis-

pregevoli, come sono gl' insetti. Alcuni di questi, cioè l' ape, il battilegno, la formica e qualche specie di vespa, sogliono vivere a tal uopo in famiglie assai numerose, e sì regolate che regnandovi somma attività, ciascuno attende sempre a fare soltanto ciò che gli si addice senza uscire giammai da' limiti di sue competenze. In mezzo al fabbricato de' battilegni (*termes fatalis*) sta la cellula della regina; ivi presso quella del re che la feconda; poscia d' intorno quelle della turba soggetta; indi le destinate alle uova; e finalmente quelle pe' magazzini. Tra queste bestiuole avvene sempre una grandissima quantità priva di sesso, o in cui sì poco è sviluppato da non potersi usare, e sono le così dette operaje che attendono, oltre che a fabbricare l' abitazione, a tenerla pulita, a fare le provvigioni, anche ad allevar la progenie. Nelle formiche tu scorgi queste operaje, che sono senz' ali, portar fuori di giorno le uova al Sole, perchè vi si covino, e la sera riporle al chiuso. E tale in esse è la devozione a questo pietoso ufficio, che una formica tagliata a mezzo da una ferita, fu vista mettere ancor in salvo dieci larve, sebbene cotanto addolorata seguendo pur tuttavia ad eseguire il suo incarico, e terminando soltanto colla morte.

43. In materia di generazione diresti che individui anche privi di ragione e di anima, posseggano un cotal tatto di ovviare o tentar di ovviare eziandio agli accidenti. Le galline, ove si lascino le deposte uova nel nido, preparatane la quantità necessaria, mettonsi a covarle; e dove si levino l' un dopo l' altro, continuano lunga pezza a deporne: questa prolungata deposizione dipendendo dal caso, pare tenga molto del volontario. Parecchi insetti che accoppiandosi avrebbero compiuto prima il solito corso di loro vita, coll' impedire ad essi quest' atto, la prolungano: e rari non sono que' tardivi che, non avendo potuto accoppiarsi nel primo anno, passano il verno in luoghi nascosti per cercar poi di moltiplicarsi la Primavera seguente. E il simile accade pur nelle piante: si protrae ad alcune la fioritura impedendo loro di metter fiori quando gli

avrebbero messi naturalmente. Se al frumento si offenda la spiga già cacciata, sicchè non possa con essa generare, ei s' affretta a gettar altri germogli dal collare della radice (1); il che vedesi addivenire anche nel riso; i quali germogli giungono spesso, benchè più tardi, a granire. Ripullulano varj erbaggi, di cui si vanno radendo per l' uso domestico le tenere messe, e si rinnovan ne' prati più volte all' anno l' erbe medesime, alle quali impedisce la falce di produr seme. Per la stessa causa piante che in un luogo son annue, possono in altro o in altra condizione divenire bienni. Le astuzie per se medesime annue, rendendole di fior doppio diventan perenni. Gli spinacci che seminati in Estate non sogliono viver che un mese, ne vivono più di otto seminandoli in Autunno o privandoli del fiore. Le piante che in un sito non giungono a maturar il frutto, sogliono ivi più agevolmente che altre moltiplicarsi per gemme; come appo noi la canna da zucchero, la comune, il salcio ec. che mai non arrivano a darci semenze perfette.

44. La quantità degli esseri che da un individuo possono derivare in un portato, con finissima provvidenza si vede misurata o profusa secondo l' uopo: misurata ne' più difficili a venire distrutti, come in generale i poppanti, ma colla debita proporzione; un solo figliuolo dando, per esempio, la balena, l' elefante, il cavallo; rare volte due la vacca; spesso due la capra e la pecora; più la troja, la cagna, la gatta, la lepre e gli altri di minor mole (N. 35.). E misurata proporzionalmente eziandio negli uccelli, deponendo parecchi degli acquatici un uovo solo; due lo smergo; tre il gabbiano (*larus*); quattro i corvi; cinque il fringuello; da sei ad otto la rondine; quattordici la pernice e la quaglia, ed assai più i domestici massimamente ove sottraggansi di mano in mano dal nido (N. 43.). Profusa è la detta quantità nel più delle piante

(1) Quinci il Pollini (Catechismo Agrario, p. 125.) dice, che ove si falci dopo una gragnuola, mancando più di 20 giorni alla maturità, si può avere mezzano raccolto.

anche grandi, come la vite, il fico, il moro, e maggiormente ancor nelle minime, soprattutto crittogame; molte delle quali non sembrano che un aggregato d'impercettibili semi. Profusa eziandio in animali, come ne' pesci, in non pochi de' quali le ovaje formano la maggior parte del corpo, ed essendosi contate fino a 37,000 uova nelle aringhe, 200,000 ne' carpi, 385,000 nelle tinche, e più d'un milione in una specie di sogliola (*pleuronectes flesus*). E profusa anche in insetti, deponendosi, per esempio, dalle 4 alle 12 mila uova dall' ape, 20 mila vermicciattoli dalla mosca carnaria; e dalla femina del battilegno (N. 42.) fino ad 80 mila uova in 24 ore, avendo essa allorchè gravida il ventre due mila volte più grosso di prima. La quale fecondità in tali minuti esseri unita a ciò che i figliuoli sono in istato di generare non molto dopo esser nati, mostra come possano sì rapidamente moltiplicarsi anche a segno di tornare funesti, siccome il pidocchio rispetto all' uomo e ad altri animali, il cimice de' letti, e quelle turbe che in un attimo pongono il guasto agli orti, ai frutteti, alle campagne e alle selve.

45. E maravigliosa si è pure la durazione, da noi toccata eziandio in altri scritti, della quale moltissimi germi furon dotati. Alcuni ove si abbattano in sito acconcio alla loro conservazione, rimangono illesi per molti secoli, e tornano effettivi al presentarsi delle opportunità. Resistono altri a calore fortissimo, e all' acqua bollente come quei delle muffe e d' infusorj, ed altri a un freddo intenso e alla medesima congelazione. E ve n' ha pure di quelli che dopo essersi disseccati ritornano all' esercizio della vita. Il che viene osservato non solo fra le piante, come nelle alghe; ma eziandio fra varj animali tanto insetti che vermi. Fra gl' insetti ne' monocoli i generi *cypris*, *linceus*, *daphnia*; ne' quali fin da Linneo si notò la proprietà di rivivere per infusione d' acqua; e il monocolo apode che al disseccarsi degli stagni pur si dissecca, e ricupera il primiero stato vitale al ritornare del fluido: di che dato è spiegare come talora in qualche sito della Germania un' immensa

quantità ne compaja dopo le innondazioni. Fra i vermi il gordio e il vibrione anguilletta ripigliano il moto dopo esser rimasti inariditi per lungo tempo, come del pari la vorticella rotatoria, che pure inaridita e come estinta per anni interi, riprende vita e movimento appena che si ritrova nell' acqua.

46. E per la diffusione de' germi quanto mai provvida non fu la Natura? Di quanti mezzi non si vale essa mai? Ella munì varj semi, come negli equiseti, di certe quasi molle dette *elaterj*, per cui al tempo debito vengono sparsi: il che si opera in molti dalla stessa guisa d' aprirsi de' frutti o pericarpi. Nel cocomero asinino, comune fra noi, il frutto giunto a maturità staccasi da per se stesso, e con impeto gli schizza lungi insieme coll'amarissimo succo: la balsamina, pianta delle Indie orientali, gli spinge a considerevol distanza: e l' *hura crepitans*, nativa del Messico, in vibrandoli produce anche forte scoppio. L' oceano può galleggianti sopra i suoi flutti condurne da una parte all' altra del mondo; i mari anch' essi dall' uno all'altro lido: le acque dolci scorrendo possono quinci e quindi prenderli e disseminarli. L' aria se ne incarica molto sovente; e non solo de' più minuti come quei delle muffe e degli altri le mille volte più piccoli, ma eziandio di maggiori, i quali sono per ciò molti anche leggerissimi e provveduti di peli, di pappi, di ampie appendici, ed alcuni eziandio come di ali. E a tale trasporto per li meno leggeri la Natura servesi pur non raro dei venti impetuosi, dei turbini, degli oricani, i quali atti essendo a sollevare e addur seco oggetti assai maggiori, tanto più in lontane parti i germi d' ogni sorta ponno recare; i germi che sogliono essere cose staccate, e a luogo a luogo sulla superficie del suolo copiosamente adunati.

47. Mezzo poi molto comune e poco avvertito per trasportar i germi si è quello degli animali, sia che i germi stessi loro s' appicchino, essendo alcuni a tàl uopo anche forniti di punte ed uncini; sia che se ne stieno appiccati agli altri oggetti che si trasportano. Ma più che coll' esterno gli animali trasportano i germi dentro di se. Mangiandosi minute uova, o

minute sementi, che come altrove dicemmo, finchè restano vive ed intatte, non si digeriscono, vengono poscia o rigettate, o cogli escrementi deposte in luoghi anche molto distanti, ove possono poi svilupparsi. Con tal mezzo si videro, per esempio in laghi novelli, propagare de' pesci colle uova fecondate recatevi dalle anitre od oche selvagge allorchè migrano; e a Banda così dai colombi è fama si propagasse la noce moscata. E di questa verità prova abbiamo pur troppo comunissima anche in ciò che non possiamo nettar appieno gli orti ed i campi da insetti, e massime dalle mal erbe, sebbene gli uni con ogni cura si uccidano, e le altre vengano di continuo estirpate; conciossiachè mangiando il bestiame l'erbe, e non digerendone le sementi, nè le uova degli animali onde sono imbrattate, queste si rendano poscia col letame al terreno, dove tornano a svilupparsi.

48. Nè solamente la Natura in questo od in quel tempo, nell' una guisa o nell' altra anche all' uomo occultissima o da esso non avvertita, sa far pervenire i germi in varj siti; ma farli entrar eziandio ed allogarli nel posto acconcio al loro sviluppo: nel che pure non possiamo a men di ammirare lo stupendo artifizio. Il germe generalmente assai piccolo per meglio potersi insinuare; rotondo per non incontrar ostacoli, e sovente anche da un canto più assottigliato per aprirsi con esso più agevolmente il passaggio; e se debbasi introdurre in essere vivente, i pori o canali di questo assai distensibili per lasciarne passare al caso anche di molto maggiori dell'ordinario lor diametro. Se il luogo proprio a sviluppare l' insetto è dentro un legno, una foglia od un frutto, la madre col pungilion suo (N. 37.) ne pratica il foro convenevole e vi depone le uova: se è l' esterno d' un animale, col suo pungolo ne trafora la pelle e ve le colloca. L' uomo non può fare che il pulce penetrante (*pulex penetrans*), non gli metta le uova sotto le dita de' piedi, producendovi spesso infiammazione violenta che alle volte passa pure in cancrena. E se il detto luogo è dentro l'animale, come i seni frontali, gl' intestini, lo stomaco, la

madre trova pur mezzo di farvi pervenire le uova o i minimi neonati; affliggendosi così per varie guise dagli estri i cervi, i capriuoli, le capre, e massimamente le pecore ed i cavalli.

49. Se tante precauzioni, tanta varietà, e, a nostro modo d' intendere, tanto artifizio per ovviare agli ostacoli che dalla varietà stessa nascer doveano, si piacque usar la Natura per fare che gli esseri organici provenissero dai proprj germi, si vede chiaro come forte sia l' argomento di analogia per dedurre che da proprj germi provengan pur quelli che alla comune apparenza non sembrerebbero provenire (N. 16.); e si vede altresì come il riputarli spontanei potrebbe essere mero effetto d' ignoranza. Nè con questo intendesi punto detrarre a quelli che opinan così fattamente, essendovi anche fra essi de' personaggi per altri riguardi molto distinti: ma ciò vorrebbe dir solo che gli uomini, per grandi che sieno, mai non cessano d' esser uomini; che i soli stessi han le lor macchie senza cessare d' esser soli. Ma appunto perchè tali personaggi quanto più sono chiari e in alto locati nella comune opinione, tanto più collo splendore di loro autorità valgono ad abbagliare, a trarsi dietro l' altrui credenza e diffonder l' errore; appunto per questo noi stimiamo più necessario di mostrar quell' inganno in cui per inavvertenza, o colpa di non avervi istituito il convenevole esame, ponno esser incorsi; quì aggiungendo alcune considerazioni provanti come la detta spontaneità possa essere mera ignoranza.

50. E primieramente, s' io mal non m' appongo, tranne il poco dovuto all' umano arbitrio, per cui disse quel saggio *video meliora, proboque, deteriora sequor* (1), tutto il rimanente della Natura appartiene a cause necessarie, e quindi la spontaneità non vi ha luogo: e il dire che una tal cosa è spontanea, che viene dal caso, da combinazione, da un concorso di circostanze, senza determinare quali poi queste sieno, è lo stesso che dire che non si conosce donde venga, donde tragga

(1) Ovid. Metam. L. VII. Ver. 20-21.

l'origine sua; è in sostanza un dire che non si sa, un confessar d'ignorare.

51. E stringendoci al proposito nostro, veggiamo che il rozzissimo colono crede nata di per se stessa l'erba che non seminata comparisce ad infestar i suoi campi; e non torresti dalla mente nè anche di alcuni men rozzi, che il suolo produca da se la panicastrella volgarmente detta *giavone*, perchè la osservano deturpar quello che pongono a riso, mentre che nell'altra precedente coltivazione non erasi manifestata, nè ve n'hanno sparsa essi poi la semenza. Ma questo è solo effetto d'ignoranza, di non sapere cioè i varj modi con cui la semente vi può esser recata, e com'ella possa eziandio rimanersene oziosa nel terreno quand'è in asciutto, per germogliar quando venga la coltivazione del riso a lei favorevole, bramando anch'essa l'acqua. Medesimamente chi vedendo su torri, campanili o eccelse muraglie uscir delle piante, stimi che da'mattoni, dalla calce, dalle pietre siensi originate, sapendo che l'uomo non vi può avere portato il seme, stima ciò per sola ignoranza, vale a dire per non conoscere i mezzi tocchi dianzi (N. 46-47.) dalla Natura impiegati per diffonder i germi.

52. Oltracciò a chi della storia scientifica si conosce è palese, che ne'secoli addietro, in quelli che rispetto alle scienze naturali erano secoli d'ignoranza, prima che vi si applicassero di proposito le osservazioni e le sperienze, quando si stava all'apparenza e al pregiudizio, credeasi massimamente alla generazione spontanea, supponendo che vermi, insetti ec. nascessero da quella carne che si vedea putrefare, da quello sterco, da quel terreno, su cui n'andavano strisciando: e parimenti dal terreno, dal fango, dallo sterco, in cui germogliavano, si credea generarsi moltissime piante. Ma poscia l'opera di varj insigni Naturalisti, chi per un ente, chi per l'altro, chi per parecchi insiemenente, mostrò l'erroneo prisco opinare, mettendo in chiaro, fino a toccarsi con mano, che tutti essi non veniano altrimenti che da proprio germe. Laonde il proteggere adesso la generazione spontanea, sarebbe un aperto indietreg-

giare in questo riguardo, un ritornar a que' tempi sì poveri di naturali cognizioni.

53. Nè si può a buon diritto pretender eccezione per gli infusorj, i quali compajon entro liquidi in cui si mise cosa organizzata ad infondere: perciocchè sapendosi ora e quanto sia ferma la vita loro da resister a freddi intensi, a forti calori, a lunghi disseccamenti (N. 45.), e come sieno atti a mutarsi massime in questi disseccamenti, per cui possono informemente ristretti simular un qualche altro atomo; e sapendosi pure in qual enorme copia ritrovinsi nell' acque stagnanti di paludi, fossi, pozzanghere e somiglievoli, da renderle fin anche torbide e formar ampj incrostamenti, onde o al disseccarsi di tali cose possono quinci e quindi trasferirsi dal vento sollevati a guisa di polvere, o nelle gran piogge spargersi ne' campi coll' acqua de' fossi traripati, o ne' giardini, negli orti con quella de' serbatoi e delle cisterne colla quale s' inaffia; ed entrar anche negli animali che di tal acqua sì popolata si abbeverano: tutto questo ora sapendosi, è pur agevole intendere che precedentemente nel fluido dell' infusione, o appiccati alla sostanza che vi s' infonde, o nuotanti nella polvere che dall' aria vi cade, possano esister essi animalucci o i germi loro, i quali in quel principio di corruzione trovando le circostanze opportune, vi si sviluppano, crescono rapidamente e moltiplicansi nell' uno o nell' altro de' modi che loro son proprj (N. 12. 17.). E i germi di così fatti animalini, stando a ciò che pur è dato osservare in altri organici enti, vi ponno essere benchè al tutto impercettibili ad occhio umano anche armato de' più fini stromenti. E di vero, se il granellino seme del fico e del gelso trovasi forse le centinaja di milioni di volte minore di questi alberi giunti al pieno loro sviluppo, un germe che fosse tanti milioni di volte più picciolo del vermicciuolo infusorio, come potrebbe mai vedersi da microscopio per quanto fosse potente?

54. E se non v' ha ragione di spontaneità per gl' infusorj, non v' ha nè meno per gli *entofiti* e gli *entozoarj*, cioè per quelle piante e per quegli animali che si sviluppano dentro

maggiori, di cui parlammo in apposita Memoria (1). Il non saper come i germi loro vi possano entrare, non è ragione che basti per dir che non v'entrino ed ivi generati vengan da se. Primieramente, siccome dianzi fu pur avvertito (N. 48.), in alcuni che si posero a diligentissimo esame, il modo di entrata s'è discoperto. In secondo luogo, per molte vie ponno introdursi i germi degli entozoarj, vale a dire per quello della generazione, col latte della nutrice, per assorbimento della pelle, tenuissimi essendo quelli di molti; e co' cibi e colle bevande: conciossiachè tali germi usciti dagl'individui co' loro escrementi o per la loro dissoluzione, possano pure attaccarsi a ciò che in altri individui poi facciali penetrare. E non sarebbe nè meno al tutto improbabile che qualche specie fosse di quelle medesime che vivono anche fuori di essi animali, sì perchè alcuni di tali vermi ai congeneri loro esterni somigliano, sì perchè la mutata apparenza può esser dovuta al trovarsi passati a nuova condizione di vita (N. 64.).

55. Che che poi siane di ciò, come per l'entrata de' germi de' parassiti nell'ente organico, e per lo passaggio loro dall'una all'altra parte di esso, suolsi obbiettare la strettezza de' fori e de' condotti naturali in paragon della mole di qualche germe; notiamo da prima qualmente eziandio corpi stranieri, cioè frammenti di vario genere, aghi, spilli ec. trovinsi non di rado in organi o tessuti animali anche distanti da ogni esterna comunicazione, senza che appaja come vi sien penetrati: e facciamo poscia osservare, che oltre la tendenza che i germi aver deono verso il luogo pel quale furon creati, e la forma loro la più acconcia per insinuarvisi, gli organici tessuti viventi hanno la proprietà di estendersi molto ed ampliare al bisogno le loro aperture (N. 48.). È palese quanto si allarghino gli stimmi e gli stili all' epoca della fecondazion delle piante (N. 27. 29.); quanto negli animali il condotto che mette il

(1) Sulla *fersa* del gelso, e in generale sulla produzione degli esseri che vivono in altri viventi; inserita nelle Memorie dell' Accad. agr. di Verona. Volume XXIII.

parto alla luce. Chi vede un' intera gallina, un coniglio nel ventre di un mezzano serpente, un uomo in quello d'un boa, per esser questi in proporzione dell'apertura allo stato suo naturale, sì voluminosi, dovrà forse dire che la gallina, il coniglio, l' uomo, si fossero spontaneamente generati dentro que' serpi?

56. È noto, dicono alcuni a sostegno della spontanea generazione, è noto che dentro un certo giro di anni la sostanza del corpo animale tutta si cangia. Ora in questo processo di continua scomposizione anche i germi picciolissimi degli entozoarj dovrebbero scomposti espellersi dall' individuo vivente, lasciandonelo affatto privo, e quindi incapace di più generare simili parassiti e trasmetterne, se da soli germi proprj essi ognor provenissero. Al che tre cose si offrono in risposta. L' una che, quand' anche per la detta guisa i germi degli entozoarj, e noi diremo eziandio degli entofiti, si avessero a discacciare dall' animale, pure come ciò non si farebbe che successivamente, i restati potrebbero sempre di mano in mano riprodurne degli altri, e mantenervi sempre quelli che serban la specie. La seconda, che sebbene tutti per tal guisa i germi venissero estrusi, entrar ne potrebbero casualmente degli altri ne' modi mentovati di sopra (N. 54.). E la terza, non avere la forza vitale del soggetto alcun potere su ciò ch' è provveduto di vita propria come sono i veri germi. Questi resistono e alle forze digestive e alle assimilative, sempre restando intatti e senza punto partecipare alla sorte de' tessuti dell' individuo entro cui se ne giaciono, come altrove s' è dinotato (N. 47.). Il perchè nè meno quest' obbiezione porge verun appicco a supporre in entozoarj od entofiti generazione spontanea.

57. Più che gl' infusorj, ed entozoarj ed entofiti, appicco a spontanea generazione, dar potrebbero i rospi che talvolta rinvengonsi chiusi ne' tronchi degli alberi o in duri macigni; poichè certamente per entrarvi passar non poterono da quegli angustissimi fori o minime fessure che vi si scorgono. Se non che, se i rospi non poterono passare per ivi, passar vi poteron lor uova coll' acqua, o piovana sollevate insieme e trasportatevi

dal vento, o pure scorrente da qualche superiore pozzanghera. La scolopendra elettrica, insetto che vive di preferenza nei siti umidi, essendosi, al riferire del Blumenbach, ritrovata alle volte ne'seni frontali degli uomini che per anni soffrirono mali di capo insopportabili, avrebbe pur fatto credere d' esservisi generata spontaneamente, chi non avesse avvertito che allo stato di minimo bacherozzolo o d' uovo potuto avea di leggeri insinuarsi pel naso. E ancor più a tale spontanea generazione sembrerebbe dare appicco i vermi che si trovasser nelle uova di polli, poichè il fitto guscio non lascia immaginare alcun mezzo di entrata. Leggesi nelle Memorie dell'Accademia agraria di Verona (1), che un *ascaris galli* lungo circa due pollici uscì vivo da un uovo che, al fuoco rappreso erasi rotto per sorbirlo. Ma il Sig. farmacista Bertoncelli di cose naturali ottimo conoscitore, il quale ne diede la relazione, spiegava il fenomeno dicendo, che l' animaluccio, generatosi negl' intestini de' quali è proprio, si era ancor piccino insinuato per l' ovidutto all' ovaja, ove appiattatosi in un uovo che stava in formandosi, era con esso cresciuto, e al vestirsi di guscio trovossi per sempre imprigionato: e con tale naturalissima spiegazione non ebbe punto bisogno di ricorrere a generazione spontanea, come avrebbe per avventura fatto altri che del modo, con cui potesse il verme ivi penetrare, fosse stato ignaro.

58. E all' ignoranza del modo di trasporto del germe, e non ad altro, si appoggia l' avviso di Burdach, il quale al riferire del Liebig (2) « considera l' insetto della scabbia come il « prodotto d' uno stato morbido; del pari i pidocchi presso i « fanciulli, le conchiglie negli stagni, le piante marittime nei « dintorni delle saline, le ortiche, certe erbe, i pesci nelle « acque stagnanti di pioggia, le trutte nelle acque delle mon- « tagne ec. potrebbero secondo lo stesso Naturalista, avere « un' origine pressochè simile. Così un terreno composto di « roccie disgregate di vegetabili putrefatti, di acqua di pioggia,

(1) Volume XII, pag. 253.

(2) Chimica organica. Traduzione italiana, pag. 79.

« di acqua salata ec. avrebbe la facoltà di generare delle con-
« chiglie, delle trutte e delle salicornie. » Le quali asserzioni, sebbene di personaggio per tanti altri riguardi sì chiaro, essendo a sufficienza confutate da ciò che si disse antecedentemente, senza fermarci a combatterle quì davantaggio, noi passiamo piuttosto a mirar le stranezze a cui tale opinione sarebbe per condurre.

59. Ed in vero, se le conchiglie degli stagni, le piante marittime ne' dintorni delle saline, i pesci nelle acque stagnanti di pioggia, le trote nelle acque delle montagne ec. ec. nascer ponno da se, perchè non dovrebbero nascer da se tutte queste specie anche altrove? E se nascer ponno da se, perchè aver esse pure le loro uova, i loro semi? Perchè tanta diligenza della Natura nella formazione, perfezione, conservazione e sviluppo de' germi? Non sarebbe tutto questo inutile se tali esseri potessero farsi da se medesimi?

60. E se da se medesimi possono formarsi questi esseri, perchè non potersi formare eziandio quelli di altre simili specie, ed anche i simili a queste? E perchè non si vedrebbe quindi farsi da se medesimi anche di quelli che più cadono sotto gli occhi nostri, un cavallo, pogniam figura, una pecora, un filugello? Qual ragion vi sarebbe che uno stagno montano producesse una trota, più che una foresta produca un lepre, un lupo, un uomo selvaggio?

61. Dal toccato quì sopra (N. 60.) si vede non potersi dire spontanee alcune specie senz'ammettere che ne sieno pur altre; imperciocchè non si possono segnar i limiti che le separino dalle altre dello stesso genere: e se tutto il genere v'è compreso, non si ponno segnar i confini che lo discernano dagli altri della stessa famiglia: e se a tal condizione si trova l' intera famiglia, non è facile segnar il termine che la separi dalle altre dello stesso ordine: e se tutto l'ordine vi soggiace, non è facile fissar il confine che lo separi dagli altri della medesima classe. E così via via discorrendo, si vien necessariamente ad unire l'ultimo organico oggetto col primo, coll'uomo

l' infimo de' vegetabili, questo col sasso che da germe proprio non formasi, e quinci l' uomo col medesimo sasso; della quale stranezza non sappiamo se si possa mai dar la maggiore.

62. Che se pur si ammettesse che alcune specie soltanto potessero soggiacere alla spontaneità, quali dovrebbero esser queste precisamente? Le più semplici, le minime o più disprezzate, le parassite? Non pare, se dal detto dianzi voglionsi spontanee non solo esilissime crittogame, ma piante eziandio di qualche mole; non solo vermi od insetti, ma eziandio rettili, come il rospo, e pesci non piccoli, come la trota. E poi chi anche solamente alle più semplici, alle minime o più spregevoli, alle parassite, la spontaneità limitare volesse, avrebbe egli ragionevole appicco di farlo? Omettendo che il più semplice ente organizzato può non essere quale apparisce allo sguardo, conciossiachè al microscopio si veggano comparir parti che prima non comparivano, e quanto è più fino o possente lo stromento veggasi divenir figurato ciò che sembrava informe; questo omettendo, benchè sogliasi considerar più perfetto quell' essere in cui si eseguiscono più funzioni, od una funzione in grado più eminente, con organi più numerosi o più complessi; tuttavia non ci vuol certo inferior magistero ad ottenere con minore composizione il simile a ciò che si ottiene con una assai più complicata: nè l' organico ente che con grande economia di mezzi eseguisce tutte le principali funzioni proprie della vita, sviluppo cioè, nutrizione, crescimento e riproduzione, acchiude minor artifizio di quello che vanta in essi mezzi maggiore sfoggio e ricchezza. Se nella Natura la complicazione è ammirabile per l' esattissimo accordo di tante parti, la semplicità non è meno pel suo riunir tanti effetti in una che sembra medesima causa.

63. Quanto alla picciolezza ed abbiezione, osserviam primamente che anche ne' minimi e più vili oggetti può trovarsi la più squisita organizzazione. Veggasi lo stesso acaro della scabbia, la cui descrizione trovasi eziandio in Alibert (1).

(1) Malattie della pelle. Traduzione di Venezia, pag. 332.

Il monocolo apode, uno di que' trivialissimi insetti che dicemmo rivivere dopo esser rimasti assai tempo disseccati (N. 45.), vuolsi abbia fino a due milioni di articolazioni. Organizzazione sì squisita riesce tanto più maravigliosa, quanto che ristrette in così piccola massa tante parti ci offre sì bene distinte. Una macchina che in minutissimo contenga ciò che in una più voluminosa comprendesi, non è forse in se medesima più ammirabile? Non sono forse le incisioni più minute, purchè precise, quelle ch' esigono un lavoro più fino, e più mostrano l' abilità e la maestria dell' artefice?..... Ed osserviamo in secondo luogo, che gli enti minutissimi, appunto per essere sì minuti, avrebbero maggior ragione, maggior bisogno di venire da germe proprio, il quale imprima lor peculiarissime leggi d' organizzazione e sviluppo, leggi le più strettamente parziali, per poter essi nella lor minoranza serbarsi il diritto od il pregio d' individualità, senza che il contatto di altri loro il rapisca. E come mai, essendo essi tanto più minuti anche della più minuta polvere, come mai si conserverebbero per secoli e secoli, e nelle più svariate circostanze, identici sempre, se non avessero le più salde leggi di vitalità loro propria, che alle forze delle maggiori moli resistesse, e la confusione impedisse con altri oggetti pur minimi. Egli è già manifesto che le cose che non hanno vita lor propria, le inerti o sia minerali, tanto più vengono attratte da altre, tanto più si uniscono e s' immedesimano per comporne una sola, quanto più sono minute, potendo così presentare un numero maggiore di contatti o punti d' azione: laonde per congiungere cose diverse e combinarle in un tutto, cominciasi dal disgregarle, dal ridurle minute al possibile, polverizzandole o mettendole al fuoco. Il che mostra chiaro che gli esseri minuti affine di serbarsi ognor distinti abbisognano di maggiore sforzo che gli altri; e quindi a maggior ragione per essi esigerebbesi il germe specifico per mantenere intatta la successione della loro specie.

64. Nè quanto ai parassiti avvi presa alcuna di credere che, perchè si sviluppano, si nutrono e crescono colla sostanza

di viventi, a' quali rimangono pure uniti, possano non provenire da germe proprio. Osservando la serie degli enti organici scorgiamo alcuni, come idatidi, avere il viver loro con quello del soggetto in cui stanno, sì strettamente legato che, morendo lui, essi pur tosto muojono; ed altri entozoarj al loro soggetto sopravvivere alquanto: alcuni parassiti non dimorare che in una parte dell' individuo; ed altri starsene in più, ma solamente in soggetto di quella specie; ed altri mostrarsi indifferenti a rimanersene sopra più specie, ma però sempre attaccati a viventi, essendo, come i predetti, parassiti nello stretto senso. Alcuni, come gli estri, una parte di lor vita conducono dentro vivi individui, ed una parte fuori di essi; ed altri, come l' acaro reduvio, se ne vanno a soggiornar sui viventi sol quando loro se ne offre il destro. E gli altri che vivono al tutto da se, alimentansi però sempre di enti organici, essendone quinci, sebbene in significazione più lata, anch' eglino parassiti. Ed in vero, l' uomo vive d' animali e di piante. Gli animali anch' essi e di altri animali e di piante si cibano; e le piante stesse o di altre piante o di animali scomposti specialmente pur si nutricano. Nè vuol far troppo differenza il nutrirsi i parassiti propriamente detti di ciò che suggon da vivi; poichè di vivi si nutrono anche parecchi altri esseri. Vivi in fatti son tutti i semi che noi acciacchiamo in bocca per ammazzarli; vivi i frutti non secchi o corrotti; vive le piante che il bestiame ciba nel pascolo; per tacer quelle prede che da molti animali di varie classi ingojansi ancor palpitanti, ed anche intatte per essere poscia estinte nel ventre di essi. Cotalchè simile essendo la condizione di tutti gli enti organici nell' aver la lor vita dipendente da altri, e sol variandone il modo, non avvi motivo di spontanea generazione a tal riguardo più per questi che per quelli. E d' altra parte, se qualche differenza esistesse nella necessità di provenire da germi proprj, dovrebbe questa pei parassiti propriamente detti esser maggiore, e tanto maggiore quanto più grande intimità essi hanno col soggetto loro, sopra o dentro il quale sen giaciono.

Imperciocchè quanto più le cose hanno stretta relazione, quanto più stanno unite, tanto più son propense e disposte a insieme confondersi e immedesimarsi, e il mantenersi distinte costa più sforzo. Se per tanto il parassito forma cosa distinta dal suo soggetto, se per esempio il pidocchio umano, se l' acaro non è uomo, ma forma un essere individuale, non confondibile coll' uomo, è perchè le leggi di vitalità, di organizzazione sono molto diverse (N. 73.); nè tali esser potrebbero se identico ne fosse il principio. Il perchè, siccome si disse de' minimi (N. 63.), o non avvi differenza veruna sulla necessità di provenire da proprio germe per gli esseri parassiti, o se avvene alcuna si è che per essi la necessità d' un germe proprio sarebbe anzi maggiore.

65. La stessa durazion delle specie domanda che tutti i viventi, non da semplice accozzamento di circostanze, ma da proprio germe procedano. Se procedessero dalle circostanze, essendo esse come un numero grandissimo di elementi atti ad unirsi in guise pressochè infinite, n' addiverebbe che non incontrandosi poi nella guisa stessa di prima, un nuovo essere dovrebbe uscirne; sicchè novelle specie comparirebbono collo sparire delle attuali. Inutili si renderebber gli studj del Naturalista per ordinarle ne' suoi cataloghi: anzi nè men vera scienza naturale dar si potrebbe, ma solo disordine e confusione, tale essendo l' effetto proprio dell' accidente, del caso, di ciò che noi diciamo combinazione di circostanza.

66. Ma quantunque assai validi, e attinti da varie fonti, sien gli argomenti fin ora addotti, che affatto escludono la generazione spontanea; da un' altra fonte ci piace attingerne che ce ne offre di non meno forti, se anzi non sieno tali da troncar anche soli di netto l' intera quistione. E questa fonte si è la formazione stessa de' corpi, che noi riguarderemo e storica e fisicamente.

67. E quanto alla storia, ci dice il Genesi e cel ripete quasi a inculcarcelo bene e ribadirlo, che l' erbe e gli alberi, cioè tutte le piante furono create perchè si moltiplicassero

pel seme loro, ed anche gli animali perchè pure si propagassero ciascuno secondo la propria specie: e tal cognizion primigenia colle altre infallibili trasmesse dall' oral tradizione per migliaja e migliaja d' anni, da Mosè finalmente dottissimo anche in tutte le scienze che a' suoi tempi vantava l' Egitto, fu consegnata alle Sacre Carte, e integra a noi tramandata. E quì vuolsi di passaggio considerare che, sebbene la Scrittura ove trattasi di cose meramente fisiche, cui non è suo scopo insegnare, essendosi anzi queste lasciate alle ricerche degli uomini, *mundum tradidit disputationi eorum* (1), si esprima secondo l' apparenza adattandosi alle comuni credenze per esser intesa da tutti; pure ove anche la Religione o la Morale, cui soltanto essa mira di preferenza, vi potessero direttamente o indirettamente aver relazione, ella punto all' apparenza non si accomoda, ma le va contro apertissimamente, come nel caso nostro, benchè dessa apparenza fosse tale da impor anche, e sì lungamente a tanti saggi, e da non potersi appieno sgombrare, chi voglia la cosa in tutto ridotta a fatto evidente, se non cogli studj più costanti, ordinati e profondi.

68. E passando alla formazione considerata nell'altro aspetto soprammentovato (N. 66.), egli è certo che magistero assai differente presiede alla formazione de' corpi minerali od inorganici, ed a quella degli organizzati o viventi (N. 5. 7.). Quelli sono l' effetto di leggi puramente meccaniche o chimiche, e questi di leggi anche proprie della sola vita: e le une si differenziano tanto dalle altre, che ciò che dalle une vien formato, dalle altre viene distrutto. Appena cessata la vita giacendo gli organici tessuti in balía delle chimiche leggi, ne vengono scomposti e ridotti ad elementi inorganici per quinci obbedire alle forze primitive che ad essi competono (N. 6.) e formar altre combinazioni: e la fermentazione, la putrefazione, la corruzione altrimenti non sono che l' analisi naturale de' corpi organizzati, i quali tolti al dominio di vita, a quello

(1) Ecclesiastes. Cap. III. Vers. 11.

si lasciano delle inorganiche forze. Queste dunque han per uffizio di sfare quello che sotto l'impero della vita si fece (1). Ed oltre sfare quello che sotto l'impero della vita s'è fatto, esse, le forze inorganiche, sono pure incapaci di formare gli organici prodotti, quali sarebbero la gomma, lo zucchero, l'albumina, il grasso e somiglianti.

69. Il trovarsi cotanto divario tra l'operar delle forze componenti i corpi inorganici e l'operare di quelle degli organizzati, fece sì, che se le une si dissero *chimiche*, le altre furon dette *vitali*; ovvero se pur queste in qualche guisa si vollero chimiche, due sorte di chimica fu d'uopo distinguere, cioè chimica *inorganica* e chimica *organica*. E discendendo a qualche particolare sulle differenze di esse, una sarebbe che nella inorganica gli atomi composti di primo ordine sono binarj, nei quali un elemento entra d'ordinario per un atomo, e l'altro per più: verbigrazia uno di acido solforico ne ha uno di zolfo e tre di ossigeno. Ed all'opposito nella organica essi atomi composti di primo ordine formansi generalmente di più di due elementi; e varj atomi di un elemento si combinano con varj d'un altro per formare un solo atomo composto. L'acido tartarico, per esempio, ha 4 atomi di carbonio, 4 d'idrogene e 5 di ossigeno. Altra essenzial differenza si è, che nel composto inorganico si può avere il radicale separato dall'ossigeno, e non nell'organico. Il perchè, restando cogli esempi suddetti,

---

(1) Che se talora il composto organico, o qualche sua parte, dura più o meno anche cessata la vita, come peli, lana, seta, unghie, corna, penne, legni ec.; egli è perchè in quel composto gli elementi furono collocati in guisa da non poter operare secondo le ingenite forze, sia per la coesione del nuovo composto, la qual coesione sappiamo essere sempre contraria all'affinità; sia per essere gli elementi ivi posti fuori della sfera di loro sensibile attività; per cui abbisogna od umido o calore, od anche forza meccanica che, disgregando il composto, possa dar luogo al giuoco delle scambievoli forze degli elementi, come suolsi far anche pe' corpi inorganici, perchè si combinino gli elementi loro secondo le innate loro tendenze, non si combinando se non sieno sciolti, cioè messi in condizione di esser liberi gli uni a tiro degli altri, e poter quinci agire soltanto conformemente alle rispettive originarie tendenze.

dall'acido solforico si può aver separato lo zolfo; ma nell'acido tartarico non si può aver dall' ossigene separato il radicale carbonio-idrogene; vale a dire, non si può ad esso toglier l' ossigene senza scomporlo interamente, senza fare cioè, che non sia più quel radicale. Oltre le due differenti maniere in cui si combinano gli elementi nella natura organica, vuolsi notare, che corpi composti degli stessi elementi e fin anche nelle medesime proporzioni, hanno proprietà chimiche al tutto diverse. Così, pogniam caso, lo zucchero, la gomma ec. sono composti di ossigeno unito all' idrogene ed al carbonio, e nissuno ha proprietà acide, come gli acidi acetico, succinico, citrico, formico, sebbene anche l' acetico ed il succinico contengano meno ossigene dello zucchero e della gomma (1). La cellulosa, la fecola od amido e la destrina, hanno 24 di carbonio, 20 d' idrogeno e 10 d' ossigeno, per ciò dette *isomere*; come pure l' albumina e la caseina aventi 53,5 di carbonio, 7 d' idrogeno, 23,8 di ossigeno, e 15,7 di azoto. Di che si vede che la potenza vitale imprime a' suoi composti proprietà superiori a quelle de' loro inorganici elementi: e siccome nei varj organi della macchina vivente cogli elementi medesimi sa formare diversissimi composti, convien anche ammettere che vi operi, a così dire, variamente la vitalità propria di ciascun organo.

70. E dalle cose accennate chiaramente risulta che nei corpi organici o gli elementi rinunciano affatto alle tendenze lor proprie, alle insite loro forze, assumendo in cambio quelle che nelle varie specie, nelle varie parti degl' individui, nelle varie circostanze imprime loro la vita; oppure se alle forze primitive affatto non rinunciano, tuttavia non operan punto in vigore di esse, ma bensì in vigore di forze derivate, cioè secondarie, composte (2). E poichè tale derivazione si può effettuare soltanto durante il nodo vitale, conciossiachè sciolto questo, lasciati gli elementi in signoria di se stessi, riprendendo

(1) Bizio. Rivista critica ec. Venezia 1841; pag. 104-9.

(2) Bizio. Op. cit.; pag. 132.

ad agire colle primitive lor forze, scompongano anzi quello che prima astretti dalla forza vitale aveano composto; ne viene che, qualunque dei due partiti si ammetta, rimane sempre indubitato, che le forze fisiche inorganiche non ponno dar luogo ad organica produzione.

71. E se fuori del poter delle forze fisiche, e solo in quello del magistero efficacissimo della vita è il produrre l'atomo organico, gl' immediati materiali dell' essere organizzato, tanto più fuori del potere di esse forze e solo in quello del vital magistero sarà la distribuzion regolare di essi materiali per la formazione de' varj tessuti, delle varie parti, de' varj organi, che l' essere organizzato compongono; formazion progressiva, sì architettata e ammirabile, che la mente stessa non può ben comprenderne il procedimento. Più che formazione ti appare cosa già preformata in un minutissimo scorcio che si vada svolgendo; un preordinato disegno che si eseguisca e si compia da intelligenza secreta. E ciò succede con tale esattezza, che anche le più picciole note della specie, per complicata che ne sia l' organizzazione, vengono ricopiate nell' individuo, fino al medesimo pelo ed ai più dilicati caratteri di esso.

72. E il detto sviluppo è tanto più portentoso, quanto che sempre move da muco uniforme o semplicissima cellula od otricelle embrionale, simile in tutti gli esseri. Il qual rudimento sì semplice si va poi mutando in ciò che nelle varie parti è destinato a formare. E la meraviglia cresce ancor maggiormente qualor si consideri che (1) sì grande varietà di esseri

(1) Tranne alcune minerali sostanze diversificanti secondo le specie e le parti loro, come il calcio, il sodio, il potassio, lo zolfo ec. Nell' essere vivente oltre alcune materie comuni anche al regno minerale, come le ora dette, e l' acqua e l' acido carbonico, avvi sostanze *organiche*, esempigrazia, lo zucchero e l' urea, le quali si producono soltanto dalla vita; e sostanze *organizzate*, come l' albumina, la fibrina, la cellulosa, le quali oltre abbisognare, al pari che le precedenti, del magistero della vita per formarsi, cessata questa, in breve si distruggono putrefacendosi, avendo pochissima stabilità, o sia gli elementi uniti fra loro con forze assai deboli. Ciò ch' è organico od organizzato differisce poi da ciò ch' è inorganico:

e di organi loro, e di tessuti costantemente risulta dagli stessi principj, dagli elementi medesimi, cioè ossigene, idrogeno, carbonio ed azoto; i tre primi comuni ad entrambi gli organici regni, e l' ultimo più proprio degli animali. Quale stupendo arcano artifizio non esigesi mai per variare cotanto ciò ch' è lo stesso?

73. E rispetto a tale artifizio, o sia leggi di formazione per le singole specie de' viventi, d' uopo è considerare che differendo esse specie e pel luogo e pel tempo, e per le circostanze confacenti a ciascuna, e per le abitudini, le funzioni, la forma ec., e differendo in più riguardi anche appariscenti, un solo de' quali potrebbe per avventura esigere variazione in tutto il complesso, come in macchina ben ordinata non puossi variar un pezzo senza variar tutto il resto; egli è pur necessario che ogni specie abbia un artifizio particolare, o sia leggi più o meno proprie e per la qualità d' alimento che trae dall' esterno, e per la guisa d' introdurlo, e per comporne il sangue o il fluido che lo rappresenta negli animali e il sugo proprio delle piante, e per le secrezioni e le escrezioni, e per l' assimilazione in vigor della quale ogni parte si prende sol ciò che le conviene, se lo adatta, immedesima e il fa partecipe della stessa sua vita: in somma ciascuna specie di viventi

---

1°. Perchè l' atomo composto di primo ordine inorganico è sempre binario, e ternario almeno l' organico; cioè generalmente ternario nel vegetabile, e quaternario nell' animale.

2°. Perchè in detto atomo inorganico un elemento entra sempre per un solo atomo, e nell' organico ognuno vi entra per più atomi.

3°. Perchè nell' inorganico si può avere separato il radicale, e non nell' organico.

4°. Perchè nell' essere organico gli stessi elementi possono dar luogo a composti assai diversi secondo il diverso organo.

5°. Perchè nell' inorganico ove un elemento si possa unire ad un altro in varie dosi, si procede successivamente, formandosi, per esempio, prima i protossidi, e poscia i deutossidi; prima l' acido solforoso, e poscia il solforico; cioè prima quelli che han meno ossigeno, e poi quelli che ne hanno più: ma nell' essere organico l' unione de' varj elementi per formare il perfetto atomo si debbe effettuare al punto medesimo, senza bisogno di successive combinazioni fatte in diverse riprese.

che non alligna, che non si sviluppa, se non dove e quando si trova ciò che all' esercizio di ogni peculiare funzione della sua vita si addice, aver dee norme proprie per la formazione de' rispettivi atomi organici, de' rispettivi organici prodotti, de' rispettivi tessuti, de' rispettivi organi, de' rispettivi apparati; norme proprie per la rispettiva distribuzion delle membra, per la rispettiva collocazione, pel rispettivo numero, per la rispettiva forma, dimensione, proporzione; per la rispettiva quantità de' pezzi onde un membro componesi, per la rispettiva lor connessione, sostanza, vestito ec. ec. Cotalchè, siccome l' uomo fu detto *microcosmo* o sia picciol mondo o speciale mirabile ordinamento, come importa il greco vocabolo *cosmos* che in origine suona *ordine*, *bellezza*; così microcosmi rispettivamente dir si potrebbero tutte le specie degli enti organici, essendo altrettanti complessi di leggi o norme più o meno particolari, ciascuna tendente nel più mirabile accordo, nella più esatta armonia, a fare che l' essere sia quello che è, e non altro. Le quali norme particolari, cotanto proprie e adattate alle singole specie, non possono essere effetto delle generali semplici forze fisiche o chimiche, ma debbono dipender necessariamente da peculiare ordinamento vitale, da particolar forza organica.

74. E quì bene apparisce quanto grande sia la stranezza di chi suppone le trasformazioni; che, per esempio, l' uomo da ostrica o pesce, arrivasse per gradi all' attuale suo stato; e che di tal guisa passandosi dall' una all' altra specie, sola una legge gradatamente modificata governi tutte le inorganiche e le organiche formazioni. Imperciocchè, lasciando pure che siffatta supposizione è appieno contraria alla storia, che nissuno di questi passaggi ricorda avvenuto in tante migliaja di anni; contraria alla osservazione che non ne ravvisa avvenir alcuno al presente; e contraria quindi alla sana ragione che vuol si studii la Natura considerandola qual essa è in fatto, e non quale ad altri la può dipingere l' immaginazione: questo lasciando, egli è impossibile, chi miri la cosa un po' attentamente,

chi si conosca solo anche un tantino di fabbricazione e di meccanica, egli è impossibile che una macchina, un qualsiasi edifizio formato con ispecial suo disegno, con norme sue proprie, si trasmuti senza prima distruggersi, in altro di proporzioni e di struttura diverso.

75. E a detta forza particolare, che presiede alla formazione degli esseri organizzati operando conformemente a uno scopo determinato, si debbe non solamente lo sviluppo, la nutrizione e il successivo crescimento di essi, ma eziandio la riparazione di parti che l'individuo va logorando o perdendo, come le unghie del cavallo, del bue ec. che si consumano col camminare; le corna de' cervi che sogliono cader tutti gli anni sottentrandone altre; il pelo di quegli animali che a certe stagioni lo cambiano; le penne degli uccelli che si rinnovano nella muda; la pelle degl' insetti allo stato di larva; quella de' serpi, e il guscio de' gamberi e degli scorpioni che ogni anno vengon mutati, del pari che le foglie degli alberi. Ed oltre questa riproduzione ordinaria v' ha pure l' insolita delle parti che perder si ponno per varj accidenti; in virtù della quale si riempion le piaghe, si rimarginano le ferite, si congiungono l' ossa che provaron frattura, e se ne rigenerano anche talora de' pezzi assai grandi. La quale facoltà riproduttiva tiene del maraviglioso non solo nelle piante che rimettono sì agevolmente lor braccia o sia i rami recisi, e lor chiome o sia foglie di cui vengano fuor di tempo nudate; ma eziandio in parecchie specie di animali a sangue freddo. Il braccipolipo sa rimettersi ogni parte che gli si tolga (N. 17.). Nella tenia ogni articolo può crescere in un verme intero: e similmente del lombrico terrestre e del variegato, un picciol pezzo può in qualche mese diventare un animale compiuto. Anche le najadi possono dividersi in varj brani, e ciascun poi crescere in perfetta najade. Le attinie riproducon pur esse le parti che loro si tagliano, e queste alle volte divengono altri animali. E parimenti le asterie o stelle di mare rifanno le parti che lor si distaccano, le quali riescon poi anche nuovi individui.

Rinascono le zampe alle salamandre; e all' acquatico rivenne anche un occhio. I gamberi, se mai perdono le branche od i piedi, tosto li rimettono, o se li fanno cader essi medesimi se lor dieno angoscia, come quando loro si ammacchino o si tocchino con ferro caldo. Le lucertole riproducon la coda; e i lumaconi, oltre la coda, riproducon la testa, se mai venga loro tagliata. A questa facoltà che possede la macchina organizzata di rimettersi da se medesima de' suoi danni, di rifarsi delle sue perdite, cotanto utile alla propria conservazione, nulla di somigliante ponno vantare le mere forze meccaniche o chimiche.

76. Ma la detta possanza generatrice è pur soggetta per ispeciali combinazioni a deviare dal retto suo fine, come nelle circostanze morbose in cui produce soprossi o pseudomembrane o attacchi preternaturali di visceri in conseguenza d' infiammazioni; e devia massimamente pe' bastardi, come s' è già tocco altrove (N. 7.), e pe' mostri che, a paro di essi bastardi, tornano assai più frequenti ne' vegetabili coltivati e negli animali domestici, che in quelli abbandonati alla sola Natura, sia che la mostruosità venga per eccesso di parti, come ne' fiori doppj e ne' proliferi, negli uomini che hanno sei dita e negli animali che nascono con più teste; o per difetto, come ove manchi un braccio, una gamba od altro membro, o per traslocazione, come quando non trovasi il cuore od altro organo al sito in cui dovrebbe essere naturalmente; o per mala conformazione, come ove in cambio dell' umano abbiavi un labbro di lepre. E a siffatta deviazione appartengono pure le razze, che si allontanano dall' original della specie per caratteri che costantemente passano ai posteri; e le varietà, in cui i devianti caratteri ereditarj non sono sì costantemente serbati. Ed appartengonvi eziandio quegli scambj che non di rado succedon pe' sessi, dandosi all' uno ciò ch' è proprio dell' altro, come quando la femina in qualche riguardo tiene del maschio avendo per esempio barba quella dell' uomo, corna che non le competono, quelle di certi animali; o il maschio tien della femina, avendo, esempigrazia, latte o soverchia dilicatezza.

E ad essa deviazione può ascriversi, almeno in parte, anche la tanta diversità de' temperamenti, che nelle specie medesime, nelle razze e nelle varietà si riscontrano, sia che v' influisca lo stato della primitiva fibrilla, o la prevalenza nella macchina di questo o quel viscere, di questo o quel sistema, o pur altro..... Or siccome le leggi semplicemente meccaniche e chimiche son da per tutto e sempre le stesse, nè mai deviano o diversificano ne' loro effetti; così la detta deviazione e diversificazione diviene altra incontrastabile prova, che da esse leggi l' essere organico non può derivare.

77. Che se al di là delle semplici forze fisiche, o sia meccaniche e chimiche, trovasi per ogni riguardo la fabbrica dell' ente organizzato, e se questo sì maraviglioso lavoro vuolsi governare e sorreggere dalla forza vitale, si debbe assolutamente concedere che la forza vitale sempre abbia luogo dov' è organizzazione, e nel senso più stretto, in quello in cui è dato scambiare la definizione colla cosa da definirsi; di modo che siccome si può dire tanto che il triangolo è la figura di tre lati e tre angoli, quanto che la figura di tre lati e tre angoli è il triangolo; del pari nel riguardo nostro può dirsi tanto l' essere organizzato è quello che ha vita, quanto, quello che ha vita è l' essere organizzato; non vi potendo essere nè organizzazion senza vita, nè vita senza organizzazione. Di che si vede, che ogni essere organico da essere organico vuol provenire, da un principio specifico provveduto di vita e di organizzazione, da uno specifico *che*, il quale avendo vita ed organizzazione, e da cui l' individuo si *generi*, noi diciam *germe*; il quale fin dalla sua creazione debbe avere avuto vita ed organizzazione ad un punto, cioè quando creossi, si creò già essere organizzato. Ed intendiamo quì germe nella significazione più generale, vale a dire tanto d' individuo od organismo già sviluppato che trovisi nel pieno esercizio di sue funzioni vitali, quanto di embrione eziandio minutissimo, in cui l' organizzazione speciale non sia che ideata, e la vita non sia che in potenza: e tanto se i varj germi si vogliano esistenti fin dai

primi creati individui e non facciano che andarsi svolgendo; quanto se dagli specifici individui si vadano successivamente formando, il che più contenta la corta nostra immaginazione. Per germe in una parola intendiamo la ragione di vita, la derivazione da ente organico atta a riprodurlo, qualunque nome ella si abbia o dar le si voglia, di qualunque grandezza ella sia, per qualunque mezzo producasi, e in qualunque modo, in qualunque tempo si distacchi dall' individuo madre.

78. E che tale sia il vero concetto di germe nel suo generalissimo senso, dicasi *uovo*, *seme*, *gemma*, *spora*, *tubero*, *gonidio* od altro, e in qualsivoglia cosa consista, fosse pur anche mero atomo organizzabile da doversi organizzare soltanto nella foggia precisissima la quale è propria di quella specie; che tale sia, ripetiamo, il concetto vero di germe nella sua più generale significazione, senza bisogno di supporvi altro requisito, senza bisogno di supporvi già preformato un intero sistema di organi, lo dimostra non solo il vedere che tengono per uovo e per seme l' uovo ed il seme anche quelli i quali non sanno che un tal sistema contengano, e ne si teneano anche prima che tal sistema di organi vi si discoprisse; ma il considerare eziandio che nissuno dei nomi detti rinchiude in se l' idea di preesistente apparato. *Uovo* in fatti, lat. *ovum* dal greco *ωον*, se vogliasi riconosca etimologia, la riconosce da *οιον solo*, perchè negli uccelli in cui attrasse da prima l' attenzione, se ne depone uno solo per volta: *seme*, lat. *semen*, sia che venga dai greci elementi *ἐ μενει* (mutato lo spirito di *ἐ* in *ς*) significando attende se stesso, in se rimane, perchè identico sempre si va rinnovando e serba la specie sua distinta dalle altre; ovvero *semen* sia quasi *serimen*, da *sero* io semino, ch' è forse dal greco *σπειρω* (levato *π*) che del pari vale seminare, spargere, diffondere, donde anche *spora*, *sperma*, che pure importan semenza, ei non suona in sostanza che propagazione, procreazione; come soltanto propagazione, procreazione suona pur *germe*, sia' che il lat. *germen*, da cui ci viene, si voglia quasi *gerimen* da *gero* porto, essendo esso il portato; o più

verisimilmente vogliasi quasi *genimen* da *gigno*, in greco *γείνομαι*, donde anche *γενος* genere, *γονη* generazione ec. ec. Non contenendo per tanto in se stesse le dette voci nissun' idea d' organo preformato, il non avercelo i microscopj ancor dimostro in alcuni germi che per la lor picciolezza od altro nomansi *amorfi*, cioè informi, non toglie punto che sieno anch' essi veri germi siccome gli altri, quando come gli altri valgono anch' essi a riprodurre; germe essendo in nostro senso qualunque derivazione da ente organizzato acchiudente ragione di vita novella.

79. E diciamo acchiudente ragione di vita novella, perchè ogni derivazione da essere organico non è germe. I residui dell' organizzazione, le parti sebbene organiche, le quali han perduto la vita, nè organizzazione nè vita ponno trasmettere: non l' organizzazione, perchè tendono anzi a disciogliere quel poco che rimane di essa per tornare affatto all' inerte materia, e formar de' composti che di questa son proprj: non la vita, perchè pel detto essa non può venire che dalla vita, o sia da organizzazione vivente. E nel vero la sperienza medesima ci dimostra come dalla farina, ch' è il grano morto, dagli olj che pure sono semi uccisi, sebben particelle di esseri organici, sebbene provenienti da organizzazione, generar non si possa pianta veruna. E il medesimo è a ripetere delle animali derivazioni, in cui la vita fu spenta, che non valgono a produr vita nè della specie loro, nè di verun' altra, benchè a nutrire la vita esse e le vegetabili sieno acconcie; anzi al nutrimento debbansi presentare così preparate e tolte dal puro inorganico stato, essendo le sole piante atte a fissar il carbonio in organica composizione.

80. Che se all' aver noi mostrato che ogni essere organico dee sempre venire da un simile essere organico, non vi essendo altra facoltà che valga a produrlo, si obbiettasse che, non conoscendosi tutte le facoltà della Natura, sarebbe almeno possibile che fra le incognite vi fosse pur quella di produr senza germe; risponderebbesi primamente che tra il possibile

ed il reale vi è molta distanza, e in scienza di fatto non si può ammettere che il reale, la possibilità non essendo ammissibile se non quando abbia in favor suo degli esempi chiari e ben provati. E si risponderebbe in secondo luogo, che per escludere una qualità da un oggetto, non occorre conoscere tutte le altre sue; basta solo conoscervi altra qualità contraria; poichè è manifesto, che le cose contrarie, o ripugnanti, a vicenda si scacciano, e l'esistenza dell'una porta necessariamente l'esclusione dell'altra: e quinci dimostrato che la vita venir non possa che da identica vita, la generazione spontanea non ha più in suo favore nè anche la fisica possibilità. Non ci vuol meno della creazione per fare essere organico senza lo specifico germe; non ci vuole men di quell'atto che produca al tempo stesso l'organizzazione e la vita (N. 77.); quell'effetto della Suprema Potenza che sola può nuove forze far comparire in Natura, o le già esistenti a suo beneplacito sospendere o modificare.

81. E affinchè meglio conoscasi l'aggiustatezza di questa conclusione che risulta da lungo variato ragionamento, non crediam disacconcio il riprender di esso quì brevemente i punti più principali, presentandoli però sotto altra forma a scemamento di noja, e così procedendo:

Se in tutte le classi degli esseri organici si è conosciuta la moltiplicazione per germi, vi sarà motivo di negarla in alcune specie, in cui non si fosse ancor conosciuta? E vi sarà questo motivo sapendosi che moltissime altre specie si trovavano in simil caso, e poscia l'attenta osservazione l'ha discoperta, sicchè l'apparenza contraria non era che mera ignoranza?

E quegli esseri che si è scoperto provenire da germi proprj, si potrà supporre che da germi proprj eziandio non provengano? Non sarebbe questo un rinunciare al conosciuto per l'ignoto contrario? al reale per l'immaginario o fantastico? Non sarebbe questo un pensare che la Natura moltiplichi gli enti senza necessità? che operi inutilmente prendendosi la briga di produr i germi quando fa anche senza di essi? E perchè

mai avrebbe ella preso tante cure, tante cautele ad assicurarsi la riproduzione per mezzo de' germi? Cotale immensità di precauzioni e di variazioni per meglio acconciarsi ai diversi casi, non sarebbe ella stata almeno superflua?

E se avviene riproduzione eziandio senza germi, perchè non succede essa mai negli oggetti più conosciuti, in quelli che l' uomo ha sempre sotto degli occhi, in quelli che gl' interessa di moltiplicare? Perchè in questi si serve egli sempre del mezzo de' germi, nè mai attende che si generino spontaneamente? perchè non ne vede egli alcuno spontaneamente apparire? Il mettere la spontaneità solo negli esseri o nei loro casi, di cui non si conosce il procedere, non è egli ammetterla appunto perchè il pieno loro procedere non si conosce, un ammetterla quinci per sola ignoranza?

Di più se avviene la riproduzione senza germe, avverrà essa in tutte le classi degli enti organici, o soltanto in alcune? Se in tutte le classi, perchè non si verifica essa colla osservazione? e se soltanto in alcune, avverrà di queste in tutte le specie, o in alcune sole? e queste quali saran propriamente? E perchè non anche le loro vicine? e perchè non le vicine a queste? Qual limite vi sarà, qual ragione che tutta così non trascorrasi l' organica serie, e l' uomo stesso non si congiunga alla bruta materia; non pongasi in questo alla condizion del macigno?

Ed anche supposto che un tal limite stabilire si possa, quali saranno le specie spontanee? Le minime, le parassite? E se sono queste, perchè vi si comprendono anche rospi, conchiglie, pesci, e piante non tali (N. 58.)? E quanto alle minime, avvi forse ragione che per la lor picciolezza non abbiano a venire da germi proprj e restino abbandonate alla ventura? Le cose minime perfette nel loro genere come sono tutte le organizzate, con parti e membra sì ordinate e sì fine, non esigono esse ugual magistero a formarle, se non forse maggiore delle grandi? e certo maggiore sforzo per serbarsi dalle altre distinte, e non confondersi o immedesimarsi con esse?.....

E i parassiti per ciò che si sviluppano, si nutrono e crescono sopra altri esseri, potranno generarsi da questi senza specifico germe? Non avranno essi leggi di vita lor proprie? E se non hanno germe specifico il quale determini leggi proprie di vita, come potranno essere distinti dal loro soggetto? Come si formeranno essi anzichè formarsi una parte del soggetto medesimo? come potrà, per esempio, il pidocchio o il verme umano anch' egli non esser uomo, o pure l' uomo non essere verme o pidocchio?..... E se i parassiti han vita propria, leggi vitali particolari da non confondersi con quelle del soggetto, leggi specialissime fino ad ogni lor organo eziandio minimissimo, come potranno esser prodotti dal soggetto che sol può produrre ciò che alle sue leggi d' organizzazione è conforme? E se esseri organici da combinazioni di circostanze, e non dai loro germi venissero, potrebbero essi mai serbare intatta la perenne successione di loro specie? Essendo proprio di siffatte combinazioni il mutarsi, e più non ritornare o assai difficilmente le identiche di prima, non dovrebbero forse ognora scomparire specie attuali, e sottentrarne di nuove, non divenendo tali esseri che quasi passeggere apparizioni di scena?

Sarebbe egli mai da supporre che, come senza germe si conservano le specie inorganiche, del pari conservar si potessero le organizzate, essendo tante e sì grandi le differenze che passano tra le une e le altre (N. 2. 4.)? ed essendo già manifesto che le forze primitive, le insite negli elementi, le quali formano le specie inorganiche, operano anzi delle organiche la distruzione, e tanto più di leggeri e più presto quanto più vengono soccorse dall' umidità, dal calor convenevole od altro agente opportuno che distruggendo la coesion del composto, metta gli elementi a tiro l' uno dell' altro, o sia in istato di poter liberamente obbedire alle primitive innate loro tendenze?

E potendo pur esser vero che non si conoscano tutte le facoltà della Natura, ne verrebbe forse per questo ch' ella ne avesse eziandio di contrarie a quelle che manifesta? che avesse da formar senza germi ciò ch' ella mostra di formare con essi?

che formasse con forze semplicemente fisiche e chimiche ciò che con queste ella distrugge? Provato essendo che una cosa è nera, sarà egli dato di poter immaginare che dessa pure sia bianca?

82. Sicchè per quanto apparisce dal presente discorso, la generazione spontanea: 1.° è contraria alla verace osservazione (N. 9. 13.); 2.° ha contrario l'argomento di analogia (N. 14. 49.); 3.° più che di altro ella sente di mera ignoranza (N. 49. 58.); 4.° conduce a gravi stranezze (N. 58. 65.); 5.° è sino anche fuori degli attuali poteri della Natura (N. 68. 80.).

FINE della Prima Parte del Tomo XXV.

MEMORIE

DI MATEMATICA E DI FISICA

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

TOMO XXV.

PARTE SECONDA.

MODENA

PEI TIPI DELLA R. D. CAMERA.

MDCCCLV.

ANNALI
DELLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE
RESIDENTE IN MODENA

continuati e scritti dal Segretario di essa
dal principio del 1850 a mezzo l' anno 1855

(*V. Memorie Tomo XXIV. Parte seconda, pag.* (1) .... (13))

---

389. Col favore della quiete civile e dell' ordin pubblico in questi paesi ristabilito potevasi compiere senza ritardo la stampa del Tomo XXIV. parte seconda delle nostre Memorie Sociali. E questo di fatto compariva in luce, appena incominciato l' anno semisecolare, ossia dai primi giorni dell' anno 1850. Il qual Volume novello veniva poi tosto dal nostro Sig. Cav. Presidente, in persona e accompagnato dal Segretario, umiliato al trono dell' Altezza Reale di Francesco V. d' Austria-Este, Auspice supremo e venerato della nostra Società, e ne riportava il più benigno e lusinghiero accoglimento.

390. Era vacante fra noi un posto di Membro Attuale, in seguito all' amara perdita dell' illustre Prof. G. B. Magistrini che sì degnamente avevalo ricoperto. Con lettera dello scrivente diramata ai Colleghi in data 8 Gennajo 1850 il Sig. Cav. Presidente proponeva a succedergli uno de' seguenti rinomati Dotti italiani: li Signori Bellavitis, Capocci, Frisiani, Piria, Porta, e Turazza. La maggioranza de' voti essendo riuscita eguale pei due primi di essi, nel qual caso lo Statuto all' Articolo VIII. rimette la decisione ad un voto di preponderanza del Presidente, questo voto venne dato al Signor Prof. Giusto Bellavitis in riguardo all' anteriorità di proposta del medesimo fra i Candidati delle precedenti elezioni, e ne restò così definita l' aggregazione accademica del novello Socio.

391. Alla saggia penetrazione di mente del Sig. Cav. Presidente occorse di avvertire l' ommissione di un Articolo nello Statuto fondamentale, delicato bensì ma pur giusto e importante da considerarsi per la sicurezza economica della Società, consistente in una congrua cauzione da imporre al Vice-Segretario e Amministratore, nelle cui mani è affidata per ufficio la forza pecuniaria del Corpo accademico. Quindi, per mezzo e con Circolare del Segretario segnata N. 2. del 31 Marzo 1850, il Presidente medesimo propose all' approvazione dei Soci Attuali di aggiungere al nostro Statuto un Articolo formulato precisamente come segue: « Il Vice-Segretario Amministratore e Tesoriere della Società darà una cauzione nelle regole e forme volute dalle vigenti leggi civili per la somma che verrà dal Presidente determinata: la qual somma per altro non sarà mai minore di lire due mila italiane a corso di tariffa legale. » Una tale aggiunta riscosse all' unanimità il consentimento dei Soci che la votarono in completo numero; laonde non si tardò per noi ad introdurla nello Statuto accademico, formandone il novello Articolo XXII, quale già si legge alla pagina (44) della parte prima dell' attual Tomo XXV.

392. Innanzi che spirasse, col giorno 2 Settembre del 1850, il sessenio della Presidenza conferita all' insigne e benemerito Sig. Cav. Marianini, il Segretario colla sua Circolare N. 3. e del 2 Luglio 1850 invitava li Signori Colleghi a nominare il Soggetto che loro piacesse per la Carica suprema nel sessenio consecutivo, richiamandone all' uopo le prescrizioni e formalità volute dall' Articolo III dello Statuto. Al che risposero i votanti, acclamando unanimi più presto che promovendo la conferma del degno Capo comune, il quale modestamente dipoi ringraziavane i suoi elettori, e proseguiva a reggere la Società.

393. Al compiersi dell' Ottobre del 1850 il Segretario, colta l' occasione di partecipare e diffondere ai Soci l' indennizzo postale di spese fissato dallo Statuto e dovuto ad essi per l' anno 1849, annunziava ai medesimi la grave perdita fatta dalle scienze naturali nella morte poc' anzi accaduta del celebre Gay-Lussac;

e come questi apparteneva pure alla classe dei dodici Membri stranieri che onoran la nostra Società, così nella stessa lettera N. 4. esibivasi all' elezione del successore la Nota formatane dal Presidente coi nomi preclari ed eminenti dell' astronomo Encke, dell' astronomo Airy, del botanico Geoffroy de Saint-Hilaire, dell' astronomo F. G. W. Struve, del matematico Jacobi e del fisico Regnault. Nella votazione completa, che seguì a tale proposta, il primo de' nominati e sì cospicui Soggetti ottenne la più decisa e rara pluralità di suffragi, che sorpassò la metà del numero totale dei votanti: e fu ben giusta cosa che un simil favore si dichiarasse per quello de' Candidati, che nella elezion precedente di altro Membro straniero aveva di pochissimo non raggiunta la maggioranza de' voti, allora spiegatasi e conseguita dal francese Geometra scopritor di Nettuno, il Leverrier. Del qual esito più recente data poi comunicazione d' ufficio allo stesso Encke, questo novello nostro Collega, in cui va del pari alla profondità del sapere la modestia dell' animo e una squisita gentilezza di modi, me ne rispose tal lettera di ringraziamento, che io stimo pregio di qui riportarla; ed eccone il tenore:

À MONSIEUR LE SÉCRETAIRE
de la Société italienne des sciences residante à Modéne.

Berlin, le 23 *Mars* 1851.

Monsieur

Je ne saurois vous exprimer combien j' ai été confus de l' honneur que la Société italienne des sciences de Modéne a bien voulu me conférer, en me nommant un de sez douze Membres ètrangers, comme vous avez eu la bonté de me l' annoncer dans la lettre infiniment obligeante du 5 *février. Surtout en voyant que la perte irréparable que les sciences ont éprouvée, par la mort d' un des hommes les plus distingués de notre siécle, M.r Gay-Lussac, a améné la vacance.* (*) *J' ai été toujours trés éloigné de la prétention de pouvoir rivaliser avec des noms d' une importance si haute, qui ont été destinés soit à créér une branche toute nouvelle, soit à faire subitement avancer la science,*

(*) Per un *lapsus calami* nella mia lettera io aveva detto al Sig. Encke succeder egli, qual nostro Collega straniero, a Berzelius; e a questo perciò, non a Gay-Lussac, rivolgevansi nella sua risposta le parole di lodi usate dall' Astronomo di Berlino.

de sorte qu' un tems plus ou moins grand est nécéssaire pour dévelloper les idées, qu' ils ont introduites. Mes faibles travaux n' ont eu d' autre but, que de prouver la justesse des lois astronomiques, et de faciliter les applications nombreuses, qu' on est forcé de faire, si l' on se propose de pénétrer plus profondément dans la connaissance des mystéres, que la nature nous offre partout, ou nous osons nous occuper à l' expliquer. Si la fortune m' a été assez favorable, pour me faire trouver le retour périodique d' une comète, presque au milieu de notre Systeme solaire, tandis qu' on était accoutumé de considérer ces corps célestes comme étant plus éloignés du soleil que les planètes, cette découverte, d' ailleurs effacée par des découvertes beaucoup plus brillantes de notre tems, est le seul titre que une partialité bienveillante peut alléguer, pour adjoindre mon nom aux célébrités literaires. Le suffrage d' une société d'un pays, dont les savants ont de tout tems été célèbres par leur esprit pénétrant et subtil, qui a si éminemment contribué a ressusciter les sciences et les faire avancer à l' hauteur qu' elles ont maintenant atteinte, en m' humiliant presque, ne sauroit être pour moi que l' aiguillon le plus puissant, pour tâcher de me rendre tant soit peu digne de l' honneur qu' elle a bien voulu me conférer.

En vous priant de vouloir bien être l' interpréte de mes remercimens les plus humbles à la Société, et spécialement à son digne President M.r Marianini, j' ai l' honneur d' être avec la plus haute considération

J. J. Encke.

394. Dalla mia Relazione che apre il Volume, parte prima del Tomo presente, già si fece noto abbastanza come la Società Italiana, onorevolmente impegnata dal R. Estense Governo a procurare la confezione in Parigi e l' invio a Modena di esatti archetipi di misure conformati al Sistema metrico francese, ne adempisse l' incarico a reciproca utilità e soddisfazione, per lo zelo soprattutto e l' interesse che ne presero di consiglio e di opera il celebre nostro Collega Sig. Biot e l' illustre Fisico Sig. Regnault. Oltre i ben dovuti rendimenti di grazie, per tanta gentilezza dei due insigni e nominati Soggetti, che io loro proffersi a nome dell' intera Società, il Signor Cav. Presidente stimò pure atto di convenienza e giustizia di riconoscerne la parte più attiva di servigio presentatane dal Signor Regnault, promovendo il medesimo, di propria determinazione e autorità concedutagli per simili casi dallo Statuto, a nostro Collega qual Membro onorario della Società. Di che avendo io dato pronta comunicazione al prelodato Sig. Regnault (salito nel corrente

anno alla Presidenza della I. Accademia delle scienze di Parigi), egli cortesemente l' accolse e risposemi come segue:

Mon cher M.r Bianchi

J' ai bien reçu en son temps votre aimable lettre, et je dois me disculper de la negligence que j' ai mise à y répondre. J' ai été trés souffrant depuis deux mois et j' ai été même obligé de renoncer à toute occupation pendant quelque temps. Lorsque je me suis retrouvé sur pied, j' ai eu à pourvoir à tant de choses arrierées que j' ai perdu la mémoire de toutes celles qui n' étaient pas absolumment *urgentes. Vous avez pu voir la vie que je méne ici, et j' espere en conséquence que vous serez un peu indulgent pour moi.*

Je suis trés sensible à l' honneur que m' a fait la Société italienne (par son Président) en me nommant un de ses Membres honoraires. Veuillez en remercier en mon nom tous vos illustres Collégues, qui ont voulu recompenser ainsi un bien petit service que je vous ai rendu et qui ne méritait pas une pareille faveur. Je suis trés heureux que vos appareils soient arrivés en bon état, et que l' on en ait trouvé l' exécution satisfaisante. Je me mets complétement à votre disposition, si je puis encore vous étre de quelque utilité ici, et je vous prie de ne pas craindre de me donner quelque embarras pour des choses qui vous concernent.

Le président Ministre du Commerce a nommé une Commission pour procéder à une nouvelle comparaison de nos étalons métriques et pour proposer de nouvelles mesures pour leur parfaite conservation. Je suis président de cette commission, et je aurai soin, en son temps, de vous adresser les observations qui pourraient vous étre de quelque utilité. Malheureusement, dans notre régime républicain, les projets sont facilement conçus et proposés, mais il n'en est pas de méme de l' exécution.

Depuis trois mois que l'arrêt est rendu par le Président de la République, je n' ai encore pu voir une seule fois le nouveau Ministre pour m' entendre avec lui sur le mode et les moyens d' exécution, et je suis fort tenté de le remercier de l' honneur qui m' a été fait. Chez nous tant qu' il ne s' agit que de bavarder et de reglémenter, cela va bien; mais quand il s' agit d' exécuter, on ne trouve plus personne.

M.r Biot a beaucoup mieux supporté que moi, les mauvaises influences de cette saison; sa santé est toujours trés satisfaisante, et il me prie de le rappeler à votre bon souvenir.

Je vous réitere, mon cher M.r Bianchi, mes excuses pour ma négligence et vous prie de me croire votre tout devoué

Paris, 15 *Mars* 1851.

V. Regnault.

395. Mancava di vita nel Novembre del 1850, vigoroso ancora di età e di forza, ma rapito immaturamente da crudel morbo, l'illustre Geometra Milanese Gabrio Piola, che onorava la Società nostra del suo nome, non che de' profondi ed elaborati frutti de' suoi studi matematici. Lo scrivente, cui egli da verdi anni era stato tenero e costante amico, annunziavane ai Colleghi la sì dolorosa perdita, e invitavali a un tempo di nominarne il Membro Attuale successore scegliendolo, a designazione del Presidente, fra li chiarissimi Scienziati italiani: li Signori Capocci, Frisiani, Piria, Porta, Turazza, e Volpicelli. Cadeva la relativa pluralità dei voti raccolti sopra l' Astronomo di Napoli Sig. Cav. Ernesto Capocci, il quale perciò era l' eletto, e attestavane dipoi al Segretario la propria riconoscenza verso l' intero Corpo Sociale.

396. Spontanea ed esclusiva del Segretario, eccitavasi da lui con sua lettera del 25 Aprile 1851 la mozione al Corpo accademico, se dovevasi accordar titolo e pensione di Membro giubilato in conformità dell' Articolo XXII, §. 4. dello Statuto (primitiva edizione) al Sig. Cav. Presidente, avendo egli già fregiato i nostri Volumi con dieci sue importanti Memorie che all' uopo ricordaronsi. Ad una voce risposero i Soci Attuali affermativamente, compiacendosi anzi ciascuno di aggiungere questa novella prova dell' alta stima in che tiene l' ingegno, lo zelo e le benemerenze Sociali dell' onorevol suo Capo. Siccome però in simili casi, che possono rinnovarsi, l' articolo e paragrafo citati dello Statuto sembravan incompleti, qualora trattisi appunto di promover a pensione e titolo di Membro giubilato, o anziano, il Presidente ovvero il Segretario, così fu pure dai Membri votanti convenuto all' assoluta pluralità d' inserire nello anzidetto paragrafo la variante = *a proposizione del Presidente o del Segretario, (segreta e indipendente dall' uno all' altro, se questo o quello vi fosse interessato)* =; la quale variazione già è stata praticata nella edizion più recente dello Statuto al §. 4. dell' Articolo XXIII, Tomo XXV, Parte I.ª

397. Nella Circolare medesima sopracitata del 25 Aprile 1851 comunicaronsi ai Soci due Programmi di premj accademici; l' uno del Sig. Conte Pillet-Will, affidato per l' aggiudicazione alla R. Accademia delle scienze di Torino; e l' altro detto del premio Aldini sugl' Incendj, similmente affidato allo Istituto delle scienze di Bologna.

398. Per la morte del celebre Oersted, avvenuta nel Marzo del 1851 a Copenaghuen, erasi fatto luogo alla nomina di un successore nella Classe de' nostri Membri stranieri. E questo dalla pluralità relativa de' voti riuscì eletto nella persona del R. Astronomo di Greenwich, l' illustre Signor Cav. Airy, che nella completa votazione ebbe a competitori li dotti Signori, Becquerel, Brewster, Geoffroy de Saint-Hilaire, Struve F. G. e Regnault, e sopravvanzò quest' ultimo di soli due suffragi favorevoli. Nè avendo io tardato di dar parte all' eletto medesimo di tale riuscimento, egli me ne riscontrò con sua lettera di ringraziamento alla Società, che parmi degna di quì comparire per la squisita gentilezza de' modi adoperati, e per una particolarità, indicatavi dall'Autore, di un suo viaggio in Italia nell' anno 1829; epoca e circostanza da cui egli protestasi di aver cominciato propriamente la sua più alta carriera astronomica: ed ecco la lettera:

Royal Observatory, Greenwich,

1851 *December* 3.

Dear Sir

Within a few days I have received your letter of November 20, *informing me that the Società Italiana of Modena had conferred on me the high honor of election as one of its twelve foreign Members. Permit me to request that you will convey to the Society the expression of my deep sense of the honor which they have done me, and of my gratification at finding myself thus connected with the science of Northern Italy.* (*)

(*) Dal dirsi la Società Italiana residente a Modena l' A. ha interpretato per avventura ch' essa non appartenga fuorchè all' Italia superiore o boreale; mentr' essa invece distendesi a tutta la penisola.

Let me add that I am extremely sensible of your kindness in retaining a recollection of my short visit to Modena in 1829. The visit was not to be forgetten by me, and the journey in which it was made was one of the most important in my life. It was that journey which made me really an astronomer.

I am, dear Sir, very faithfully yours

G. B. AIRY.

399. Insieme alla Circolare del Segretario, segnata N. 3. del 4 Agosto 1851, distribuivasi il fissato compenso postale a tutti que' Signori Colleghi, e furono in numero di 37, che durante il precorso 1850 non avevano mancato mai di rispondere alle inchieste o proposizioni della Presidenza.

400. Pervenuto alla grave età di anni 84 il nostro Collega Prof. Tramontini dovette soccombere nel Febbrajo del 1852, munito dei conforti della nostra Santissima Religione, alla comun sorte degli uomini. Quindi, a ristorarne dell' amara perdita la Società, il Sig. Cav. Presidente, a mezzo del Segretario, proponeva per la nomina del successore a quello, fra i Membri Attuali, uno degl' insigni Italiani Signori: Piria, Frisiani, Gasparis, Minich, Porta, P. Chelini, Fergola Emanuele e Del Grosso Ab. Remigio; de' quali gli ultimi due, notati nella proposta la prima volta con un asterisco, avean diritto ad esservi compresi per Memorie loro, inviate ed inserite negli Atti Sociali. L' elezione, a maggioranza relativa e assai pronunziata di voti, cadde sopra il valente Chimico Sig. Cav. Piria, che da parecchi anni compariva nel novero de' candidati o proposti.

401. Siamo a mezzo il 1852, e verso quest' epoca usciva in luce il Tomo XXV, Parte I^a delle Memorie della nostra Società. Umiliatone il primo esemplare, com' era dovere, dal Sig. Cav. Presidente all' Altezza Reale dell' augusto nostro Auspice FRANCESCO V d' Austria-Este, ne vennero poscia distribuite e inviate le copie a ciascun Membro Attuale e Straniero, non che alle principali Accademie scientifiche d' Europa, e ben anco in America, le quali ci onorano di corrispondenza e delle loro sì pregevoli produzioni. E ben dall' Elenco delle Opere arrivateci in dono, e che terrà dietro immediatamente a questi

Annali, si vedrà quanta copia di belle e importanti pubblicazioni, e non poche in edizioni e legature magnifiche, ci sono state graziosamente comunicate, in particolare da quell'Istituto Smithsoniano fondato a Washington degli Stati Uniti, che dalla splendida mente del Fondatore si prefigge il nobile scopo di raccogliere e scambievolmente diffondere per ogni parte del mondo civilizzato il più solido e util progresso dell'umano sapere.

402. In sul cader dell' Agosto dello stesso anno 1852 moriva ottuagenario in Milano il benemerito Fisico e Collega nostro, il Canonico Angelo Bellani; sì che dovendosi procedere alla elezione di un Socio novello, dal Sig. Cav. Presidente a ciò proponevansi i nomi illustri de' Signori: Frisiani, Gasparis, Minich, Turazza, Porta, e Secchi P. Angelo, aggiungendovisi pure, notati di asterisco e per diritto di presentate Memorie, quelli de' Signori Fergola, Del Grosso, e Ingegnere Marianini Dott. Pietro. Li suffragi spiegaronsi in grande maggioranza a favore dell'Astronomo di Napoli, il Sig. Cav. Annibale de Gasparis che accettò con gentile riconoscenza il grado conferitogli dalla Società, la quale per sua parte godeva di dargli tale attestazione dell' alto pregio in che Ella tenne le sagaci e coronate di lui ricerche di novelli piccoli pianeti, ond' egli con parecchi ritrovamenti di essi ne crebbe, sotto il Cielo medesimo, la prima palma e gloria italiana di Piazzi per quello di Cerere Ferdinandea, e tanto contribuì con altri emuli, stranieri e non men felici esploratori, ad aprir e allargar in questo lato un campo indefinito e per avventura inesauribile di scoperte astronomiche.

Di una poi delle ultime comunicazioni traeva profitto il Segretario per annunziar e distribuire in cambiali il compenso annuo per porto di lettere dovuto a 30 de' Signori Colleghi, che puntualmente lo riscontrarono ad ogni inchiesta nell' anno 1851.

403. Poco appresso a quella del Fisico di Monza, e precisamente nel Gennajo del 1853, seguiva la morte del Fisico di Vicenza, il Dottore Ambrogio Fusinieri, egli pure in età grave

ma tolto rapidamente da colpo apoplettico alla scienza naturale, indefessamente da lui coltivata, e alla nostra Società che in lui onoravasi di un Membro attivo e rispettabile. A riempirne il seggio fra noi vacante proponevansi dal Sig. Cav. Presidente alla votazione gl' illustri nomi italiani de' Signori: Frisiani, Minich, Porta, Secchi, Chelini, e Volpicelli, coll' aggiunta per la terza volta de' Signori Fergola, Del Grosso, e per la seconda del Sig. Marianini Dott. Pietro. La relativa pluralità de' suffragi riuscì favorevole al primo de' nominati, e val a dire al distinto Geometra e Astronomo Milanese, il nobile Sig. Paolo Frisiani, che ci rallegrò in conseguenza di entrare a far parte del nostro Corpo accademico.

404. Non si gode pressochè mai un piacere quaggiù, al quale non si frammetta, intorbidandolo amaramente, un dolore. E così al lieto annunzio della promozione del Sig. Frisiani a nostro Collega io era purtroppo astretto di congiungere nella mia Circolare N. 2. del 21 Novembre 1853 l' infausta partecipazione della più lagrimevol perdita fatta dalla nostra Società nella Classe de' suoi Membri stranieri per la morte, avvenuta in Parigi il 2 Ottobre precorso, dell'Astronomo Francesco Arago, nome di europea celebrità per brillanti e utili scoperte scientifiche, per altezza d' ingegno, per vastità di cognizioni, e per una rara perspicuità di svolgere e comunicare altrui le concezioni della propria mente. Dolentissima quindi la Società italiana, poco meno della I. Accademia francese delle scienze, per tanta sventura che a questa rapiva il suo dotto ed eloquentissimo Segretario come a quella uno de' suoi più preclari ornamenti, a ristorarsene tuttavia coll' acquisto di altro cospicuo Soggetto moveva il suo degno Presidente a proporre per la successione al compianto suo Membro uno degl' illustri viventi e a noi estranei, quali sono li Signori: Becquerel, Brewster, Geoffroy de Saint-Hilaire, Regnault, Struve F. G., e Liebig. Dalla votazione usciva colla maggioranza relativa di favorevole suffragio l' insigne Fisico e Ottico Scozzese, Sir David Brewster, che, ricevutone da me avviso, accolse l' elezione di lui fatta

col più grato e gentil animo verso la Società che in tal guisa distinguevalo, e alla quale dichiaravasi onorato di appartenere.

405. Un dotto e assai esperto Idraulico italiano, formato alla Scuola bolognese del celebre Venturoli di cui scrisse l'elogio trasmessoci e pubblicato ne' nostri Atti, il Sig. Cav. Maurizio Brighenti, ben a ragione dal nostro Presidente fu giudicato meritevole di esser proposto al Corpo accademico per divenirne Membro onorario, in lui riscontrandosi egregiamente il complesso dei pregi e delle doti che a condizione richiede per siffatta nomina l'Articolo VI dello Statuto. E che in tal giudizio convenissero pienamente i Colleghi tutti, ne diede prova il plauso del maggior numero e l'assentimento generale ond'essi, *nemine penitus penitusque discrepante*, me ne risposero. Quindi nell' acclamato novello Membro d' onore la Società crebbe lustro a sè medesima, rimeritandone pure la graziosità del Sig. Brighenti per le non poche e importanti di lui produzioni altrove pubblicate, e delle quali egli ci aveva fatto dono, siccome apparirà dall' elenco delle Opere a tutto favore inviateci, e che tien dietro al presente Articolo degli Annali.

406. Dall' Accademia I. delle scienze di Pietroburgo, per determinazione presa nella sua adunanza del 29 Dicembre 1853, mettevasi fuori un programma di concorso ad un grande premio da concedersi per essa alle migliori soluzioni di formulate ricerche interessantissime, risguardanti il singolar fenomeno dello spezzamento da pochi anni avvenuto della Cometa di Biela in due. Parve allo scrivente il programma stesso degnissimo di eccitar l' attenzione, la curiosità ed eziandio lo studio de' forti ingegni e de' più abili calcolatori ad occuparsene, sia per l'importanza, novità e sublimità dell'argomento, come per proseguir e compiere il lavoro già incominciatone da uno dei nostri Colleghi, onorevolmente citato nel programma, il Cav. Santini; laonde questo programma nella sua integrità ed espresion originale diffondevasi dal Segretario mediante la sua Circolare N. 1. del 13 Aprile 1854. Il termine di tempo al concorso è fissato all' Agosto del 1857, e fu esso avvedutamente

rimesso ad epoca sì lontana in riguardo alla lunghezza e complicazione de' calcoli, sì teorici che pratici, necessarj a raggiungerne completamente lo scopo e poter accordarne la difficil corona. Voglia però il Cielo che, nel restante intervallo di due anni a quel termine, ricompongasi a durevol pace l' Europa, ora minacciata di conflagrazioni e catastrofi molto più terribili e disastrose per l' umana specie dello spaccamento della Cometa di Biela, o della frantumazione, se pur avvenne, di un antico e grosso pianeta nella macerie degli asterroidi odierni.

407. Aveva cessato di vivere, il 7 Marzo del 1854 in Padova, il Veronese Professore Pietro Maggi, uomo distinto per sapere matematico e più commendevole ancora per animo virtuoso, e uno dei due nostri Colleghi attivi, soprannominati e val a dire oltre il numero dei Quaranta della Società Italiana, che la rappresentano e ne sostengon le ragioni del pari che gl' interessi in Verona, congiuntamente a quell' Accademia di agricoltura, arti e commercio, che li elegge essa medesima dai suoi Membri a tal fine, in conformità dell' accordo stipulato fra i due Corpi accademici e indicato col relativo progetto nella Circolare del Segretario mio antecessore in data del 13 Aprile 1843; il qual progetto venne all' assoluta maggioranza de' voti dalla Società nostra approvato. Ora per la deplorata morte del Maggi la predetta Veronese Accademia di agricoltura, mediante l' organo e con lettera dell' attuale suo degno Presidente, il ch. Sig. Cav. Antonio Conati, allo scrivente in data del 29 Settembre 1854, ci fece conoscere aver essa nella sua radunanza del 20 Luglio eletto per succedere al defunto comune Collega nella nostra rappresentanza l' egregio Sig. Professore Abramo Massalongo, Naturalista di bella fama e noto per gran numero di pregevoli Memorie da essolui pubblicate. Sopra di che non cadendo alcun dubbio, e la Società Italiana perciò non avendo se non a rallegrarsi di tale acquisto, il Segretario della medesima, d' ordine del nostro Sig. Cav. Presidente, non ebbe infine fuorchè a dichiarare, in riscontro alla Accademia Veronese, la nostra piena adesione e accettazione della nomina di sì valente Soggetto.

408. In base della convenzione medesima sovrallegata fra la Società Italiana delle scienze e l' Accademia Veronese di agricoltura, e cangiato non ha molto il Presidente di questa, ch' era l' egregio Signor Gio. Antonio De' nobili Campostrini, nell' attuale Sig. Cav. A. Conati, quest' ultimo è stato di conseguenza aggregato alla nostra Società nella classe de' Membri onorarj; come pure col diritto medesimo e nella stessa classe vi appartiene il ch. Sig. Dott. Angelo Messedaglia, da quasi un anno eletto in suo Segretario perpetuo dall' Accademia ridetta di Verona, in luogo dell' illustre Conte Giovanni Scopoli, rapito alcun tempo innanzi alla famiglia, alla patria e ai buoni studi che ne lamentan tuttora la perdita. Così nella sua Città nativa, e per qualche anno eziandio sede prediletta, qual è la patria dei Lorgna, dei Cagnoli e dei Zamboni, la nostra Società si è ristorata degli ultimi danni ch' ebbe a soffrirvi in privazioni tanto di Membri attuali che di onorarj, ond' essa fregiavasi.

409. Fra le vittime umane che colpisce e sacrifica in tanto numero, senza distinzione o riguardo come senza certo rimedio, il terribil morbo asiatico, una ebbe purtroppo anche la nostra Società a vedersene involata crudelmente nel proprio seno e spenta nel colmo della gloria, ch' essa, e l' Europa, e le scienze ne ritraevano. Macedonio Melloni, lo scopritore della termocrosi e di tante altre belle proprietà naturali, non è più sopra la terra se non polve e nome celebrato per la traccia luminosa che vi segnò. Egli dovette soccombere, benchè vigoroso di età e di forze, alla fiera invasione del Coléra nell' Agosto del 1854 a Napoli. Quanto mai sono imperscrutabili i giudizj di Quello da cui la vita e la morte dipendono! Nel dolore di tanta perdita il nostro Sig. Presidente propose, a ristorarne la Società quanto era possibile, che l' elezione del successore a Melloni fra noi cadesse sopra uno de' seguenti Soggetti, che furono li Signori: Minich, Porta, Secchi, Malaguti, Chelini, e Sismonda Cav. Eugenio, aggiuntivi per la quarta volta li Signori Fergola e Del Grosso, e per la prima il Professore Sig. Francesco Brioschi. La preferenza e quindi la nomina effettiva dalla relativa mag-

gioranza de' voti risultò in favore dell' indefesso Astronomo Direttore della Specola del Collegio Romano, il P. Angelo Secchi, onore di Reggio Estense di lui patria, della scienza da lui coltivata, e dell' ammirabil e sì benemerita Compagnia religiosa cui egli è ascritto, e nella quale per lui rivive, comune alla nostra Società e alla mentovata Specola di Roma, la gloria del collagrimato P. de Vico, vittima conseguente nel 1848 del morale choléra delle agitazioni e rivolture civili.

410. Da qualche tempo, attesa la non molta larghezza dei fondi economici della Società, in confronto specialmente alle spese continue non lievi e più indispensabili, non avevasi potuto soddisfare il diritto de' Membri attuali circa l' annuo indennizzo di corrispondenza. Or non ha guari che tal dovere della Presidenza, verso i Soci puntuali a riscontrarla, è stato adempiuto per l'anno 1852, avendone io distribuito altrettante piccole cambiali ai detti Soci, in numero di 34, all' occasione della mia ultima Circolare N. 1. e del 12 Maggio anno 1855 corrente. Restiam indietro, è vero, di due anni; ma ne giova sperare dalla provvida e misurata amministrazione dell' integerrimo nostro Capo che potremo anche in ciò rimetterci fra non molto a corso regolare.

411. Le umane vite più illustri non isfuggon la sorte comune e si estinguono. Tanto è accaduto nel Febbrajo del corrente anno per quella del Matematico sommo, Astronomo e Fisico esimio, Carlo Federico Gauss, l' Autore della *Theoria motus corporum caelestium*, decesso a Gottinga in età veneranda. Com' egli pure onorava del suo nome, qual ornamento preclarissimo, la Società nostra fra i suoi Membri stranieri, così a ristorarcene della mancanza il Sig. Cav. Presidente, per mezzo della mia ultima Circolare precitata, ha invitato i Colleghi nazionali ad eleggere il successore dalla Nota de' celeberrimi Dotti, li Signori: Becquerel, Struve F. G., Liebig, Regnault, Geoffroy de Saint-Hilaire, e Hansen; fra i quali ora è pendente la votazione.

412. Giunto al termine di questi brevi cenni storici, onde chiudesi il secondo quinquennio del mio ufficio di stenderli, e

all'aprirne il presente Volume, che compie il Tomo XXV. delle nostre Memorie, io debbo invocar l' indulgenza de' miei Colleghi e del pubblico sopra il ritardo alquanto prolungato nella stampa del Volume stesso; ritardo però prodotto da combinazioni di circostanze, cui non potevasi ovviare, e che inutil sarebbe, se non inopportuno di quì riferire. La rapidità, che ora vuolsi assai maggiore, nelle pubblicazioni scientifiche, non può essere per avventura, e almeno a lungo conseguita per le gravi e più ampie collezioni accademiche, e ad essa non piegansi opportuni fuorchè i giornali, più lievi e spediti di mole come di sostanza, che servono, per cosi dire, di vapori e telegrafi elettrici a ravvicinar di tempo e luogo le intelligenze sparse nell' intero globo. Ma se più lenta è l' opera e la comunicazione prestate dalle dotte Società coi loro Atti voluminosi per innalzar l' edificio saldo e duraturo delle scienze, in questi Atti però si raccolgono e si conservano assai più svolti e meglio preparati e disposti i preziosi materiali della grande Fabbrica, e coi frutti più maturi e copiosi delle scoperte già fatte i germi di quelle che si faranno. Udiamone un giudizio ben competente del celebre nostro Collega, il Sig. Biot, col quale finisco. (V. Journal des Savants, anno 1817, pag. 144.) « Au reste, dans « ces grandes collections académiques, ou se déposent les pro- « grés lents, mais continuels, de l' esprit humain, et qui sont « destinées à durer autant qu' il y aura de la civilisation sur « la terre, une date plus ou moins moderne est de bien peu « d' intérêt: l' importance absolue des découvertes en fait seule « le prix; et comme le temps ne peut leur ôter rien, elles « n' ont rien non plus à gagner au frivole attrait de la nou- « veauté. C' est pour cela que les collections académiques n' ont « point à redouter la concurrence des journaux scientifiques, « qui publient ordinairement les premiers les découvertes. »

Giuseppe Bianchi.

ELENCO DI LIBRI E OPERE

NEL TRIENNIO 1852-1853-1854 OFFERTI IN DONO

ALLA SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

CHE, PUBBLICANDONE I TITOLI, INTENDE SIGNIFICARNE AGL'ILLUSTRI DONATORI LA PROPRIA STIMA E RICONOSCENZA

Smithsonian Contributions to Knowledge. Vol. II. Washington, 1851, in fol. con legatura.

Appendix I to Volume III of the Smithsonian Contributions to Knowledge containing an Ephemeris of the planete Neptune for the year 1852: by Sears C. Walker, Esq.: un fascicolo in 4°.

Proceedings of the American Association for the advancement of science: Washington, 1851: un volume in 8°.

Report to the Smithsonian Institution on the History of the Discovery of Neptune, By Benjamin Aptorp Gould, Ir: Washington, 1850, in 8°.

Fourth Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1849: Washington, 1850, in 8°.

Notices of public Libraries in the United States of America, by Charles C. Jewett: Washington, 1851, in 8.°

Medici Cav. Michele: Elogio di Jacopo Bartolomeo Beccari, con appendice: Bologna, 1851, in 4°.

Rendiconti delle Adunanze della R. Accademia de' Georgofili. Adunanza del 7 Settembre, 1851: Firenze, in 8°.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year MDCCCL. Part. I, London 1850; and for the year MDCCCLI. Part. I, London 1851: 2 vol. in 4.°

Proceedings of the Royal Society; N.os 73, 74: London, in 8°.

Memoirs of the Royal Astronomical Society. Vol. XIX. London, 1851, in 4°.

Monthly: Notices of the Royal Astronomical Society. Vol. X. London, 1850, in 8°.

Contribution to Astronomy and Geodesy, by Thomas Maclear, Esq. London, 1851: un volume in 4°.

Report of the Twentieth Meeting of the British Association for the advancement of science: London, 1851: un vol. in 8°.

Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, Anno IV. Sei fascicoli formanti un volume in 4°: Roma, 1851.

Annales de l' Observatoire physique central de Russie, par Kupffer; année 1848: S. Petersbourg, 1851: tre volumi in 4°.

A. T. Kupffer: Compte-rendu annuel, adressé au Ministre des Finances: S. Petersbourg, 1851, in 4°.

Mémoires de l' Academie Imperiale des sciences de S. Petersbourg. VI.^{me} Serie. T. VI. 3^{me} et 4^{me} livraison. S. Petersbourg, 1850, in 4°.

Mémoires presentés à l' Academie Imperiale de S. Petersbourg par divers savants. T. VI. 5^{me} et 6^{me} livraison. S. Petersbourg, 1851, in 4.°

Bellavitis Prof. Giusto: Alcune considerazioni sugli effetti dello attrito e sul modo di calcolarli. Memoria inserita nel Vol. IV di quelle dell' I. R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti: Venezia 1851, in 4°.

Medici Cav. Michele: Elogio di Marc' Antonio Laurenti: Bologna, 1852, in 4°.

Vergangenheit und Zukunft der Kaiserlichen-Leopoldinischen-Carolinischen Akademie der Naturforscher, von D.^{r} C. G. Nees von Eserbeck: Breslau und Hambourg, 1851, in 4°.

Catalogus bibliotecae Chr. Godofr. Nees ab Eserbeck: Breslau, in 8°.

Rendiconti delle Adunanze della R. Accademia de' Georgofili. Adunanze di Gennajo, Febbrajo e Marzo, 1852: Firenze, in 8°.

Zantedeschi Cav. Ab. Francesco: Ricerche fisico-matematiche sulla deviazione del pendolo dalla sua trajettoria: Padova, 1852, in 4°.

Memorie dell' Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna. T. I e II della nuova serie: Bologna, 1850, in 4°.

Boncompagni Principe Baldassare: Notizie raccolte della vita e delle opere di Gherardo Cremonese, traduttore del Secolo duodecimo, e di Gherardo da Sabbionetta, Astronomo del Secolo decimoterzo: estratte dagli Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei: Roma, 1851, in 4° grande.

Lo stesso: Notizie delle versioni fatte da Platone Tiburtino, traduttore del Secolo duodecimo: estratte come sopra dagli Atti dell' Accad. Pont. de' N. L.: Roma, 1851, in 4° gr.

Lo stesso: Notizie della vita e delle opere di Guido Bonatti, Astrologo ed Astronomo del Secolo decimoterzo: estratte dal Giornale Arcadico T. CXXIII e CXXIV: Roma, 1851, in 8°.

Giornale dell' I. R. Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti: tomi otto in 8° dall' anno 1841 al 1847: Milano, presso la Segreteria dell' Istituto.

Continuazione dello stesso: Nuova Serie T. I e II, e del T. III fascicoli XIII, XIV e XV, in 4°: presso la direzione del Giornale.

Meguscher F.: Memoria in risposta al quesito: additare la migliore e più facile maniera per rimettere i boschi nelle montagne diboschite nell' alta Lombardia, e per conservarli e profittarne: premiata dall' I. R. Istituto lombardo: un volume in 8°: Milano, 1847.

Merlini Giovanni: Memoria sulla costruzione dei tetti degli edificj, tanto di genere umile quanto di genere grandioso; inteso l'argomento nel senso scientifico e tecnologico: Milano, 1842, in 8°.

Sormani D.r N. M.: Monografia delle morti repentine: premiata dall' I. R. Istituto Lombardo: Milano, 1834, in 8°.

Restelli Avv. Francesco: Dell' influenza delle associazioni industriali e commerciali sulla prosperità pubblica, e dei più congrui mezzi per tutelarle. Memoria premiata dall' I. R. Istituto Lombardo: Milano, 1845, in 8°.

Elogio di Bonaventura Cavalieri, scritto e recitato da Gabrio Piola: Milano, 1844, in 4°.

Bellavitis Prof. Giusto: Saggio sull' Algebra degl' immaginarj: Venezia, 1852, in 4°.

Novi Commentarii Academiae scientiarum Instituti Bononiensis. Tomus Decimus: Bononiae, MDCCCXXXXIX, in 4°.

Giulio C. Ignazio: Recherches experimentales sur la résistance de l' air au mouvement des pendules: Turin, 1852, in 4°.

Bellani Angelo: Bachi da seta: osservazioni critiche sopra le principali Opere pubblicate in questi ultimi tempi, con indicazione de' migliori precetti spettanti ai bachi, ai gelsi ed al setificio; Parte I, II e III: 3 volumi in 8°. Milano, 1851-52.

Lo stesso: Disinfezione delle materie fecali; Relazione: Milano, 1852, in 8°.

Bizio Prof. Bartolomeo: Intangibilità della Dinamica-Chimica da ogni accusa voluta darle, Discorsi cinque: Venezia, 1852, in 8°.

Sismonda Cav. Angelo: Classificazione dei terreni stratificati delle Alpi fra il Monte bianco e la Contea di Nizza: Torino, 1852, in 4°.

Benvenisti D.r M.: Storia anatomico-patologica del Sistema vascolare; Vol I.: Padova, 1851, in 8°.

Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei; Anno I (1847, 1848): Roma, 1851, in 4°.

Magnetical and Meteorological Observations made at Observatory at the Cape of Good-Hope; Vol I: London, 1851, in 4°, con legatura.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year 1851; Part. II: London, 1851, in 4°.

Proceedings of the Royal Society (continuazione): London, 1851, in 8°.

Pareto March. Lorenzo: Della posizione delle Roccie pirogene ed eruttive dei periodi terziario, quaternario ed attuale in Italia: Genova, 1852, in 8°.

Taddei Cav. Gioacchino: Lezioni orali di Chimica generale; Volumi tre in 8°: Firenze, 1850-1-2.

Magnetical and Meteorological Observations made at the Observatory at Hobarton; Vol. II: London, 1852, in 4°, con legatura.

Memoirs of the Royal Astronomical Society; Vol. XX: London, 1851, in 4°.

Catalogue of Stars Near the Ecliptic, observed at the Markree; Vol. I: Dublin, 1851, in 8°, con legatura.

Report of the Twenty-first Meeting of the British Association for the advancement of science: London, 1852, in 8°.

Monthly: Notices of the Royal Astronomical Society; Vol. XI: London, 1851, in 8°.

Rossi V. A.: Ricerche analitiche sulle superficie anulari a cono direttore; Memoria letta all' Accademia Pontoniana: Napoli, 1851, in 4°.

Lo stesso: Se possono o no derivarsi le acque da un fiume torbido; Nota estratta dal Volume V, Serie 2ª degli Atti dell' Accademia Gioenia: Catania, 1850, in 4° piccolo.

Medici Cav. Michele: Memorie storiche intorno le Accademie scientifiche e letterarie di Bologna: Bologna, 1852, in 8°.

Accademia R. di scienze, lettere ed arti di Modena; Dodici fra le Memorie, coronate di premio ed onorate di *accessit* nei concorsi ai temi filosofico-morali, letterarj e di agricoltura proposti dal 1843 al 1848: Modena, in 8°.

Extraits des Comptes rendus des séances de l' Académie des sciences; séances du 27 Septembre 1852 et du 4 Octobre 1852; presentati dal Cav. Ab. F. Zantedeschi, in 4°.

Rendiconti delle Adunanze della R. Accademia de' Georgofili in Aprile, Agosto e Settembre 1852: Firenze, 1852, in 8°.

Memorie dell' Istituto lombardo di scienze, lettere ed arti; T. III: Milano, 1852, in 4°.

Giornale dell' I. R. Istituto suddetto; fascicoli XVI, XVII e XVIII: Milano, 1852, in 8°.

Abhandlungen der Mathemat-Physikalischen Classe der K. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Sechsten Bandes Erste und Zweite Abth.: München, 1851, in 4°.

Abhand. der Philosophisch-Philologischen Classe der K. Bay. Akad. der Wissensch., Sechsten Bandes Zweite Abtheil.: München, 1851, in 4°.

Abhand. der Historischen Classe der K. Bay. Akad. der Wissensch., Sechsten Bandes Zweite Abth.: München, 1851, in 8°.

Lamont D.r J.: Beobachtungen des Meteorologischen Observatoriums auf dem Hohenpeissenberg von 1792-1850: München, 1851; un vol. in 8°.

Mezger Eduard: Architektonische Zeichnungen, als Beilage zu den zwei Abhandlungen über das Erechteum etc.: München, 1851, in 4°.

Smithsonian Contributions to Knowledge; Vol. III and IV: Washington, 1852, in fol. con legatura.

Fifth annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1850: Washington, 1851, in 8°.

Smithsonian Report ou Recent Improvements in the Chemical Arts by professor James C. Booth, 'and Campbell Morfit: Washington, 1851, in 8°.

Directions for collecting, preserving, and transporting Specimens of Natural History: Washington, January 1852, in 8°.

American Zoological, Botanical, and Geological Bibliography for the year 1851: in 8°.

Letter from the Secretary of the Treasury, comunicating A report of the computation of tables, to be used with the hydrometer recently adopted for use in the United States customhouses, made under the superintendence of professor A. D. Bache, by Professor R. S. Mc Culloh. — in 8°.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year MDCCCLII; Part. I and II: London, 1852, in 4°.

Proceedings of the Royal Society; Vol. VI. N.os 83 ..... 93: London, in 8°.

From the Proceedings of the Zoological Society of London; Jan. 14, 1851, in 8°.

From the Quaterly Journal of the Geological Society of London; N. 13. Feb. 1848, in 8°.

From the Annals and Magazine of Natural History for April 1847; in 8°.

The Transactions of the Royal Irish Academy; Vol. XXII, Part. III science; Part. IV Polite Literature: Dublin, 1852, 1853, in 4°.

Proceedings of the Royal Irish Academy for the year 1851-52; Vol. V, Part. II: Dublin, 1852, in 8°.

Scopoli Cav. Giovanni: Dell' economia politica libri due, formanti il Volume XXIV delle Memorie dell' Accademia di agricoltura, commercio ed arti di Verona; in 8°.

Lo stesso: Memorie Archeologiche: Verona, 1852, in 8°.

Zuliani Prof. Giovanni: Alcune modificazioni proposte negli elementi d' Algebra: Brescia, 1852, in 8°.

Notizie sulla Storia delle scienze fisiche in Toscana, cavate da un manoscritto inedito di Giovanni Targioni Tozzetti: Firenze, dalla I. R. Biblioteca Palatina, 1852, in 4° gr. con legatura.

Pezzana Cav. Angelo: Storia della Città di Parma, continuazione; T. IV dal 1477 al 1483: Parma, MDCCCLII, in 4°.

Memorie dell' Osservatorio dell' Università Gregoriana del Collegio Romano diretto dai PP. della Compagnia di Gesù, per l' anno 1851: Roma, 1852, in 4°.

Sismonda Prof. Eugenio: Notizia storica dei lavori fatti dalla Classe delle scienze fisiche e matematiche della R. Accademia di Torino negli anni 1851, 1852: Torino, in 4°.

Rendiconto della Società Reale Borbonica; Nuova Serie N. 6, Nov. e Dic. 1852: Napoli, 1852, in 4°.

Tenore Cav. Michele: Della Zurloa, nuovo genere nella famiglia delle Meliacee, Memoria: Napoli, in 4°.

Lo stesso: Dell' Erba Baccara degli antichi; Memoria letta alla Accademia Pontoniana nella tornata 18 Gennaro 1852: Napoli, 1852, in 4°.

Tenore Cav. Michele: Osservazioni sopra alcuni Alberi mentovati negli Scrittori del medio evo: Napoli, 1853, in 4°.

Melloni Cav. Macedonio: Considerazioni ed esperienze intorno al magnetismo delle rocce; Memoria I: Napoli, 1853, in 4°.

Sandri D.r Giulio: Sulla idea generale di contagio; Memoria inserita nel Vol. IV delle Memorie dell' I. R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti: Venezia, 1852, in 4°.

Lo stesso: Cenni intorno al morbo apparso recentemente nell'uva: Verona, 1852, in 8°.

Collenza Cav. Pietro: Un Caso di Ermafrodito vivente Neutrolaterale: Napoli, 1853, in 8°.

Bordoni Cav. Antonio: Nota sui poligoni inscritti o circoscritti ad una ellisse: Roma, 1852, in 8°.

Bellavitis Prof. Giusto: Sul pendolo del Foucault; Nota estratta dagli Atti delle Adunanze dell' I. R. Istituto Veneto di scienze: Venezia, 1852, in 8°.

Lo stesso: Sopra la determinazione numerica delle radici delle equazioni algebraiche; Nota estratta come sopra: Venezia, 1852, in 8°.

Rendiconti delle Adunanze della R. Accademia de' Georgofili; Ott. Nov. e Dic. 1852, Apr. e Maggio 1853: Firenze, in 8°.

Desiderio D.r Achille: Idea del polso venoso: Venezia, 1851, in 8°.

Bellini D.r Ranieri: Delle Emorragie dei Capillari; Memoria: Firenze, 1851, in 8°.

Lo stesso: Brevi considerazioni delle azioni simpatiche; dal Giornale il *Progresso*, Anno II, N. 7; in 8°.

Bullettino delle scienze mediche: Bologna, in 8°; Fascicoli Dic. 1851, Genn. e Apr. 1852.

Elogio storico del Marchese Ferdinando Landi di Piacenza, scritto dal P. Tommaso Pendola delle Scuole pie: Siena, 1853, in 4°.

Cagnoli Cav. Ottavio: Iscrizioni in Verona, con Cenni statistici e con tavole, a tutto il 1851. Tomi 2: Verona, 1852, in 8°.

Lo stesso: Cenni statistici di Verona e della sua Provincia, colla pianta di Verona nel 1849: Verona, 1849, in 8°.

Cagnoli Cav. Ottavio: Cenni statistici sul nuovo Cimitero in Verona, pubblicati con tavole a tutto il 1851: Verona, 1852, un opuscolo in 8°.

Lo stesso: Pianta della Provincia di Verona, divisa nei XIII Distretti, etc., 1838; legata in tela e dentro custodia.

Lo stesso: Pianta di Verona nel 1849, piegata ad opuscolo; in 8°.

Lo stesso: Regolamento e Catalogo dei libri della Società letteraria di Verona, a tutto il 1852; in 8.°

Zantedeschi Cav. Ab. Francesco. La Termocrosi di Melloni dimostrata insussistente; Ricerche: un foglio in 4°. Per Sicca, 1853.

Magnetical and Meteorological Observations, made of the Observatory at Toronto in Canada; Vol. II: London, 1853, in 4° con legatura.

Magnetical and Meteorological Observations, made at the Observatory at Hobarton, in van Diemen Island; Vol. III: London, 1853, in 4° con legatura.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year MDCCCLIII; Vol. 143, Part. I and II: London, 1853, in 4°.

Memoirs of the Royal Society; Vol. XXI, Part. I, 1852, Part. II, 1853: London; in 4°.

Report of the British Association for the advancement of science for 1852: London, 1853, in 8°.

Catalogue of Stars near the ecliptic, observed at the Markree, etc.; Vol. II: Dublin, 1853, in 8°, con legatura.

Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, from November 1851, to June 1852; Vol. XII: London, 1852, in 8°.

Address of the Right honourable the Earl Rosse, etc., the President, read at the Anniversary Meeting of the Royal Society: London, 1853, in 8°.

Proceedings of the Royal Society: Vol. VI. N.^{os} 94.... 98; in 8°.

Annales de l' Observatoire physique central de Russie, par A. T. Kupffer; année 1849. 3. Vol. in 4°: S. Petersbourg, 1852; année 1850. 2 Vol. in 4°: S. Petersbourg, 1853.

Mémoires de l' Académie Impériale des sciences de S. Petersbourg; VI^{me} Serie, 1re partie, T. V, 5^{me} et 6^{me} livraison: Pietroburgo, 1853.

Atti della R. Accademia delle scienze di Napoli; Vol. VI, ultimo della 1^{a} Serie: Napoli, 1851, in 4°, con legatura.

Contributions to Astronomy and Geodesy, second series, by Thomas Maclear: London, 1853, in 4°.

Mémoires de l' Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux Arts de Belgique; T. XXVII: Bruxelles, 1853, in 4°.

Observations des phénoménes périodiques (extrait du Tome XXVIII des Mémoires de l'Académie Royale de Belgique), envoyées par M. Quetelet; in 4°.

Instructions pour l' observation des phénoménes périodiques: Cahier, en 4°.

Compte-Rendu Annuel, adressé à S. Exc. M.^{r} de Brock, Ministre des Finances; par A. T. Kupffer, années 1851-1852: S. Petersbourg, 1853, in 4°.

Bulletins de l' Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux Arts de Belgique; T. XVIII, Parties I et II pour 1851; T. XIX, Parties I, II et III pour 1852; T. XX, Parties I et II pour 1853. Sette volumi in 8°: Bruxelles.

Annuaire de l' Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux Arts de Belgique, Dix-neuviéme année, 1853: Bruxelles, in 12°.

Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei, Anno V, Sessioni 4^{a} e 5^{a} del 1852: Roma, 1853, in 4° grande.

Rendiconto della Società Reale Borbonica di Napoli; Nuove serie, N. 3 e 5: Napoli, 1853, in 4°.

On Circular Crystals, by Sir David Brewster: Edinbourgh, 1853, in 4°.

On the production of crystalline structure in crystallised powders, by compression and traction; by Sir David Brewster: Edinbourgh, 1853, in 4°.

On the optical phenomena and crystallisation of tourmaline, titanium and quartz, within Mica, Ametyst, and Topatz; by Sir David Brewster: Edinbourgh, 1853, in 4°.

Exercices d'analyse et de physique mathématique, par M.r Augustin Cauchy; T. IV, 46e, 47e et 48e livraisons: Paris, 1847, in 4°.

Pareto March. Lorenzo: Nono Congresso degli Scienziati italiani in Venezia: Genova, 1853, in 4° grande.

Note sur la théorie des residus quadratiques, par M.r Angelo Genocchi (extrait du T. XXV des Mémoires couronnés de l'Académie Royale de Belgique); in 4°.

Memorie dell'I. R. Istituto lombardo di scienze, lettere ed arti; T. IV: Milano, 1854, in 4°.

Giornale dell'I. R. Istituto lombardo di scienze, lettere ed arti, e Biblioteca italiana; Nuova Serie, Fasc.i XIX, ... XXXII; Milano, 1854, in 4°.

Brighenti Cav. Maurizio: Nota intorno al movimento delle acque a due coordinate: Pesaro, 1828, in 4°.

Lo stesso: Delle piene di Reno relativamente alla capacità dell'alveo; Dissertazione estratta dal T. III delle Memorie dell'Accademia di Bologna: Bologna, 1852, in 4°.

Lo stesso: Considerazioni sulle generali equazioni dell'Idrodinamica, e sulle applicazioni che se ne sono fatte finora; Memoria letta all'Accademia di Bologna il 27 Gennajo 1848, in 4°.

Lo stesso: Effemeridi del Reno di Bologna negli anni 1848 e 1849; Memoria estratta dal Vol. IV delle Memorie della Accademia: Bologna, 1853, in 4°.

Memorie storiche sulla vita e sulle opere di Giovanni Inghirami, scritte da Giovanni Antonelli delle Scuole Pie: Firenze, 1854, in 8°.

Memorie della Società Agraria di Bologna; Vol. 7°, Fasc.i 2 e 3.

Sandri D.r Giulio: Guida allo studio de' contagi e simili morbi specifici: Verona, 1853, in 8°.

Lo stesso: Considerazioni filologiche risguardanti principalmente la pronuncia del greco: Venezia, 1853, in 8°.

Chelini Prof. Domenico: Sulle formole fondamentali risguardanti la curvatura delle superficie e delle linee; Memoria estratta

dagli Annali di scienze matematiche e fisiche del Tortolini: Roma, 1853, in 8°.

Chelini Prof. Domenico: Osservazioni sopra una Memoria del Sig. Liouville intorno alla teoria generale delle superficie; dagli Annali di Sc. mat. e fis.: Roma, 1851, in 8°.

Lo stesso: Nota sul moto diurno della terra reso visibile nelle oscillazioni del pendolo; dagli Annali suddetti: Roma, 1851, in 8°.

Lo stesso: Nuova dimostrazione del parallelogrammo de' moti rotatorii; dagli Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei: Roma, 1851, in 4.°.

Mémoires de la Société des sciences naturelles de Cherbourg; 1er Volume, livraisons 1, 2, 3 et 4me: Cherbourg, 1852 et 1853, in 8°.

Tortolini Prof. Barnaba: Sopra gl' integrali a differenze finite, espressi per integrali definiti; Memoria: Roma, 1853, in 8°.

Bellavitis Prof. Giusto: Soluzioni di alcune questioni proposte nel Giornale intitolato « Nouvelles Annales de Mathématique par Terquem et Gerono » e non ancora risolte: Padova, 1853, in 8°.

Genocchi Angelo: Memoria intorno ad alcune trasformazioni di integrali multipli, estratta dagli Annali di scienze matematiche e fisiche: Roma, 1853, in 8°.

Sull' armonia delle più recenti teorie cosmiche colla narrazione della Genesi; Studj di Marco Mortara: Mantova, 1853, in 8°.

Brighenti Maurizio: Elogio del professore Gregorio Vecchi: Lugo, 1844, in 8°.

Lo stesso: Sopra una Memoria del Sig. Bruschetti intorno al moto delle acque: Rimini, 1830, in 8°.

Rendiconti delle Adunanze della R. Accademia de' Georgofili, dal Giugno 1853 al Giugno 1854: Firenze, in 8°, per dispense.

Palmieri Prof. Luigi: Della vera origine delle tensioni elettriche, le quali manifestansi col muovere i Corpi all' aria libera; Sperienze: Dall' *Omnibus* di Napoli, in 12°.

Palmieri Prof. Luigi: Elettricità atmosferica, continuazione degli Studi meteorologici fatti sul R. Osservatorio Vesuviano: Dal Poliorama pittoresco, in 4°.

Volpicelli Prof. Paolo: Nota sopra una nuova proprietà elettrostatica; dagli Annali di scienze matematiche e fisiche: Roma, 1854, in 8°.

Lo stesso: Sulla elettricità svolta dai corpi, quando isolati cangiano luogo; dall' Ateneo italiano: 1854, in 8°.

Zantedeschi Prof. Francesco: Lettera al celebre Quetelet intorno al principio del Dott. Palagi; dalla Corrispondenza scientifica: Roma, in 8°.

Lo stesso: Apparecchio per l' elettricità dinamica che si sviluppa nelle chimiche reazioni; dall'Ateneo italiano, in 8°.

Lo stesso: Sur le principe életrostatique de Palagi: Du T. XXI, N. 2 des Bulletins de l'Académie Royale de Belgique, in 4°.

Lo stesso: Dell' azione reciproca di due correnti elettriche dirette nel medesimo senso e in senso opposto nello stesso filo; e dell' azione induttiva laterale nelle medesime in fili paralleli vicinissimi; Lettera all'insigne Chimico Dumas, in 4°.

Lo stesso: Relazione dello stato attuale dell' ottica risguardata dal lato della colorazione dei corpi, e del sistema chimico di Parrot etc.: Dall' Emporio artistico-letterario, in 4°.

Brighenti Cav. Maurizio: Memoria sulla soluzione del Betti intorno all' eflusso dell' acqua da un foro piccolissimo nel fondo di un vaso prismatico verticale: Bologna, 1854, in 4°.

Description of a Skeleton of the Mastodon Giganteus of North America, by John C. Warren: Boston, 1852, un vol. in 4°, magnifica edizione con legatura.

Smithsonian Contributions to Knowledge. Vol. 1°. Ancient Monuments of the Mississippi Walley: City of Washington, 1848, in 4°, con disegni e legatura.

Smithsonian Contributions to Knowledge. Vol. V, 1853. Vol. VI, 1854: City of Washington, in 4°.

Catalogue of the described Coleoptera of the United States, by Friedrich Ernst Melsheimer: Washington, July, 1853, in 8°.

Sevent Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1852: Washington, 1853, in 8°.

The Annular Eclipse of May 26, 1854: Washington, 1854, in 8°.

List of foreign Institutions in correspondence with the Smithsonian Institution: Washington, May 1854, in 8°.

Directions for collecting, preserving and transporting Specimens of natural History; 2.e edit.: Washington, January, 1854, in 8°.

Mémoires couronnés et Mémoires des Savants Étrangers, publiés par l' Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux Arts de Belgique; T. XXV, 1851 - 1853: Bruxelles, 1854, un vol. in 4°.

Bulletins de l' Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux Arts de Belgique; T. XX, III.e Partie, 1853; T. XXI, I.re Partie 1854; et Tome supplementaire ou annexe aux Bulletins 1853 - 1854: Tre Vol. in 8°.

Rapport adressé à M.r le Ministre de l' Interieur sur l' état et les travaux de l'Observatoire Royal de Bruxelles, pendant l' année 1853; par le Directeur A. Quetelet: Bruxelles, Février 1854, in 8°.

Annuaire de l' Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux Arts de Belgique; vingtiéme année: Bruxelles, 1854, in 12°.

Sur une proprieté des nombres; extrait d' une lettre de M.r A. Genocchi de Turin à M.r Quetelet: Bruxelles, 1853, in 8°.

Sur les Constantes de la Nature; Classe de Mammiféres. Notice par M.r Ch. Babbage, extraite du Compte Rendu des travaux du Congrés général de Statistique réuni à Bruxelles au mois de Septembre 1853, in 4°.

Discorso idraulico storico sull'Arno di Carlo Giorgini: Firenze, 1854, un vol. in 4°.

Sur quelques particularités de formules d' Analyse mathématique; Lettre de M.r Genocchi à M.r Quetelet; extrait du T. XXI des Bulletins de l' Académie Royale de Belgique: Bruxelles, 1854, in 8°.

Démonstration elementaire d' une formule logarithmique de M.r Binet, par M. A. Genocchi; extraite du T. XX des Bulletins de l' Académie Royale de Belgique: Bruxelles, 1853, in 8°.

Mainardi Prof. Gaspare: Su la teoria delle curve; Memoria estratta dagli Annali di scienze matematiche e fisiche: Roma, 1854, in 8°.

Veladini Prof. Giovanni: Sulla prima applicazione del pendolo agli orologi; Memoria letta all' I. R. Istituto lombardo di scienze, lettere ed arti: Milano, 1854, in 4°.

Stirpium exoticarum variorum, vel forte novarum Pugillus, auctore J. B. Del Ponte: Taurini, 1854, in 4°.

Liais Emmanuel: De l' influence de la latitude sur la pression moyenne du barométre, et sur la direction generale du vent à la surface du sol: Versailles, 1854, in 8°.

Cenni biografici sopra il D.r Ambrogio Fusinieri, di D. Andrea Capparozzo: Vicenza, 1854, in 8°.

Philosophical Transactions of the Royal Society of London, for the year MDCCCLIII. Vol. 143, Part. III: London, 1853, in 4°.

The Royal Society, 30 November 1853; in 4°.

Proceedings of the Royal Society; Vol. VII, N.os 1, 2: London, 1854, in 8°: and Vol. VI, N. 99.

Address of the Righ honourable The Earl Rosse, etc. the President, read at the Anniversary Meeting of the Royal Society; November 30, 1853: London, 1853, in 8°.

Massalongo Prof. Abramo: Prodromus Florae fossilis Senegalliensis: Milano, 1854, in 4°.

Idem: Ricerche sulla Autonomia dei Licheni crostosi: Verona, 1852, un vol. in 8°.

Idem: Sopra le piante fossili dei terreni terziarj del Vicentino: Padova, 1851, un vol. in 8°.

Idem: Memorie Lichenografiche: Verona, 1853, in 8°.

Idem: Monografia dei Licheni Blasteniospori: Venezia, 1853, in 8°; estratta dagli Atti dell' I. R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti.

Massalongo Prof. Abramo: Sopra un nuovo genere di Pandanee fossili della provincia Veronese; Dissertazione: Verona, 1853, in 8°.

Idem: Saggio di un' Erpetologia popolare Veronese: Verona, 1854, in 8°.

Idem: Monografia delle Dombeyacee fossili fino ad ora conosciute: Verona, 1854, in 8°.

Idem: Sapindacearum fossilium Monographia: Veronae, 1852, in 8°.

Idem: Plantae fossiles novae in formationibus tertiariis Regni Veneti nuper inventae: Veronae, 1853, in 8°.

Idem: Sulla Lecidea Hookeri di Schaerer; Nota: Verona, 1853, in 8°.

Idem: Enumerazione delle piante fossili miocene fino ad ora conosciute in Italia: Verona, 1853, in 8°.

Idem: Geneacena Lichenum noviter proposita ac descripta: Veronae, 1854, in 8°.

Idem: Conspectus Florae tertiariae orbis primaevi: Patavii, 1852, in 12°.

Idem: Osservazioni sopra i due ultimi fascicoli di Licheni pubblicati dallo Schaerer: Bologna, 1853, in 8°.

Idem: Sporodictyon, novum Lichenum genus: Ratisbonae, 1853, in 8°.

Idem: Synopsis palmarum fossilium: Pragae, 1852, in 8°.

Idem: Amphoridium, novum Lichenum genus: Venetiis, 1853, in 8°.

Idem: Alcuni generi di Licheni nuovamente limitati e descritti: Verona, 1853, in 8°.

Idem: Summa animadversionum in duos postremos fasciculos Lichenum elveticorum editos a L. E. Schaerer: Veronae, 1853, in 8°.

Idem: Risposta alla lettera del ch. Prof. Tommaso Catullo diretta al Prof. E. G. Bronn di Eidelberga: Verona, 1853, in 8°.

Idem: Sopra un nuovo genere di rettili della provincia Padovana: Verona, 1853, in 8°.

Massalongo Prof. Abramo: Descrizione di alcune piante fossili terziarie dell' Italia meridionale; in 8°.

Idem: Sopra una nuova pianta fossile della provincia Bolognese; Lettera al ch. Geologo Giuseppe Scarabelli d' Imola; in 8°.

Idem: Nota sulla Lecidea Bolcana di Ciro Pollini: Verona, 1851, in 8°.

Idem: Nota sopra due frutti fossili del bacino lignitico di Leffe nel Bergamasco: Bologna, 1852, in 8°.

Atti dell' Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei; Anno V, Sessione VI: Roma, 1854, in 4°.

Rendiconto della Società Reale Borbonica di Napoli; Nuova serie, N. 6: Napoli, 1853, in 4°.

Fossombroni Conte Vittorio: Memoria postuma, per evitare l' invasione in Toscana delle truppe della Repubblica Francese: Firenze, 1851, in 8°.

Lo stesso: Considerazioni idrauliche circa il ponte di ferro sull' Arno presso la Porta S. Niccolò di Firenze; ediz. postuma: Firenze, 1851, in 8°.

Lo stesso: Poesie; ediz. postuma: Firenze, 1847, in 8°.

Zambra Prof. Bernardino: I principj e gli elementi della Fisica esposti; Fascicoli sette: Milano, 1854, in 8° piccolo.

Rendiconti delle Adunanze della R. Accademia dei Georgofili di Firenze; Dispense 8ª e 9ª del 1854; Dispense 1ª e 2ª del 1855.

Programma della Ittiologia fossile italiana del Prof. O. G. Costa: Napoli, 1853, in 4° gr.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino; Serie 2ª, Tomo XI, 1851; T. XII, 1852; T. XIII, 1853; T. XIV, 1854: Torino, in 4°.

Mémoirs de la Société Impériale des sciences naturelles de Cherbourg; T. Ier, 1853; T. II, 1854: Cherbourg, in 8°.

Liais Emmanuel: Mémoire sur un bolide, observé dans le département de la Manche le 18 Novembre 1851: Cherbourg, 1852, in 8°.

Lo stesso: Recherches sur la temperature de l'espace planetaire; in 8°.

Liais Emmanuel: Sur les sources de lumiére et les causes de non interférence: Cherbourg, 1853, in 8°.

Zantedeschi Prof. Francesco: Relazione ed osservazioni delle dottrine di Giambattista Venturi intorno ai colori accidentali od immaginarj: Venezia, 1855, in 4° gr.

Lo stesso: Nuovi esperimenti risguardanti l' origine della elettricità atmosferica, e della induzione elettro-statica dei conduttori solidi isolati; Memoria: Venezia, 1854, in 8°.

Bellavitis Prof. Giusto: Sopra un algoritmo proposto per esprimere gli allineamenti, e sull' ordine o la classe del luogo geometrico dei punti o delle rette soggetti ad una legge di allineamento: Venezia, 1855, in 8°.

Namias D.r Giacinto: Sunto delle osservazioni sul Coléra asiatico: Venezia, 1854, in 8°.

Lo stesso: Nuovi ragguagli sul Coléra asiatico: Venezia, Novembre 1854, in 8°.

Bullettino delle scienze mediche, con Appendice ec.: Bologna; Fascicoli di Gennajo, Febbrajo, Marzo e Aprile 1855, in 8°.

Rendiconti delle Adunanze della R. Accademia de' Georgofili di Firenze; Dispense 3ª, 4ª e 5ª: Firenze, 1855, in 8°.

Sandri D.r Giulio: Manuale di Veterinaria; 6ª ediz.: Verona, 1854, in 8°.

Massalongo Prof. A.: Symmicta Lichenum novorum, vel minus cognitorum: Veronae, 1855, in 8°.

Taddei Cav. Gioacchino: Sulla malattia delle uve, considerata in rapporto alle condizioni economico-agrarie, e alle conseguenze chimico-fisiologiche che ne derivano; un foglio estratto dallo *Spettatore*, N. 10: Firenze, 1855.

Rapporto della Commissione nominata dall' I. R. Istituto lombardo di scienze, lettere ed arti per lo studio della malattia dell' uva: Milano, 1855, in 8°.

Giornale di Giurisprudenza amministrativa, N.i 1, 2: Venezia, Maggio, 1855, in 4° gr.

La Razionale scoperta del pianeta di Leverrier, logicamente presentata da Biot, e recata italianamente con prefazione

e Note di Giuseppe Bianchi: Parma, 1854, in 8° piccolo. Un Opuscolo di 240 pagine.

Bianchi Prof. Giuseppe: Undici fra Note e Articoli, di vario argomento matematico, astronomico e meteorologico, pubblicati nei primi sei Tomi degli Annali di scienze matematiche e fisiche compilati dal Prof. Tortolini: Roma, 1850 ..... 1855, in 8°.

Dello stesso: La Corona delle dodici Stelle di MARIA VERGINE immacolatamente concetta, con appendice intorno la solenne dommatica Definizione testè promulgata; Omaggio sacro poetico astronomico: Modena, 1855, in 8.°

AVVERTIMENTO

Nel formare e offerir qui l' Elenco precedente dei copiosi e per la maggior parte pregevolissimi doni ricevuti dalla Società Italiana in Libri e Opere, per generosità de' Governi, o delle Accademie, o de' particolari Autori, il sottoscritto ha creduto di non dover seguire altr' ordine fuor quello dell' arrivo di ciascun d'essi alle sue mani, e val a dire copiandone fedelmente il registro ch' egli ne tiene presso di sè aperto e in cui trascrive successivamente i titoli dei doni pervenuti alla Società e a lui comunicati. Ciò è vero che importa nell' Elenco una lunga e nojosa ripetizione de' nomi d'Autori e di Opere; ma questo inconveniente non può esser ovviato senza impegnarsi alla compilazione faticosa di una specie di Catalogo, pel quale d'altronde raccoglie e va disponendo i materiali con intelligente zelo e precisione il Signor Cav. Presidente incaricatosi di custodire e conservare ben ordinata presso di sè la Biblioteca Sociale, numerosa ormai di utili e peregrine produzioni e che ogni dì più se ne arricchisce.

A non occupar poi nel presente Volume un soverchio spazio con indicazioni semplici di titoli di Memorie e di nomi d' Autori, e l' Elenco precedente di necessità essendo riuscito assai lungo, così mi sembra ben fatto di ommetter quì e riservare al principio del Volume prossimo consecutivo l' altro Elenco, fissato da pubblicarsi, de' lavori de' Membri attuali della Società, usciti di recente in luce e fuori dalle nostre Memorie, in continuazione di quello dato a pag. (36) *dell' attual Tomo XXV, Parte I.*

Il Segretario.

MEMORIE

DELLA

SOCIETÀ ITALIANA DELLE SCIENZE

RESIDENTE IN MODENA

Tomo XXV. Parte II.ª

SULLA CASSIFICAZIONE
DELLE CURVE DEL TERZO ORDINE

MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE

GIUSTO BELLAVITIS PROFESSORE IN PADOVA

Ricevuta il 1.° *Agosto* 1851.

Fra i più dilettevoli argomenti della Matematica pura può contarsi lo studio delle curve. È bello il vedere come con semplicissime leggi si generino variatissime curve, come queste talvolta si pieghino sempre in un senso, talaltra s' inflettano in contrarie parti; ora tornino in sè stesse, ora si distendano per rami infiniti: una sola curva può annodarsi passando più volte per lo stesso punto, e può anche spezzarsi in più parti, che quantunque staccate pur formano un solo tutto. Cangiando i valori di alcuni dei parametri contenuti nell' equazione di una curva, questa va successivamente mutando di forma; e, per esempio, due rami di curva si avvicinano fino a tagliarsi e formare un nodo, poscia il nodo si stacca dal resto della curva e forma un' *ovale separata* (*ovale conjugata*), oppure si converte in un *punto di regresso*, od in un *punto isolato* (*punto conjugato*). Per tal maniera una curva espressa da una stessa equazione assume differenti forme, e dalle generali proprietà delle curve dipendenti dalla sua equazione, nonchè dalle sue particolari forme possono trarsi caratteri per separare le curve in generi ed in ispecie; per istabilirne infine una classificazione.

1. Il Newton fu il primo a classificare le curve del terzo ordine nella sua *Enumeratio linearum tertii ordinis*; poco aggiunsero a tale classificazione Cramer ed Eulero solo notandone qualche leggera ommissione, e limitandosi a considerarne le prime divisioni (che il Cramer disse genesi, l' Eulero specie, e che io, per ischivare qualche equivoco, dirò *categorie*). Onde stabilire sopra uniformi principj la classificazione delle curve, e togliere, per quanto sia possibile, l' arbitrarietà che sempre accompagna i metodi di classificazione, ci bisognerà esaminare i caratteri delle curve, e la loro maggiore o minore importanza, specialmente in riguardo alla derivazione da una figura ad un' altra.

LEGGI DI DERIVAZIONE DELLE FIGURE.

2. Diremo che una figura è *derivata* da un' altra quando tra le parti dell' una e le corrispondenti dell' altra esiste una costante relazione, per la quale da una delle parti si possa dedurre la sua corrispondente nell' altra figura.

3. Tra le più semplici leggi di derivazione quella che più utilmente ci può servire a passare da linee di ordine inferiore ad altre di ordine più elevato si è la derivazione d'*inversione*. Ecco qual ne è la legge. Abbiasi un punto fisso I, che diremo *centro d' inversione*, se sulle rette IA IB ec., che misurano le distanze di ciascun punto di una figura dal centro d' inversione, si prendano partendo da questo centro delle lunghezze IA′ IB′ ec. inversamente proporzionali alle distanze predette, si verrà a costruire una nuova figura A′ B′. . . ., che dirassi l'*inversa* della primitiva AB. . . . .

4. Da ogni retta deriva in tal maniera un circolo passante pel centro d' inversione; da un circolo, che non passi pel centro d' inversione, deriva un altro circolo; da un piano deriva una sfera passante pel centro d' inversione, ec. — Per tal guisa le proprietà dei circoli e delle sfere possono derivarsi da quelle delle rette e dei piani; e ciò per via affatto semplice e naturale,

solo che si premetta la facile dimostrazione delle leggi fondamentali dell' inversione. Si possono eziandio trovar delle soluzioni di alcuni problemi relativi ai circoli derivandole dalle più semplici soluzioni relative alle rette. Usciremmo troppo dal nostro cammino se volessimo seguire questo argomento, che ho abbozzato in una Memorietta inserita negli Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto: Tomo VI; Padova 1836.

5. La derivazione tra le proprietà di una figura e quelle della figura inversa consiste nei seguenti canoni:

1.° Data una relazione tra le distanze dei punti A B C ec. di una figura e del punto I preso per centro d' inversione, si otterrà la relazione spettante ai punti inversi A′ B′ C′ ec. ponendo $IA = i^2 : IA'$, $IB = i^2 : IB'$, ec., $AB = i^2 . A'B' : IA' . IB'$, ec., essendo i^2 costante. Le prime equazioni esprimono la legge di derivazione, l' ultima ne è una facile conseguenza, ove si ponga attenzione alla similitudine dei triangoli IAB IB′A′.

2.° Gli angoli rettilinei col vertice nel centro d'inversione I sono eguali, ed anzi identici nelle due figure; cioè $AIB = A'IB'$. Dal che poi ne viene che le aree dei triangoli IAB IA′B′ hanno il rapporto $(IA)^2 : (IB')^2$.

3.° Se due linee AB AC si tagliano nel punto A, sotto lo stesso angolo si taglieranno pure le loro inverse A′B′ A′C′. Perchè prendendo i punti B C infinitamente vicini ad A, i due triangoli infinitesimi ABC A′B′C′ avendo, pel canone 1.°, i lati proporzionali saranno simili.

4.° Se le due linee AB AC hanno nel punto A un contatto dell'ordine $n.^{esimo}$, lo stesso ha luogo fra le inverse A′B′ A′C′.

6. Nei due precedenti canoni si suppone che il punto A sia differente dal centro d' inversione; poichè se A coincidesse con I, A′ sarebbe a distanza infinita. In tal caso le due curve MBI NCI danno per inversi due rami infiniti M′B′... N′C′..., i cui assintoti formano un angolo eguale a quello, sotto cui si tagliano le curve MBI NCI. Sicchè se queste si toccano i due assintoti sono paralleli, e se le curve MBI NCI hanno in I un contatto del secondo ordine, le M′B′ N′C′ hanno

l' assintoto comune; esso è la retta inversa (§. 4.) del circolo osculatore comune alle MBI NCI.

7. Le dimostrazioni di quanto vado asserendo io le aveva da prima esposte col mezzo del mio metodo delle equipollenze, poichè mi sembra che esso presenti anche in ciò qualche vantaggio; ma siccome pei principj fondamentali di tal metodo doveva rimandare ad una mia Memoria inserita nel Tomo VII degli Annali delle scienze (Padova 1837), così correva pericolo che le mie dimostrazioni fossero difficilmente intese. Credetti quindi miglior consiglio di ometterle, giacchè ogni Matematico potrà facilmente altre sostituirvene; ed io andrò più spedito al mio oggetto della classificazione delle curve del terzo ordine. Mi riservo di esporre in altra Memoria il metodo delle equipollenze con tutta la maggior chiarezza ch' io possa, e tra le sue moltiplici applicazioni comprenderò anche le dimostrazioni, che ora credo opportuno di tralasciare.

8. Limitando d' ora in poi il nostro discorso alle figure piane, ed alle inverse ottenute prendendo il centro d' inversione nel piano stesso della figura, ci è facile prevedere qual sia l' ordine di una curva inversa di una conica (sezione conica, ossia linea del secondo ordine); poichè ogni circolo passante pel centro d' inversione ha per inversa una linea retta, e siccome il circolo non può tagliare la conica se non se in quattro punti, così la retta non potrà tagliare l' inversa della conica se non in quattro punti, ed essa sarà perciò una curva del quarto ordine. Che se il centro d' inversione sia sulla periferia della conica, un circolo che passi per esso non potrà tagliarla se non se in altri tre punti, e quindi la inversa della conica sarà del solo terzo ordine. — Trattando più particolarmente di queste curve del terzo ordine vedremo che esse si separano in tre generi essenzialmente differenti secondo che la curva è inversa di una parabola di una iperbola o di una ellisse. — Per esporre i principj della classificazione delle curve ci occorre ricordare da prima altre leggi di derivazione dotate esse pure di grande utilità.

9. Dopo della eguaglianza, la più stretta relazione che possa esistere tra due figure si è la *similitudine*: su questo poco o nulla vi è da dire, poichè dalle proprietà di una figura a quelle di una simile vi è soltanto la derivazione d' identità.

10. Dopo della similitudine viene l' *affinità* considerata pel primo dal Clairaut (Mém. Acad. de Paris, 1731; pag. 486.). Questa derivazione è tale che se in una figura si formi un qualunque sistema di rette parallele, anche in ogni figura ad essa affine corrisponderà un sistema di rette pur parallele. Dal che poi ne viene che le rette parallele conservano lo stesso rapporto in ogni figura affine.

11. Finalmente è più larga legge di derivazione quella di *omografia* o di *collineazione*; per essa qualunque linea retta, possa costruirsi in una figura, ha sempre per omologa nella figura *collineare* una linea pur retta; dal che ne viene eziandio che se tre o più rette di una figura concorrono in un punto, lo stesso avviene delle loro *omologhe* ossia *collineari*. Queste proprietà riconoscibili mediante la sola riga si dicono proprietà *grafiche*. Le figure collineari hanno dunque comuni tutte le proprietà grafiche; e tra queste proprietà è pur da contarsi l' ordine del contatto di due linee.

12. Poche sono le proprietà *metriche*, cioè relative a misura, che si conservano da una figura alla sua collineare; esse, insieme colle proprietà *grafiche*, furono dette *projettive*. Un rapporto di due prodotti di linee rette è *projettivo*, cioè si conserva lo stesso in tutte le figure collineari, quando nell'uno e nell' altro termine del rapporto si trovano gli stessi punti e le stesse direzioni di rette. Così se sui lati BC CA AB di un triangolo sieno presi i punti L M N è un rapporto projettivo il

$$AN.BL.CM:AM.CL.BN.$$

Vi sono eziandio dei rapporti projettivi relativi ad aree od a seni di angoli.

13. Se in una figura si abbiano molti sistemi di rette parallele, in ogni sua figura collineare vi corrisponderanno altrettanti

sistemi di rette concorrenti in punti posti tutti sopra una medesima retta; sicchè i punti di questa retta corrispondono a quelli della figura primitiva, che stanno a distanza infinita. Viene da ciò quella locuzione apparentemente strana, ma utilissima, che tutti i punti di un piano posti a distanza infinita appartengono ad una stessa retta.

14. Le figure *simili*, *affini* o soltanto *collineari* possono supporsi generate dalla projezione concorrente ossia prospettiva, o, in altre parole, dalle ombre. E propriamente una figura piana è *simile* alla sua prospettiva fatta in piano parallelo: la figura obbiettiva e la prospettiva sono *affini*, se il punto di vista è a distanza infinita: ed in ogni altro caso la obbiettiva e la prospettiva sono collineari. — Si noti che due figure affini non sempre potranno essere prospettive parallele l' una dell' altra.

15. Nella collineazione, di cui l' affinità e la similitudine sono casi particolari, da ogni punto deriva un punto, da ogni retta deriva una retta. È perciò ben differente la derivazione secondo la quale ad ogni punto corrisponde una retta, e ad ogni retta un punto. Essa dà origine alla dualità: fecondissimo principio, pel quale da un teorema projettivo altro se ne deduce di esposizione molto diversa, perchè ai punti deggiono sostituirsi le rette e reciprocamente.

16. Se fuori del piano di una figura si prenda un punto, che noi diremo *centro di derivazione*; e s' immagini che da esso sieno tirati dei raggi a tutti i punti della figura, sicchè ogni retta della figura dia origine ad un piano; poscia si supponga che questo *fascio* di raggi e di piani venga tagliato da un piano qualunque; la sezione sarà, come dicemmo (§. 14.), una figura collineare della primitiva. Che se pel centro di derivazione si conducano dei piani perpendicolari a quei raggi, e dei raggi perpendicolari a quei piani, si otterrà un nuovo fascio di piani e di raggi, il quale, con denominazione usata anche nella Trigonometria sferica, diremo *polare* del primo. E se questo secondo fascio sia tagliato da un piano, otterremo

una figura *derivata-polare* della primitiva; le rette e i punti di essa corrisponderanno ai punti ed alle rette della primitiva.

17. Potremo supporre in particolare che il piano tagliante il secondo fascio sia il piano stesso della figura primitiva; allora, le due figure, primitiva e derivata-polare, saranno in una più stretta relazione, che noi diremo *reciprocità*. Se sul piano comune alle due figure reciproche si abbassa dal centro di derivazione una perpendicolare, il suo piede lo diremo il *centro di reciprocità*; e facilmente riconosceremo che la retta che unisce questo centro con un punto è perpendicolare alla retta *reciproca* di esso punto, e che le distanze dal centro di reciprocità del punto e della retta hanno un prodotto costante. — Sicchè la reciprocità ha una qualche rassomiglianza coll'inversione; però colla essenzialissima differenza che una retta ha per reciproco un punto e per inverso un circolo (§. 4.).

18. Le proprietà grafiche sono comuni a tutte le figure derivate-polari; quando però si cangino in questo senso, che se in una figura vi sono alquanti punti in linea retta, nella derivata-polare si avranno alquante rette concorrenti in uno stesso punto; e viceversa. — Per derivata-polare o reciproca di una curva si considera un'altra curva, che è nello stesso tempo l'inviluppo di tutte le rette reciproche dei punti della curva primitiva, ed il luogo geometrico dei punti reciproci delle tangenti di questa curva. Il punto d'intersezione di due curve ha per reciproca la tangente comune a due curve reciproche delle prime. Che se le curve hanno nel punto d'intersezione anche la tangente comune, lo stesso sarà delle loro reciproche. — Si riconosce pure, mediante il calcolo, che qualunque sia l'ordine del contatto di due curve esso si mantiene lo stesso nelle figure reciproche. Dee considerarsi separatamente il caso che la tangente comune alle due curve comprenda il centro di reciprocità, perchè allora il punto reciproco passa a distanza infinita. — Quanto ora dicemmo di due figure reciproche si estende a due figure derivate-polari; poichè una figura collineare ad una delle reciproche ed una collineare all'altra sono

tra loro derivate-polari. — Le figure reciproche hanno, come vedemmo (§. 17.), alcune relazioni a loro speciali.

19. Prima di applicare questi principj alla teoria delle curve gioverà, a renderci più abituali le tre leggi di derivazione *collineazione reciprocità* ed *inversione*, il fare su di esse alcune considerazioni generali. Intanto, quantunque sia opportuno il nome di derivazione geometrica, pure vi è essenzialissima differenza tra essa e la derivazione analitica; giacchè colla stessa identica operazione si passa da una figura alla sua derivata, e da questa alla primitiva; il che è ben lungi dall' esser vero fra un' equazione primitiva, e la sua derivata differenziale. — Due figure ambedue collineari di una stessa primitiva sono collineari tra di loro; e quindi il ripetere più volte la derivazione di collineazione non è di alcun vantaggio. — Due figure reciproche (con differenti centri di reciprocità) di una primitiva sono tra loro collineari; e con quante si vogliano derivazioni di collineazione o di reciprocità non si otterrà mai che una figura collineare od una derivata-polare, secondo che il numero delle reciprocità sarà stato pari o dispari.

20. Mi sembra un importante teorema (Memoria citata al §. 4.) che coll' inversione ripetuta più volte non si ottenga se non quanto può aversi da una sola inversione. — Per dimostrarlo indichiamo con A B C D E.....Z i punti di una figura, con A′ B′...., A″ B″...., A‴ B‴.... quelli che ne derivano mediante una, due o tre inversioni; sia A il centro della prima inversione, e sia Y Z la retta a distanza infinita della figura primitiva: — nella prima figura inversa il punto A′ sarà a distanza infinita; Y′ Z′ si riuniranno nel punto A; dalle rette CD CE deriveranno i circoli Z′ C′ D′ Z′ C′ E′, che si taglieranno in Z′ ed in C′ sotto un angolo eguale (§. 5. 3.°) all'angolo DCE della figura primitiva: — sia B′ il centro della seconda inversione; nella seconda inversa B″ passerà a distanza infinita, A″ cadrà in B′, ed i circoli Z″ C″ D″ Z″ C″ E″ si taglieranno sotto lo stesso angolo DCE: — ora se prendiamo Z″ per terzo centro d'inversione otterremo una figura, nella quale

Z''' sarà a distanza infinita, B''' cadrà in Z'', e dai predetti circoli deriveranno le rette $C'''D'''$ $C'''E'''$ formanti l' angolo $D'''C'''E''' = DCE$. — Pertanto, giacchè tutte le rette della figura primitiva sono rette anche nella terza figura inversa, le figure sono (§. 11.) collineari; — giacchè dai punti Y Z posti nella primitiva a distanza infinita derivarono i punti Y''' Z''' essi pure a distanza infinita, le due figure sono affini; — e giacchè ogni angolo DCE è uguale al suo derivato, le due figure sono simili: perciò la seconda figura inversa può ottenersi mediante una sola inversione da una figura simile (od eguale) alla primitiva.

21. Dopo questa digressione, che stimai necessaria a porre sott' occhio teorie importantissime e non abbastanza generalmente conosciute, torneremo al nostro argomento osservando che non sarebbe di alcun vantaggio adoperare successivamente più inversioni delle coniche (§. 20.), poichè si otterrebbero quelle stesse curve, che si possono avere mediante una sola inversione. Ciò è analogo a quanto vedemmo (§. 4.) accadere per la linea retta, la quale coll' inversione dà il circolo; da cui poscia non si può dedurre mediante l' inversione alcun' altra curva; bisogna ricorrere all' affinità per dedurne l' ellisse, ed alla collineazione per le altre due specie di coniche.

Principj per la classificazione delle curve.

22. Per quanto io mi sappia tutti considerarono come principale carattere di classificazione delle curve l' esistenza e la natura dei loro rami infiniti; io credo che questo sia invece da riguardarsi come carattere secondario, e che il carattere per la formazione dei generi sia la collineazione, quello per la formazione delle specie sia l' affinità. — Vale a dire tutte le curve tra loro collineari costituiscono, secondo la mia maniera di vedere, un genere; e la specie è un' unione di curve tra loro affini. — Con questi principj le coniche formano un solo genere diviso in tre specie, secondo che colla derivazione di

collineazione si fa andare all' infinito, od una retta, che non taglia la curva (ellisse), o una sua secante in due punti (iperbola), od una tangente (parabola).

23. Un genere può avere estensione differente da un altro; cioè può esser differente il grado di generalità dell' equazione, che rappresenta tutte le curve comprese in un genere: tale generalità dipende dal numero di costanti arbitrarie, che determinano la forma della curva; facendo astrazione da quelle che ne determinano la posizione, le quali sono sempre tre, eccettuati i casi del circolo e della retta. Quelle prime costanti le diremo i *parametri* della curva. — Simil cosa vale per le specie. Così la specie della ellisse ha due parametri, quella della parabola uno solo. — Una specie può ammettere tutto al più tre parametri, ed un genere tutto al più cinque; e tali sono i numeri dei parametri che a loro generalmente parlando appartengono.

24. Debbo però affrettarmi di riconoscere che questa naturale divisione in generi ed in ispecie non è sufficiente alla classificazione delle curve; poichè si potranno incontrare infinite specie in un solo genere, ed anche infiniti generi in un solo ordine. Bisognerà dunque riunire mediante altri principj le specie in *famiglie* ed i generi in *tribù*.

25. È notissimo che le curve algebraiche furono divise in *ordini* a seconda del numero dei punti, in cui la curva può essere tagliata da una retta, o piuttosto a seconda del grado dell' equazione, che serve a rappresentare la curva. — La *classe* delle curve non è già una divisione più larga dell' ordine, ma ne è invece una divisione affatto analoga; giacchè la classe di una curva è l' ordine della sua *reciproca* o *derivata-polare*: quindi il numero della classe esprime il massimo numero di tangenti della curva, che possono incontrarsi in un solo punto. — Un tempo fu creduto che l' ordine e la classe potessero essere una stessa cosa, ma è certo (ed io pure lo feci vedere nel Giorn. dell' Ital. Letterat. Padova, 1828. II. pag. 72) che una curva del terzo ordine può essere della sesta classe, ed una curva del sesto ordine può essere della terza classe.

26. Vi è un altra, a mio credere, interessantissima separazione delle curve algebraiche, cioè le cui coordinate parallele sono legate da un' equazione algebraica, secondo che queste coordinate possono o non possono esprimersi con funzioni razionali di una sola variabile. — E giacchè il Möbius considerò tali espressioni delle coordinate nel suo calcolo *baricentrico*, potremo dire che tali curve sono dell' *n.*^esimo^ *ordine baricentrico*. Questo ordine abbraccia soltanto una parte delle curve appartenenti all' *n.*^esimo^ *ordine algebraico*: *n* è il massimo grado tanto delle due funzioni razionali che esprimono le due coordinate, quanto dell' equazione che ha luogo tra queste.

27. Si dimostra che tanto la curva inversa quanto la reciproca di una curva di ordine baricentrico è essa pure d' ordine baricentrico; quindi se è *baricentrico* l' ordine è *baricentrica* anche la classe. Una curva dell' ordine baricentrico *n.*^esimo^ è tutto al più della $[2(n-1)]^{esima}$ classe; mentre la classe di una curva dell'ordine *n.*^esimo^ algebraico può elevarsi fino a $n(n-1)$.

28. È facile riconoscere che una curva composta di due o più *pezzi* affatto staccati non può mai essere di ordine baricentrico: si avverta però che non deggiono considerarsi come *pezzi* staccati quelli che rimangono separati da qualche punto situato a distanza infinita, ed il quale colla collineazione si potrebbe sempre ridurre a distanza finita, rendendosi così palese la continuità della curva.

PUNTI SINGOLARI DELLE CURVE, ED ALTRI CARATTERI GENERICI O SPECIFICI.

29. Un carattere, che deve principalmente servire a distinguere le curve le une dalle altre, si è la singolarità di curvatura che esse presentano in qualche punto speciale. — Per riconoscere tutte le curve appartenenti ad uno stesso genere ci bisogna adunque imparare a scorgere i punti *singolari* anche quando mediante la collineazione essi sono passati a distanza infinita; il che darà origine a particolari specie.

30. Contrassegneremo col numero positivo intero o frazionario s ogni punto, nel quale la curva riferita alla sua tangente presa come asse delle x abbia l' equazione della forma $y = x^{1+s}$, essendo x y infinitesime, ed ommettendosi per brevità il fattore finito. Se questo punto passa a distanza infinita, e la sua tangente rimanendo a distanza finita ne sia quindi l' assintoto, la curva riferita all' assintoto avrà l' equazione della forma $y = x^{-s}$, essendo x infinita ed y infinitesima. Che se vada all' infinito la tangente della curva nel punto di cui si tratta, la curva vi sarà espressa dall' equazione $y = x^{\frac{s}{s+1}}$, essendo x ed y infiniti.

31. Così in particolare il punto contrassegnato dal numero 1 è un punto ordinario. Se esso passa a distanza infinita si ha un pajo di rami iperbolici, che divergono avvicinandosi da parti opposte all' assintoto. E se esso passa a distanza infinita insieme colla sua tangente dà due rami parabolici, che si avvicinano sempre più al parallelismo, come quelli della parabola conica.

32. Il punto contrassegnato dal numero 2 è un *flesso* (punto di flesso contrario), che passando a distanza infinita dà due rami infiniti divergenti da una stessa parte dell' assintoto, come quelli dell' iperbola $y = x^{-2}$. Quando passa a distanza infinita la tangente del flesso si hanno i rami parabolici, che divergono volgendosi le convessità l' uno contra l' altro come quelli della parabola Neiliana $y = x^{\frac{3}{2}}$.

33. Il punto contrassegnato dal numero $\frac{1}{2}$ è un *regresso*, che se passa a distanza infinita dà origine a due rami infiniti convergenti dalle due parti dell' assintoto come quelli dell' iperbola $y = x^{-\frac{1}{2}}$. Quando è a distanza infinita la tangente del regresso si hanno due rami parabolici divergenti, di cui ciascuno volge la convessità alla concavità dell' altro, come avviene nella parabola cubica $y = x^{\frac{1}{3}}$.

34. Questi sono i soli punti singolari delle curve algebraiche del terzo ordine, nonche di quelle della terza classe. La figura 1.ª

presenta un punto ordinario M nelle sue tre posizioni, cioè a distanza finita, a distanza infinita con assintoto, ed a distanza infinita insieme colla tangente. Nelle fig. 2.ª e 3.ª si veggono un *flesso* *f* ed un *regresso* *R* egualmente nelle tre posizioni.

35. La collineazione non cangia la natura di un punto, nè il numero col quale proponiamo di contrassegnarlo; soltanto essa può mutare un punto a distanza finita in due rami iperbolici o in due rami parabolici. Perciò le curve comprese in un genere, od anche in una tribù di generi, dovranno avere gli stessi punti singolari: quelle comprese in una specie, od in una famiglia di specie, avranno inoltre rami infiniti in egual numero e qualità.

36. Serviranno pure a distinguere le curve i *punti doppj*; i quali, se sono ordinarj, passando a distanza infinita danno origine a quattro rami infiniti iperbolici cogli assintoti paralleli; due di questi rami possono divenir parabolici tendendo al parallelismo verso l' assintoto degli altri due; ciò avviene quando passa a distanza infinita la tangente di uno dei tratti di curva che si tagliano nel punto doppio. Questi tre casi si scorgono nella fig. 4.ª

37. Un altro carattere generico è il numero dei *pezzi*, di cui si compone una curva; notando però che non si deve badare alla apparente separazione dei *tratti* di una curva, ma bisogna considerare che questi si riuniscono mediante i loro rami infiniti, i quali quantunque il più delle volte affatto divergenti, pure deggiono riguardarsi come diretti ad uno stesso punto, il che diviene palese mediante la prospettiva o la collineazione. Così l' iperbola conica quantunque costituita da due *tratti* separati pure dee considerarsi come di un solo *pezzo*.

38. Per tal maniera ogni *pezzo* di curva è rientrante in sè stesso. Un pezzo di curva, che non ha nè punti singolari nè punti doppj lo si dice un' *ovale*: e tale lo chiameremo quantunque, per esserne passato a distanza infinita uno o due punti, essa non si presenti più all' occhio come una ovale, ma sia *aperta* o come una parabola o come un' iperbola conica. —

Similmente diremo *nodo* una parte di curva senza punti singolari, che si chiude in un punto doppio: anche il nodo potrà essere *aperto* in uno o in due punti.

39. Dicemmo già che le curve di ordine baricentrico sono sempre di un solo pezzo. Fra quelle del terzo ordine algebraico vi è una tribù di generi, di cui tutte le curve sono di due pezzi, uno dei quali è un' ovale, l' altro ha tre flessi.

40. Un carattere generico meno facile a scorgere si è la presenza di punti *isolati* (detti anche *conjugati*). Uno dei generi del terzo ordine algebraico ha un punto isolato; ma l' espressione baricentrica (giacchè quel genere è anche del terzo ordine baricentrico) non comprende tal punto isolato.

41. Sono caratteri specifici quelli che si desumono dai punti posti a distanza infinita. Ogni punto se passa solo a distanza infinita dà origine a due rami iperbolici, ed a due rami parabolici se va all' infinito insieme colla sua tangente: la natura dei rami infiniti fa conoscere come vedemmo (§. 30.) la qualità del punto, cioè il numero che serve a contrassegnarlo. — Le parti separate, da cui è costituita una curva, quando non si considera la loro unione mediante i punti a distanza infinita, le diciamo *tratti*: così l' Ellisse è di un solo *tratto* chiuso; l' Iperbola di due tratti con rami iperbolici ordinarj; la prima Parabola cubica è di un solo tratto con rami parabolici *verso un regresso*, cioè diretti verso un punto di regresso, che sta a distanza infinita; la Cissoide di Diocle di un tratto con un regresso e con rami iperbolici *verso un flesso*; la Concoide di Nicomede è di due tratti a rami iperbolici diretti verso un punto doppio, nel quale i due tratti si toccano.

42. Noteremo pure come carattere specifico la distribuzione dei punti singolari sopra tratti differenti, o la loro riunione sopra uno stesso tratto. Quando un tratto di curva non ha a distanza finita alcun punto singolare lo diremo *puro*. — Le curve del terzo ordine baricentrico sono tutto al più di tre tratti, e quelle del terzo ordine algebraico possono essere di quattro tratti, l' uno di essi essendo un' ovale chiusa. —

Serviranno pure a distinguere le specie, la disposizione dei tratti gli uni rispetto agli altri ed ai loro assintoti, - l' incontrarsi di tre assintoti in un solo punto, - l'esistenza di diametri o di centro di *simmetria*; - ec.

43. Chiamo *diametro di simmetria* quella retta che taglia per metà tutto un sistema di corde parallele. Nelle curve di ordine dispari è necessario che tali corde sieno dirette verso un punto situato a distanza infinita: pel terzo ordine tal punto, che deve andare a distanza infinita, è un flesso; ed ogni qual volta un flesso va a distanza infinita la curva ha un diametro di simmetria. Siccome le curve del terzo ordine (eccettuate quelle che noi riferiremo ai generi I. e II.) hanno tre flessi posti in una stessa linea retta; così facendo andare all'infinito tal retta si hanno tre differenti diametri di simmetria di una stessa curva.

44. Se si fa andare all' infinito un diametro di simmetria, quel punto, che prima era a distanza infinita, ed a cui si volgevano tutte le corde dimezzate dal diametro, diventa un *centro di simmetria*, che taglia per metà tutte le corde che passano per esso. Nelle curve del terzo ordine il centro di simmetria è (§. 43.) sempre un flesso.

45. Dicemmo che i punti ordinarj o singolari non cangiano colla collineazione; poichè anche quando passano a distanza infinita noi continuiamo a contrassegnarli collo stesso numero, ed a chiamarli *flessi* o *regressi*, quantunque non sia più apparente nè la flessione contraria nè il regresso. — È naturale la dimanda qual relazione abbia luogo tra due parti *corrispondenti* di due curve reciproche oppure derivate-polari. Si rammenti che tutti i punti di una curva hanno per reciproche le rette, che sono tangenti della curva reciproca, e i punti di contatto di queste tangenti sono reciproci delle tangenti della curva primitiva; sicchè diciamo punti corrispondenti quelli che sono reciproci delle rispettive tangenti. Con facile calcolo si trova che ad un punto contrassegnato dal numero s corrisponde nella figura reciproca o derivata-polare un punto contrassegnato dal

numero $\frac{1}{s}$. Perciò ad un punto ordinario corrisponde un punto ordinario, e ad un flesso ($s=2$) corrisponde un regresso ($s=\frac{1}{2}$).

46. Se una curva ha un punto doppio, la sua reciproca ha una *tangente doppia*, cioè una tangente che tocca la curva in due punti differenti: e se questa tangente passa a distanza infinita si hanno quattro rami parabolici.

47. Non è altrettanto semplice la corrispondenza dei punti singolari nelle curve inverse. — Se una delle due curve in un punto contrassegnato dal numero s abbia la tangente, che non passi pel centro d' inversione I, il punto inverso sarà contrassegnato dallo stesso numero s nel caso che sia $s<1$. Che se sia $s>1$ il punto inverso sarà contrassegnato dal numero 1, cioè sarà un punto ordinario. Se finalmente sia $s=1$, cioè il punto della prima curva sia ordinario, bisogna distinguere due casi secondo che il circolo osculatore in quel punto non passa o passa pel centro d'inversione: nel primo caso anche il punto inverso sarà ordinario; invece nel secondo caso (siccome il circolo osculatore ha per inversa una retta) bisognerà determinare l' ordine S.esimo del contatto della prima curva col suo circolo osculatore, e lo stesso contatto avrà luogo tra la curva inversa e la sua tangente; perciò il punto inverso sarà contrassegnato dal numero S. — Ne viene che, generalmente parlando, un punto, il cui circolo osculatore passa pel centro d' inversione, ha per inverso un flesso contrassegnato dal numero 2.

48. Quando la tangente nel punto primitivo passa pel centro d' inversione, il punto inverso è contrassegnato dallo stesso numero del primitivo.

49. Ci resta da considerare il caso che nelle due curve inverse uno dei punti sia nel centro d' inversione, e l' altro, per conseguenza, sia a distanza infinita. — Per il primo sia contrassegnato dal numero $s<1$, il suo inverso avrà la tangente a distanza infinita (cioè esisteranno due rami parabolici) e sarà contrassegnato dal numero $\frac{1}{s}-1$. — Se invece il primo punto sia contrassegnato dal numero $s>1$, il suo punto inverso

sarà contrassegnato dal numero $s-1$, ed il suo assintoto passerà pel centro d'inversione. — Se finalmente nel centro d'inversione vi sia un punto ordinario, nel quale la curva abbia col proprio circolo osculatore un contatto dell' ordine $(S+1)^{esimo}$, il punto inverso avrà l' assintoto, che non passerà pel centro d'inversione, e sarà contrassegnato dal numero S. — Nel centro d' inversione vengono a riunirsi i punti inversi di tutti quelli, che sono a distanza infinita.

50. Per giustamente interpretare che cosa debba intendersi per l' ordine del contatto di due linee (anche quando questo ordine è frazionario) noteremo che se all' ascissa infinitesima x presa sulla loro comune tangente corrisponde la differenza $ax^{\alpha}+bx^{\beta}+$ ec. delle loro ordinate, sarà $\alpha-1$ l' ordine del contatto (essendo α il più piccolo degli esponenti). — Così, per esempio, essendo

$$\frac{x^2}{2r}+\frac{x^4}{8r^3}+\text{ec.}$$

l' ordinata del circolo osculatore, se quella della curva sia

$$\frac{x^2}{2r}+cx^{\frac{5}{2}}+\text{ec.},$$

il contatto tra il circolo e la curva sarà dell'ordine $(\frac{3}{2})^{esimo}$, anzichè del secondo ordine come è di solito. — Per quanto superiormente abbiamo detto se mediante l' inversione si faccia andare all' infinito quel punto si otterrà un regresso contrassegnato dal numero $\frac{1}{2}$. Che se invece il centro d' inversione non coincidesse col precedente punto, che ha un contatto dell' ordine $(\frac{3}{2})^{esimo}$ col proprio osculatore, ma bensì fosse un punto di questo circolo, il punto inverso sarebbe contrassegnato dal numero $\frac{3}{2}$, e perciò sarebbe una specie di regresso a curvatura nulla.

51. Quantunque la singolarità dei punti, nei quali la curva ha col proprio circolo osculatore un contatto differente dal secondo ordine, non si renda manifesta all' occhio; pure essi meritano essere avvertiti per l' effetto che producono nella inversione. Tali sono per esempio i vertici delle coniche, ai quali spetta un contatto del terzo ordine.

CURVE INVERSE DELLE CONICHE.

52. Le coniche hanno tutti i loro punti ordinarj; perciò le curve inverse dell' ellisse non avranno altri punti singolari oltre quelli che nascono dai punti dell' ellisse, i cui circoli osculatori passano pel centro d'inversione. Uno di questi punti sarà (§. 47.) contrassegnato dal numero 2 (cioè sarà punto di flesso) se il circolo osculatore spetta ad un punto ordinario dell' ellisse; e sarà contrassegnato dal numero 3 (cioè sarà un punto di curvatura nulla) se il circolo spetta ad uno dei vertici. — Nelle inverse della parabola vi sarà inoltre (§. 49.) nel centro d'inversione un regresso contrassegnato dal numero $\frac{1}{2}$. — Invece nelle inverse dell' iperbola il centro d' inversione sarà (§. 49.) un punto doppio, e i due tratti di curva avranno colà un punto ordinario od un flesso, secondo che quel centro d' inversione sarà preso fuori di un assintoto, o sopra di esso.

53. Le inverse delle coniche sono generalmente parlando del quarto ordine baricentrico, e non hanno alcun punto a distanza infinita: l' ordine però si abbassa al terzo quando il centro d' inversione è sulla conica stessa; in tal caso la curva inversa ha un punto a distanza infinita.

54. Prendendo il centro d' inversione nel vertice di una conica, la curva inversa della parabola avrà (§. 49.), oltre il regresso, un flesso a distanza infinita. — Un simile flesso avrà l' inversa dell' iperbola, oltre il punto doppio. — L' inversa dell' ellisse avrà un flesso a distanza infinita, ed inoltre due flessi dipendenti da quei due suoi circoli osculatori, che la tagliano in quel vertice che fu preso per centro d' inversione. L' assintoto del primo flesso è inverso del circolo osculatore nel vertice, ed è quindi perpendicolare all' asse dell' ellisse; ed è palese che questo sarà eziandio un asse di simmetria della curva inversa, la quale avrà quindi gli altri due flessi sopra una corda perpendicolare all' asse, e perciò diretta verso il terzo flesso che è a distanza infinita; cioè i tre flessi della curva sono in linea retta.

55. Tutte le curve del terzo ordine baricentrico sono collineari coll' una o coll' altra delle tre predette curve inverse della parabola, dell' iperbola, dell' ellisse. D' altronde ogni altra curva inversa di una conica (il centro d' inversione essendo un punto della conica stessa differente dal vertice) è del terzo ordine baricentrico. — Secondo che tal curva avrà un regresso, od un punto doppio, oppure nessun regresso e nessun punto doppio, essa apparterrà al genere delle inverse della parabola o dell' iperbola o dell' ellisse. — Ora le curve dei due primi generi hanno sempre anche un flesso (giacchè la collineazione non può distruggere il flesso, che nell' ipotesi del §. precedente sta a distanza infinita); perciò immaginando che un punto qualunque di una parabola o di una iperbola sia scelto per centro d' inversione noi vediamo (§. 47.) che: *Per ogni punto di una parabola o di una iperbola, che non sia un vertice, passa sempre uno, ed uno solo, dei circoli osculatori della curva in altro punto.* — Similmente siccome le curve del terzo genere hanno tre flessi in linea retta, così: *Per ogni punto di un' ellisse, che non sia uno dei suoi vertici, passano sempre tre circoli osculatori della curva in altri tre punti, i quali appartengono ad un circolo che passa per quel punto.* Teorema già dato dallo Steiner.

Classificazione delle curve.

56. Premessi questi principj, veniamo alla classificazione delle curve del terzo ordine algebraico, e cominciamo da quella sua parte che costituisce il

Terzo ordine baricentrico.

Carattere. *Curve di un solo pezzo con un flesso e un punto doppio, oppure tre flessi in linea retta; il punto doppio o due flessi possono convertirsi in un regresso.*

Genere I.

CURVE DEL TERZO ORDINE E DELLA TERZA CLASSE, DI UN SOLO PEZZO CON UN REGRESSO ED UN FLESSO.

57. Prenderemo per tipo di questo genere la curva inversa della parabola quando il centro d' inversione è nel vertice. Essa è la Cissoide di Diocle, che ha la forma espressa dalla figura 5.ª col regresso J, e coll' assintoto 11 spettante al flesso che sta a distanza infinita.

58. Per derivare da questa curva mediante la collineazione tutte quelle, che sono del suo stesso genere, bisognerà far andare all' infinito una qualunque retta posta nel piano della curva. — Ora questa retta può essere o l' assintoto 11; o la tangente 22 del punto di regresso; o la retta 55, che comprende il regresso ed il flesso; o la 88 diretta al flesso; o la 99, che comprende il flesso e due altri punti della curva; o la 1010, che passa pel regresso; o la 1212, che tocca la curva in un punto e la taglia in un altro; o la 1313, che la taglia in un solo punto; o la 1414, che la taglia in tre punti. — Ciò dà origine alla divisione del genere in nove parti, di cui sette sono specie, e due sono famiglie di specie.

59. Indico tali divisioni dei generi coi numeri dall' 1 al 14, perchè (come meglio si renderà palese nel prospetto riassuntivo della classificazione) le curve del terzo ordine oltrechè in generi si dividono mediante un carattere specifico in quattordici *categorie*, che giova distinguere sempre con un medesimo numero. Peraltro ciascun genere non può comprendere tutte le quattordici categorie: così nel I. mancano le categorie 3, 4, 6, 7, 11. Ogni specie o famiglia di specie sarà distinta col numero del genere e con quello della categoria.

60. Specie I. 1. Carattere. *Un tratto col regresso e coi rami parabolici verso il flesso.* Appartiene a questa specie la parabola Neiliana. Prese le ascisse x sulla tangente del regresso

e le ordinate y in una determinata direzione, esse sono espresse mediante una variabile reale t dalle equazioni

$$x = a t^2, \qquad y = b t^3.$$

Per ottenere tutte le curve tra loro affini, cioè tutte quelle che appartengono alla presente specie ci resta da cangiare i parametri a b, nonchè l' angolo delle coordinate; ma atteso l' arbitrarietà del valore di t è palese che cangiando ambedue le a b non si ottiene niente di più che col cangiarne una sola. Perciò questa specie è veramente a due soli parametri, che sono l'angolo delle coordinate, e la p compresa nell'equazione $x^3 = py^2$. Del resto noi scriveremo

$$x = t^2, \quad y = t^3, \quad x^3 = y^2,$$

ed intenderemo sempre che rimangano arbitrarj l'angolo delle coordinate, e le due unità di lunghezza, alle quali si riferiscono i numeri x y; le quali due unità possono essere tra loro disuguali.

61. La curva avendo un flesso a distanza infinita ha (§. 43.) un *diametro di simmetria*, che è quello su cui si sono prese le ascisse x. — In tutte le specie di questo genere faremo che a $t = 0$ corrisponda il regresso ed a $t = \infty$ il flesso.

62. Specie I. 2. *Un tratto col flesso e rami parabolici verso il regresso.* Appartiene a questa specie la prima parabola cubica. Anche questa specie è a due soli parametri; prese le x sulla tangente del flesso si ha

$$x = \frac{1}{t}, \qquad y = \frac{1}{t^3}, \qquad y = x^3.$$

Essendo passato a distanza infinita il diametro di simmetria della specie precedente, questa specie I. 2. ha (§. 44.) *centro di simmetria*, che è il flesso origine delle coordinate.

63. Specie I. 5. *Due tratti puri, ciascuno coi rami iperbolici l'uno verso il regresso e l'altro verso il flesso.* Prendendo le x sull' assintoto del regresso, che è anche *diametro di simmetria*, e le y sull' assintoto del flesso si ha

$$x=\frac{1}{t^2},\qquad y=t,\qquad xy^2=1.$$

Vi sono due parametri, cioè l' angolo formato dagli assintoti, ed una unità di lunghezza.

64. Specie I. 8. *Un tratto col regresso e rami iperbolici verso il flesso.* Prendendo le x nella tangente del regresso, che è anche *diametro di simmetria*, e le y parallele all' assintoto del flesso, si ha

$$x=\frac{t^2}{1+t^2},\qquad y=\frac{t^3}{1+t^2},\qquad x(x^2+y^2)=y^2.$$

Questa e le specie seguenti sono, come è di solito, a tre parametri. Appartiene a questa specie la Cissoide, da cui siamo partiti; essa ha luogo quando le coordinate sono ortogonali, cioè il diametro è perpendicolare alle sue ordinate ed all' assintoto; inoltre le due coordinate sono riferite alla stessa unità, e perciò l' ordinata eguale all' ascissa è quella equidistante tra il regresso e l' assintoto.

65. Specie I. 9. *Tre tratti: uno col regresso e rami iperbolici ordinarj; ciascuno degli altri due coi rami iperbolici uno ordinario ed uno verso il flesso.* Analogamente alla I. 8. si ha

$$x=\frac{t^2}{1-t^2},\qquad y=\frac{t^3}{1-t^2},\qquad x^3=(x+1)y^2.$$

66. Specie I. 10. *Due tratti, l'uno col flesso l'altro puro; ciascuno coi rami iperbolici uno ordinario ed uno verso il regresso.* Prendendo le coordinate sugli assintoti del regresso e del punto ordinario si ha

$$x=\left(1-\frac{1}{t}\right)\left(2+\frac{1}{t}\right),\qquad y=\frac{t}{t-1},\qquad xy^2=3y-1.$$

67. Specie I. 12. *Due tratti, l'uno col regresso l'altro col flesso; ambedue coi rami iperbolico e parabolico ordinarj.*

68. Famiglia I. 13. *Un solo tratto con regresso, flesso, e rami iperbolici ordinarj.* Appartengono a questa famiglia le curve inverse della parabola quando il centro d' inversione è un punto della parabola diverso dal vertice. Queste inverse della

parabola si possono descrivere alla stessa maniera della Cissoide mediante un circolo ed una sua tangente.

69. Famiglia I. 14. *Tre tratti coi rami iperbolici ordinarj: uno col regresso, uno col flesso ed uno puro.* Prendendo le x sulla tangente del regresso e le y sulla retta, che unisce il regresso cól flesso, tutte le specie I. 12. 13. 14. sono espresse da

$$x = \frac{t^2}{(t-1)(t^2+at+a)}, \quad y = \frac{t^3}{(t-1)(t^2+at+a)}$$

ed hanno l' equazione

$$(y-x)(y^2+axy+ax^2)=y^3;$$

a è un parametro, che distingue una specie dall' altra. Se $a=4$, cioè se la $t^2+at+a=0$ ha due radici uguali, si ha la particolare specie definita in I. 12.; ogni altro valore di a dà una specie differente. Tutte queste infinite specie si separano naturalmente in due famiglie secondo che $t^2+at+a=0$ ha due radici reali o ne è priva, il che porta l' esistenza di tre o di un solo punto a distanza infinita. — Quantunque non si abbia altro carattere apparente per distinguere l' una dall' altra le infinite specie contenute in ciascuna famiglia, pure esse sono specie differenti; cioè colla derivazione di affinità non si potrebbe passare dall' una all' altra. — Nella famiglia I. 14., posto

$$t^2+at+a=\left(t-c\right)\left(t+\frac{c}{c+1}\right),$$

si possono dare a c tutti i valori da 0 ad 1 senza mai ricadere nella stessa specie.

Genere II.

Curve del terzo ordine e della quarta classe di un solo pezzo con un flesso ed un punto doppio.

70. Il tipo di questo genere è l' inversa della iperbola, il centro d' inversione essendo uno dei due vertici; la forma di tal curva è simile al *Folium* del Cartesio, il quale è propria-

mente inverso dell'iperbola equilatera. Come facemmo pel genere I. noi potremmo dedurre tutte le specie dal suddetto tipo facendone andare all'infinito l'una o l'altra retta: otterremo eguali risultamenti operando in simil modo sulla seguente specie II. 1., a cui si perviene facendo andare all'infinito l'assintoto della predetta inversa della parabola.

71. Specie II. 1. *Un tratto puro annodato coi rami parabolici verso il flesso.* Prendendo le ascisse x sul diametro di simmetria (cioè in quella retta, che dal punto doppio J va al punto V, la cui tangente è diretta verso il flesso, che sta a distanza infinita) e le ordinate y essendo dirette verso il flesso, la curva è espressa da

$$x = t^2 - 1\,, \qquad y = t\,(t^2 - 1)\,, \qquad x^3 = y^2 - x^2\,.$$

72. In tutto questo genere a $t = 0$ corrisponde il predetto punto V, che diremo il *vertice* della curva, a $t = \pm 1$ il punto doppio J, ed a $t = \infty$ il flesso S. — La specie è a tre parametri, che sono l'angolo delle coordinate, e le due unità di lunghezza, colle quali queste si suppongono misurate. — Se immaginiamo che nella figura 6.ª vada all'infinito una delle rette 22 33 66 77 88 99 1111 1212 1313 1414 otteniamo dieci categorie, di cui ora indicheremo i caratteri, quali si deducono considerando attentamente l'effetto di tale derivazione collineare.

73. Specie. II. 2. *Tre tratti coi rami iperbolici ordinarj, uno di essi ha gli assintoti paralleli ed ha un flesso che è il centro di simmetria.* Preso questo centro S per origine delle coordinate, le x sulla tangente nel flesso S, e le y sull'assintoto, che da S volgesi al vertice V passato a distanza infinita, si ha

$$x = \frac{t}{t^2 - 1}\,, \qquad y = \frac{1}{t\,(t^2 - 1)}\,, \qquad x\,(x - y)^2 = y.$$

74. Specie II. 3. *Due tratti: uno col flesso, l'altro puro, ambedue con un ramo iperbolico ordinario ed uno parabolico ordinario, che tende al parallelismo coll'assintoto del primo.* Questo è il Tridente del Cartesio. Prendendo l'origine delle

coordinate nel punto V, le x sulla tangente VS, e le y parallele all' assintoto (il quale dimezza la VS), si ha

$$x = \frac{t}{t-1}, \quad y = \frac{t^2}{(t-1)^2(t+1)}, \quad x^3 = x^2 + 2xy - y.$$

75. Specie II. 6. *Tre tratti puri; due rami iperbolici verso il flesso, e quattro ordinarj cogli assintoti paralleli.* Prendendo l' origine delle coordinate nel vertice V, e le x sul diametro di simmetria, che è parallelo a due assintoti, si ha

$$y = t, \quad x = \frac{t^2}{t^2-1}, \quad xy^2 = y^2 + x.$$

76. Specie II. 7. *Due tratti puri che si tagliano; ciascuno ha un ramo parabolico ordinario ed uno iperbolico verso il flesso.* Il nodo si è aperto essendo passata a distanza infinita la tangente VS. Preso il punto doppio per origine delle coordinate, le ascisse x sul diametro di simmetria, e le ordinate y parallele all' assintoto del flesso, si ha

$$x = \frac{t^2-1}{t^2}, \quad y = \frac{t^2-1}{t}, \quad xy^2 = y^2 - x^2.$$

77. Famiglia II. 8. *Un tratto puro annodato coi rami iperbolici verso il flesso.* Scelto il punto doppio J per origine delle coordinate, le ascisse essendo prese sul diametro di simmetria JV, e le ordinate essendo parallele all' assintoto, si ha

$$x = \frac{t^2-1}{t^3+c^2}, \quad y = xt, \quad xy^2 + c^2x^3 = y^2 - x^2;$$

perciò, oltre i tre soliti parametri di ciascuna specie, si ha un parametro c^2, che distingue l' una dall' altra le infinite specie di questa famiglia. In ciascuna specie quando le ascisse e le ordinate sono tra loro ortogonali ed il rapporto delle unità a cui si riferiscono è c, la curva è quel *Folium* inverso di un' iperbola, di cui parlammo al principio di questo genere; c è il rapporto dell' asse secondario dell' iperbola al suo primario.

78. La categoria 9. ci dà in questo genere due famiglie secondo che il nodo resta *chiuso* od è aperto.

Famiglia II. 9. *A. Tre tratti puri: uno annodato coi rami iperbolici ordinarj; ciascuno degli altri due coi rami iperbolici uno ordinario ed uno verso il flesso.*

Famiglia II. 9. *B. Tre tratti puri: uno coi rami iperbolici ordinarj; gli altri due si tagliano, e ciascuno ha un ramo iperbolico ordinario ed uno verso il flesso.*

Le equazioni di queste due famiglie non differiscono da quella della II. 8. se non se pel cangiamento di c^2 in $-c^2$. Alla famiglia *A* corrisponde c^2 superiore all' unità, invece se c^2 è inferiore all' unità si ha la famiglia *B*. — In questa famiglia potrebbe distinguersi la specie corrispondente a $c^2 = \frac{1}{3}$, nella quale i tre assintoti s' incontrano in un solo punto. Essa è la specie 30.ª del Newton; del rimanente di questa famiglia egli fece due specie 18.ª 19.ª, secondo che il triangolo formato dai tre assintoti volge al punto doppio un suo vertice od una sua base. È evidente che queste tre specie del Newton sono di diversa estensione, e che la sola 30.ª è, secondo i principj da noi stabiliti, una vera specie, di cui tutte le curve sono tra loro affini: le altre due specie del Newton sono due sottofamiglie.

79. Famiglia II. 11. *A. Tre tratti coi rami iperbolici ordinarj; un flesso; due assintoti paralleli: il tratto col vertice* V *ha i due rami cogli assintoti paralleli.* Prendendo le x sulla tangente VS, e le y dirette verso il punto doppio, che sta a distanza infinita, cioè parallele ai due assintoti, si ha

$$x = \frac{t}{t-c}, \quad y = \frac{t^2}{(t^2-1)(t-c)}$$

$$(c^2-1)\,x^2y - c\,x^3 + 2\,xy + c\,x^2 + y = 0;$$

essendo $c^2 > 1$, poichè se fosse $c^2 < 1$ si avrebbe invece la

Famiglia II. 11. *B. Tre tratti coi rami iperbolici ordinarj; quello col flesso ha i rami cogli assintoti paralleli.*

80. Famiglia II. 12. *A. Due tratti: uno puro annodato, ed uno col flesso; ciascuno coi rami ordinarj uno iperbolico ed uno parabolico.*

Famiglia II. 12. *B. Due tratti che si tagliano; uno puro, ed uno col flesso; ciascuno coi rami ordinarj uno iperbolico ed uno parabolico.*

81. Famiglia II. 13. *Un solo tratto annodato col flesso e coi rami iperbolici ordinarj.* Appartengono a questa famiglia tutte le inverse dell' iperbola, quando il centro d'inversione è un punto dell' iperbola differente dal vertice.

82. Famiglia II. 14. *A. Tre tratti con un flesso e i sei rami iperbolici ordinarj; un tratto puro è annodato.*

Famiglia II. 14. *B. Tre tratti coi rami iperbolici ordinarj: un tratto col flesso ed uno puro si tagliano.*

83. Prendendo le x sulla JV, e le y sulla JS, queste cinque famiglie sono espresse da

$$x = \frac{t^2 - 1}{(t^2 - 1)(t + b) + b - a}, \quad y = \frac{t(t^2 - 1)}{t^3 - t + bt^2 - a}$$

$$y^3 + bxy^2 - x^2y - ax^3 = y^2 - x^2,$$

e secondo che l'equazione $t^3 + bt^2 - t - a = 0$ avrà due radici uguali o due immaginarie o tre disuguali la curva apparterrà alla categoria 12. od alla 13. od alla 14. Si esclude il caso di $b = a$, poichè allora si cadrebbe nella categoria 11.

Genere III.

CURVE DEL TERZO ORDINE E DELLA QUARTA CLASSE DI UN SOLO PEZZO CON TRE FLESSI IN LINEA RETTA.

84. Stando alla relazione tra le coordinate parallele queste curve ammettono anche un punto isolato, cui però non danno le espressioni delle coordinate in funzioni razionali di una variabile reale t. Ritenendo anche il punto isolato, la curva ascenderebbe alla quinta classe, poichè ogni retta condotta pel punto isolato dovrebbe considerarsi come una tangente. La curva derivata-polare (§. 16.) è il complesso di una curva del quarto ordine e di una retta derivata-polare del punto isolato, dalla qual retta si può far astrazione.

85. Nelle curve di questo genere sono da notarsi oltre i tre flessi S S′ S″ (le cui tangenti A′A″, A″A, A A′ formano un triangolo A A′ A″) anche i tre punti V, V′, V″, ai quali noi daremo il nome di *vertici*, e le cui tangenti V S, V′ S′, V″ S″ passano rispettivamente pei flessi. — I lati del triangolo V V′ V″ passano (non meno di quelli del triangolo A A′ A″) pei tre flessi S″ S S′, e siccome questi sono in linea retta, così, pel noto teorema sui triangoli *omologhi*, le tre rette VA, V′A′, V″A″ concorrono in un medesimo punto, che è il punto isolato J (fig. 7.ª). — Tra questi punti hanno luogo altre proprietà, che noi indicheremo quì appresso essendo esse comuni a tutte le curve del terzo ordine algebraico.

86. Alcune di queste proprietà possono, mediante l'inversione, trasportarsi all' ellisse, nella quale per ciascuno JV dei suoi due assi vi sono i punti S′ S″, i cui circoli osculatori passano per J; la loro ascissa contata da J eguaglia i tre quarti dell' asse JV: l' ascissa comune ai punti V′, V″ è il quarto di JV.

87. In tutte le formule relative a questo genere i tre flessi S, S′, S″ corrispondono a $t=\infty$ ed a $t=\mp 1$, ed i tre *vertici* V, V′, V″ corrispondono a $t=0$ ed a $t=\pm 3$. Il punto isolato corrisponde a $t^2+3=0$.

88. Le inverse dell' ellisse, quando il centro d' inversione è uno dei vertici, sono specie appartenenti alla famiglia III. 8.; facendone andare all' infinito l' assintoto otterremo la seguente specie, che più comodamente ci servirà da tipo dell' intero genere.

89. Specie III. 1. *Un solo tratto con due flessi e coi rami parabolici verso il terzo flesso.* Essendo a distanza infinita un flesso le corde ad esso tirate saranno dimezzate da un diametro di simmetria; noi prenderemo le x su questo diametro, e le y parallelamente a quelle corde, e scelto per origine delle coordinate il punto isolato J sarà

$$x=t^2+3, \qquad y=tx, \qquad x^3=y^2+3x^2.$$

Facendo andare all' infinito l' una o l' altra delle rette indicate nella fig. 7.ª otterremo le seguenti specie.

90. Specie III. 2. *Un solo tratto coi rami iperbolici ordinarj; uno dei tre flessi è il centro di simmetria.* Prendendo per origine delle coordinate il centro S, e per assi la tangente S e l' assintoto S V, si ha

$$x = \frac{t}{t^2 + 3}, \quad y = \frac{x}{t^2}, \quad x(x + 3y)^2 = y.$$

91. Specie III. 4. *Tre tratti puri coi rami iperbolici rivolti ai tre flessi.* Il triangolo A A' A'' è quello formato dai tre assintoti; J ne è il centro di gravità; J A V, J A' V', J A'' V'' sono i tre diametri di simmetria, che dimezzano le corde parallele agli assintoti A' A'', A A'', A A'. Si ha J A = 2 . A V, ec. Prese le x su uno dei diametri di simmetria partendo da J, si ha

$$x = \frac{t^2 + 3}{t^2 - 1}, \quad y = \frac{t^2 + 3}{t^2 - 1} t, \quad xy^2 - x^3 = y^2 + 3x^2.$$

92. Specie III. 7. *Due tratti ciascuno con un flesso, un ramo parabolico ordinario ed uno iperbolico verso il terzo flesso.* È passato a distanza infinita uno dei vertici V insieme colla propria tangente; le rette V'' S', V' S'' sono parallele al diametro J A; la tangente V' S' è parallela alla retta J A'' V'', ec. Prese al solito le ascisse sul diametro di simmetria, sarà

$$x = 1 + \frac{3}{t^2}, \quad y = t + \frac{3}{t}, \quad xy^2 = y^2 + 3x^2.$$

93. Famiglia III. 8. *Un tratto con due flessi e coi rami iperbolici verso il terzo flesso.* Si ha

$$x = \frac{t^2 + 3}{t^2 + c^2}, \quad y = xt, \quad xy^2 + c^2 x^3 = y^2 + 3x^2.$$

Ponendo attenzione al punto isolato si possono separare le due sottofamiglie:

α) *Il tratto della curva è interposto tra l'assintoto e il punto isolato.*

β) *L' assintoto è interposto tra il punto isolato e il tratto di curva.*

Le inverse dell' ellisse appartengono alla sottofamiglia α) od alla β) secondo che il centro d' inversione fu preso sopra uno

dei vertici dell' asse maggiore o dell' asse minore. Nel primo caso $c^2 > 3$, nel secondo $c^2 < 3$.

94. Merita essere distinta la specie intermedia a queste due sottofamiglie ($c^2 = 3$), nella quale è passato a distanza infinita il punto isolato; poichè quantunque la sua figura non presenti un carattere molto apparente, pure l' equazione ne è essenzialmente diversa. Noi la riferiremo alla categoria 6, considerando il punto isolato come se fosse un punto doppio; perciò la indicheremo con

Specie III. 6. *Un tratto con due flessi e coi rami iperbolici verso il terzo flesso. Le distanze tra l' assintoto e la retta che unisce i due flessi, e tra questa e la tangente ad essa parallela hanno il rapporto* 3 : 1. Prendendo l' origine delle coordinate nel vertice V si ha

$$x = \frac{t^2}{t^2 + 3}, \quad y = \frac{t}{3}, \quad xy^2 = y^2 - \tfrac{1}{3}x.$$

95. Famiglia III. 9. *A. Tre tratti: uno con due flessi e coi rami iperbolici ordinarj; ciascuno degli altri due puro e coi rami iperbolici l' uno ordinario l' altro verso un flesso.* Il punto isolato e il diametro di simmetria essendo l' origine e l' asse delle x, si ha

$$x = \frac{t^2 + 3}{t^2 - c^2}, \quad y = xt, \quad xy^2 - c^2 x^3 = y^2 + 3x^2,$$

purchè $c^2 > 1$; se fosse $c^2 < 1$ si avrebbe la seguente

Famiglia III. 9. *B. Tre tratti: uno puro coi rami iperbolici ordinarj; ciascuno degli altri due con un flesso e coi rami iperbolici l' uno ordinario l' altro verso un flesso.*

96. Considerando il punto isolato come un punto doppio distingueremo dalla famiglia a cinque parametri III. 13. la particolare famiglia a quattro parametri III. 11., nella quale il punto isolato passa a distanza infinita insieme con un punto ordinario della curva: e ciò per le stesse ragioni che ci fecero notare la specie III. 6.

Famiglia III. 11. *Un solo tratto coi rami iperbolici ordinarj. Il triangolo* A A' A'' *formato dalle tangenti dei tre flessi, e*

quello V V' V'' *dei tre punti, le cui tangenti passano pei flessi, hanno i vertici corrispondenti in tre rette parallele* VA, V'A', V''A''. Prendendo per origine delle coordinate uno dei flessi S, e per assi la tangente in S e la SV tangente in V, si ha

$$x = \frac{a t^2}{(t^2+3)(a-t)}, \qquad y = \frac{3a}{(t^2+3)(a-t)}$$

$$\left(y - \frac{3x}{a^2}\right)\left(x+y\right)^2 - 2y\left(x+y\right) + y = 0.$$

97. Famiglia III. 12. *Due tratti, ciascuno con rami iperbolico e parabolico ordinarj. I tre flessi sono separati nei due tratti.*

98. Famiglia III. 13. *Un solo tratto con tre flessi e coi rami iperbolici ordinarj.*

99. Famiglia III. 14. *Tre tratti coi rami iperbolici ordinarj; uno ha un flesso, uno ne ha due, e l' altro è puro.* Le tre ultime famiglie, prendendo le x sulla JV e le y sulla JS, sono espresse da

$$x = \frac{t^2+3}{(t^2+3)(t+b)-3b+3a}, \qquad y = \frac{t^3+3t}{t^3+3t+bt^2+3a}$$

$$y^3 + bxy^2 + 3x^2y + 3ax^3 = y^2 + 3x^2$$

e, secondo che l' equazione $t^3 + bt^2 + 3t + 3a = 0$ avrà due radici eguali o due immaginarie o tre disuguali, la curva apparterrà alla famiglia III. 12. od alla III. 13. od alla III. 14. — Non dovrà essere $3a + b = \pm 4$, perchè in tal caso un flesso sarebbe a distanza infinita, e si avrebbe una delle specie o famiglie precedenti.

CURVE DEL TERZO ORDINE ALGEBRAICO, MA NON BARICENTRICO.

100. I tre generi di curve, di cui abbiamo data la classificazione, comprendono tutte le curve del terzo ordine baricentrico, cioè le cui coordinate possono esprimersi in funzioni razionali di una variabile; il terzo ordine algebraico ne comprende molte altre, di cui ci resta dare la classificazione. — Le parabole appartenenti alla categoria 1., da cui deducemmo mediante la collineazione tutte le curve dei tre generi, hanno le equazioni

$$y^2 = x^3, \qquad y^2 = x^3 + x^2, \qquad y^2 = x^3 - 3x^2.$$

Più generalmente possiamo prendere l' equazione

$$ry^2 = x^3 + 2nx^2 + mx + a.$$

Trasportando l' origine delle x, e dividendo le coordinate per opportuni coefficienti (il che possiamo fare senza uscire dalla specie della curva) faremo sparire l' ultimo termine, e ridurremo r ed m all' unità (il caso di $m = 0$ essendo già trattato nei generi I., II. e III.), sicchè avremo $y^2 = x^3 + 2nx^2 + x$. I differenti valori di n daranno altrettante curve di diverso genere, cioè tali che una non può cangiarsi nell'altra mediante la più generale derivazione di collineazione.

101. Quando $n = -1$ si ricade nel genere II. e quando $n = 1$ nel genere III., noi intenderemo esclusi questi due valori, e che inoltre sia $n > -1$. — Se cerchiamo l'ascissa $x = g$ corrispondente ai due flessi S′, S″ troviamo che essa è legata all' altra costante n mediante l' equazione

$$3g^4 + 8ng^3 + 6g^2 = 1.$$

L' ordinata corrispondente al flesso S″ è $\frac{1 - g^2}{2\sqrt{g}}$, ed al flesso S′ è $-\frac{1 - g^2}{2\sqrt{g}}$. — Ci potrà servire da parametro per distinguere un genere dall' altro tanto n quanto g, di cui consideriamo il solo più piccolo valore positivo. Nel II. genere è $g = 1$, e nel III. è $g = \frac{1}{3}$.

102. L' origine delle coordinate è il vertice V (fig. 8.ª), la cui tangente è diretta verso il flesso S, che sta a distanza infinita. Le tangenti negli altri due flessi S′, S″ si tagliano nel punto A determinato dall' ascissa $VA = \frac{-2g^3}{1 - 3g^2}$; e le due tangenti AS″A′, AS′A″ sono considerate formare un triangolo colla A′A″ tangente in S, e la quale sta tutta a distânza infinita.

103. Sulla prolungazione della VS″ vi è il punto V′ della curva, la cui tangente passa pel flesso S′; esso ha l' ascissa $\frac{1}{g}$

e l'ordinata $\frac{1-g^2}{2g^2\sqrt{g}}$. Similmente V″ ha egual ascissa e l'ordinata $-\frac{1-g^2}{2g^2\sqrt{g}}$. I due triangoli VV′V″, AA′A″ hanno i lati che si incontrano nei tre punti della retta SS′S″; perciò le rette che ne uniscono i vertici corrispondenti s'incontreranno in un punto J, il quale nel nostro caso della parabola divergente sarà l'intersezione dell'asse delle x colla V′J parallela alla S″A. Si trova $JV = \frac{2g}{1-3g^2}$.

104. Parecchie delle proprietà ora accennate si conservano passando da una curva ad ogni sua collineare, sicchè in tutte le curve del terzo ordine (eccettuate quelle dei generi I. e II.) un pezzo di curva ha tre flessi S, S′, S″ in linea retta, ed inoltre tre punti V, V′, V″, le cui tangenti passano rispettivamente per quei flessi, cioè sono le rette VS, V′S′, V″S″. I lati del triangolo VV′V″ passano pei flessi, e, condotte pei detti flessi anche le loro tangenti A′A″, AA″, AA′, le rette VA, V′A′, V″A″ s'incontreranno necessariamente in un punto individuato J. — Inoltre questa retta JVA taglia la retta SS′S″ nel punto P in guisa che S, S′, P, S″ sono quattro punti armonici; e perciò se uno di essi passa a distanza infinita, gli altri tre comprendono due intervalli eguali. Dicasi lo stesso delle rette JV′, A′P′, JV″, A″P″. Dal che poi risulta che se uno S dei flessi è a distanza infinita la corrispondente JA è un diametro di simmetria, e che se invece sia a distanza infinita la JA, sarà S il centro di simmetria.

105. Quando si conoscano i tre flessi colle loro tangenti SA′A″, S′AA″, S″AA′ sarà facile condurre ciascuna AJ, giacchè questa passa pel punto P tale che SP è media armonica tra le due SS′, SS″; essa JA può anche determinarsi mediante il punto B in cui si tagliano le rette S′A′, S″A″. Così pure B′ è l'intersezione delle SA, S″A″, e B″ delle SA, S′A′. — Viceversa se fosse dato il triangolo AA′A″ ed il punto J, tagliati i lati di quello colle rette A″JD″, A′JD′, AJD, il flesso S sarebbe l'intersezione del lato A′A″ colla retta D′D″, S′

l' intersezione di A A'', D D'', ed S'' di A A', D D'. (Nella fig. 8.ª i punti S, A', A'', D sono a distanza infinita). — Il triangolo D D' D'' è inscritto nel triangolo A A' A'', e questo lo è nel triangolo B B' B''. Si ha pure un triangolo Q Q' Q' inscritto nel triangolo V V' V''. I cinque triangoli hanno i lati corrispondenti, che si tagliano nei flessi S, S', S'', ed hanno i vertici corrispondenti sulle rette J Q A B V D, J Q' A' B' V' D', J Q'' A'' B'' V'' D''.

106. Le parti della retta J A V D danno il rapporto AV.JD:JV.AD, che si dice projettivo (§. 12.), perchè esso si mantiene invariato in tutte le projezioni, cioè in tutte le figure tra loro collineari. Col mezzo della parabola divergente, che ci serve di tipo (§. 100.) si verifica che
$AV.JD:JV.AD = A'V'.JD':JV'.A'D' = A''V''.JD'':JV''.A''D'' = g^2$;
quindi permutando un flesso coll' altro non si cangia il parametro generico g, il quale determinato per ciascuna curva particolare sarà un carattere distintivo di tutte le curve ad essa collineari, cioè che formano un solo genere. — Conoscendo g e conoscendo i tre flessi e le loro tangenti, i precedenti rapporti daranno il modo di determinare i tre vertici V, V', V''.

107. Il Newton, e dopo di lui il Clairaut ed il Nicole (Hist. de l'Acad. des Sciences pour 1731) ammisero che tutte le curve del terzo ordine possano originarsi coll' ombra delle cinque parabole divergenti della categoria 1. Noi infatti vedemmo che dalle tre parabole I. 1, II. 1, III. 1 derivano per collineazione tutte le curve del terzo ordine baricentrico; ma ci rimangono poscia le parabole espresse dall' equazione
$y^2 = x^3 + 2nx^2 + x$, e queste non sono già due sole, bensì infinite distinte per differente valore di n, e tali che una non può mai convertirsi per collineazione nell' altra. Sicchè non sarebbe giusto il dire che, come dato un circolo se ne possono dedurre coll' ombra tutte le sezioni coniche, così pure descritte cinque parabole se ne possono dedurre tutte le curve del terzo ordine. — Che se si dicesse che veramente le due ultime parabole non sono due sole, ma si riducono a due gruppi, ognuno espresso da quella unica equazione secondo che $n^2 < 1$ oppure $n > 1$; a ciò si risponderebbe che la differenza di forma più

o meno apparente non è una distinzione assoluta, e che se bastasse che le curve sieno espresse da una sola equazione si potrebbe anche dire che tutte le curve del terzo ordine possono originarsi coll' ombra di una sola curva.

108. Secondo la nostra maniera di vedere sono adunque infiniti i generi, di cui ci resta da parlare. Noi li riuniremo in due gruppi che diremo *tribù*, e segneremo coi numeri IV. V.; il che è conforme a quanto facemmo per le specie, che quando (dalla categoria 8. in poi) sono in numero infinito noi riuniamo in famiglie, le quali hanno un comune carattere apparente, e che nulladimeno comprendono infinite specie secondo i valori di uno o due parametri. — In ciascheduna specie avremo i tre soliti parametri, che nascono dall' affinità, ed inoltre il parametro generico, il quale noi supponiamo che abbia preso quel valore particolare che compete al genere, in cui supponiamo compresa la specie.

Tribù IV.

Curve del terzo ordine e della sesta classe.
Un solo pezzo con tre flessi in linea retta.

109. Specie IV. 1. *Un solo tratto con due flessi e coi rami parabolici verso il terzo flesso.* La differenza tra questa specie degli infiniti generi appartenenti alla presente tribù e la specie III. 1. non apparisce se non se dall' equazione e dalle relazioni di cui abbiamo di sopra fatto cenno (§. 106.). L' equazione della curva riferita al diametro di simmetria VP (fig. 8.ª) ed alla tangente nel vertice V è

$$y^2 = x\,(x^2 + 2\,n\,x + 1),$$

purchè $n^2 < 1$.

110. Possiamo considerare come carattere generico la più piccola radice positiva dell' equazione

$$3\,g^4 + 8\,n\,g^3 + 6\,g^2 = 1.$$

Quando $n = -1$, g ha tre valori $= 1$, allora la curva ha un nodo, ed è la specie II. 1. — Se $n = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ abbiamo $g = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

in questo caso le tangenti nei due flessi S′, S″ sono ambedue parallele al diametro di simmetria, cioè il punto A passa a distanza infinita: questo genere meriterebbe d' essere particolarmente distinto da tutti gli altri; il suo carattere è che le tangenti nei tre flessi s' incontrano in un medesimo punto. — Per $n=0$ si ha $g=0,39333$. — Continuando ad aumentare n, i punti A ed J vanno sempre più avvicinandosi a V. Finalmente se $n=1$, quindi $g=\frac{1}{3}$ si ha $AV=\frac{1}{g}$, $JV=1$, ed il punto J è un punto isolato appartenente alla curva; così si ha il genere III., che è genere intermedio tra quelli della tribù IV. e quelli della tribù V.

111. Le varie specie o famiglie di ciascun genere della tribù IV. si otterranno facendo andare all' infinito l' una o l' altra delle rette della fig. 8.ª

112. Specie IV. 2. *Un solo tratto coi rami iperbolici ordinarj, uno dei tre flessi è il centro di simmetria.* La curva riferita al centro di simmetria, alla sua tangente ed all' assintoto ha l' equazione

$$x^3+2nx^2+xy^2=y.$$

113. Specie IV. 4. *Tre tratti puri coi rami iperbolici rivolti ai tre flessi.* Si hanno pure le altre proprietà accennate alla specie III. 4., eccettochè in luogo d' essere $JA=2.AV$ è in generale $g^2.JV=AV$. — Il Newton separò queste curve nelle tre specie 22.ª, 23.ª e 32.ª; l' ultima delle quali è distinta dall' avere i tre assintoti, che s' incontrano in un solo punto; essa perciò appartiene a quel genere di cui diedi superiormente il carattere $\left(g=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ di avere le tre tangenti dei flessi, che s' incontrano in un medesimo punto. — Mediante le ombre non si potrebbe mai passare dalla specie 32.ª del Newton alla 22.ª, che corrisponde a $g<\frac{1}{\sqrt{3}}$, od alla 23.ª, che si riferisce agli infiniti generi qualificati da $g>\frac{1}{\sqrt{3}}$. — I primi ed i secondi generi potrebbero riunirsi in due sottotribù separate da quel genere particolare che corrisponde a $g=\frac{1}{\sqrt{3}}$. —

L' equazione delle presenti curve riferite ad uno dei diametri di simmetria, e posta l' origine delle coordinate nel punto D in cui quel diametro incontra l' assintoto A' A'', è

$$xy^2 = (gx + 1)\left(\frac{1 - 2g^2 + g^4}{4g^2}x^2 + \frac{1 - 6g^2 + 5g^4}{4g^3}x + 1\right).$$

114. Specie IV. 7. *Due tratti ciascuno con un flesso, un ramo parabolico ordinario ed un ramo iperbolico verso il terzo flesso.* Anche questo carattere è pienamente uguale a quello della specie III. 7., la quale si distingue da tutte le specie di infiniti generi diversi, che noi comprendiamo sotto il numero IV. 7. solamente perchè quella ha un punto isolato. Queste curve hanno l' equazione

$$xy^2 = x^2 + 2nx + 1.$$

115. Famiglia IV. 8. *Un tratto con due flessi e coi rami iperbolici verso il terzo flesso.* L' equazione è

$$xy^2 = (1 - cx)[(1 - 2nc + c^2)x^2 + 2(n - c)x + 1].$$

Questa è una famiglia a quattro parametri, perchè n è un parametro generico, che non può mai cangiare mediante la collineazione, la quale invece dà al parametro specifico c un valore quale si voglia.

116. Famiglie IV. 9. A. e B. Gli stessi caratteri come nel genere III. Per tutti quei generi nei quali $g > \frac{1}{\sqrt{3}}$ si può distinguere in ciascheduna di queste due famiglie quella specie, nella quale gli assintoti concorrono in un solo punto.

117. Famiglie IV. 12. 13. 14. Anche queste famiglie hanno gli stessi caratteri, che abbiamo già dati pel genere III.

Tribù V.

Curve del terzo ordine e della sesta classe.
Due pezzi; uno con tre flessi, l' altro puro.

118. I generi di questa tribù differiscono da tutti gli altri del terzo ordine per essere le curve costituite da due *pezzi*

essenzialmente staccati; quello che non ha alcun punto singolare lo diremo un' *ovale*, anche quando invece d'essere chiusa sarà aperta alla maniera di una parabola, oppure divisa in due tratti alla maniera dell' iperbola.

119. Specie V. 1. *Un' ovale chiusa. Un tratto con due flessi e coi rami parabolici verso il terzo flesso.* Rispetto al diametro VP si ha (fig. 9.ª)

$$y^2 = x(x^2 + 2nx + 1)$$

essendo $n > 1$. I flessi corrispondono all' ascissa $VP = g$ essendo g la radice positiva della $3g^4 + 8ng^3 + 6g^2 = 1$ ed alla ordinata $PS'' = \frac{1 - g^2}{2\sqrt{g}}$. L' asse delle x è tagliato dalla curva, oltre che nel punto V, anche nei due punti U, W appartenenti all' ovale; trasportando in uno di essi l' origine delle coordinate l' equazione conserva la stessa forma, si può quindi dedurne le stesse proprietà relative ai *vertici* U U' U'', W W' W'' le cui tangenti passano pei flessi. Quindi si applicano alle curve della tribù V. le proprietà che abbiamo indicate (§§. 85. 104. 105.) pel genere III. e per la tribù IV., ed esse si estendono a tre terni di vertici e di punti analoghi ai Q, Q', Q''. — Tutti questi punti sono sulle tre rette JA, JA', JA'' ognuna delle quali diviene un diametro di simmetria se passa a distanza infinita il corrispondente flesso.

120. Da questa specie V. 1. come tipo si otterranno, al solito, le altre specie, facendone andare all' infinito l' una o l' altra delle rette indicate nella fig. 9.ª

121. Specie V. 2. *Due tratti puri. Un tratto con tre flessi dei quali uno è il centro di simmetria. I sei rami sono iperbolici ordinarj.* I tre assintoti s' incontrano nel centro di simmetria; presolo per origine delle coordinate, e prese le x sulla tangente, e le y sull' assintoto del terzo tratto si ha l' equazione stessa della IV. 2. $x^3 + 2nx^2y + xy^2 = y$, ma in questa tribù V. è $n > 1$.

122. Specie V. 4. *Ovale chiusa. Tre tratti puri coi rami rivolti ai tre flessi.* Vi sono tre diametri di simmetria.

123. Specie V. 7. A. *Ovale chiusa. Due tratti ciascuno con un flesso, un ramo iperbolico ordinario ed uno iperbolico verso il terzo flesso.*

Specie V. 7. B. *Un tratto puro coi rami parabolici ordinarj. Un tratto con due flessi e coi rami iperbolici verso il terzo flesso. Il secondo pezzo sta tra mezzo al proprio assintoto ed al pezzo parabolico.*

Specie V. 7. C. *Un tratto puro coi rami parabolici ordinarj. Un tratto con due flessi e coi rami iperbolici verso il terzo flesso. L' assintoto sta tra mezzo ai due pezzi di curva.*

124. Famiglia V. 8. *Ovale chiusa. Un tratto con due flessi e coi rami iperbolici verso il terzo flesso.* Può dividersi in due sottofamiglie.

α) Il pezzo coi flessi sta tra l' assintoto e l' ovale.

β) L' assintoto sta tra i due pezzi di curva.

125. Famiglia V. 9. A. *Ovale chiusa. Tre tratti, uno con due flessi e coi rami iperbolici ordinarj, ciascuno degli altri due puro e coi rami iperbolici uno ordinario ed uno verso un flesso.*

Famiglia V. 9. B. *Ovale chiusa. Tre tratti, uno puro coi rami iperbolici ordinarj, ciascuno degli altri due con un flesso e coi rami iperbolici uno ordinario ed uno verso il terzo flesso.*

Famiglia V. 9. C. *Due tratti puri coi rami iperbolici ordinarj. Un tratto con due flessi e coi rami iperbolici verso il terzo flesso.*

126. Famiglia V. 12. A. *Ovale chiusa. Due tratti ciascuno con rami iperbolico e parabolico ordinarj. I tre flessi sono separati in questi due tratti.*

Famiglia V. 12. B. *Un tratto puro coi rami parabolici ordinarj. Un tratto con tre flessi e coi rami iperbolici ordinarj.*

127. Famiglia V. 13. *Ovale chiusa. Un tratto con tre flessi e coi rami iperbolici ordinarj.*

128. Famiglia V. 14. A. *Ovale chiusa. Tre tratti coi rami iperbolici ordinarj; uno ha un flesso, uno ne ha due, l' altro è puro.*

Famiglia V. 14. B. *Due tratti puri coi rami iperbolici ordinarj. Un tratto con tre flessi ed i rami iperbolici ordinarj.*

RIASSUNTO DELLA CLASSIFICAZIONE DELLE CURVE DEL TERZO ORDINE E CONFRONTO CON QUELLA DEL NEWTON.

129. Noi vedemmo che ciascuno dei tre *generi* del terzo *ordine baricentrico* o degli infiniti *generi* del terzo *ordine algebraico* viene a dividersi in alcune particolari *specie*, ed in famiglie, le cui equazioni contengono uno o due parametri, i valori dei quali servono a diversificare, le infinite specie di ciascuna famiglia. — L' equazione di una *specie* contiene quasi sempre tre parametri, pei quali potremo prendere l' angolo delle coordinate, il rapporto tra le due unità, a cui si riferiscono tali coordinate, e la grandezza assoluta di una di queste unità. — Quando si possono individuare nella figura di una curva due direzioni distinte (come sarebbe per esempio un diametro di simmetria e le ordinate ad esso spettanti) il differente angolo tra loro compreso distinguerà le *varietà* appartenenti ad una stessa specie. Poscia il rapporto tra le due unità distinguerà le *forme* di una stessa varietà. Finalmente la grandezza assoluta distinguerà gl' *individui* di una stessa forma.

131. Così per esempio nella *specie* II. 1. (fig. 6.ª) abbiamo la *varietà ad ordinate ortogonali* quando l' angolo tra il diametro di simmetria e le sue ordinate è retto: ed in questa varietà abbiamo la *forma*, nella quale la massima ordinata nel nodo è la terza parte della sua distanza dal punto doppio. — Tutti gli *individui* di questa forma hanno alcune singolari proprietà, che notai nel mio primo Saggio (1835) sul metodo delle equipollenze. Se dicasi $2u$ l' angolo che la tangente in un punto di questa curva forma colla ordinata, sarà $3u$ l' angolo che la stessa ordinata formerà col raggio vettore condotto dal punto della curva al punto fisso del diametro di simmetria, le cui distanze dal vertice V e del punto doppio J sono nel rapporto 1 : 8; e saranno proporzionali alle potenze $(\operatorname{sen} u)^{-3}$, $(\operatorname{sen} u)^{-4}$ il predetto raggio vettore, ed il raggio di curvatura.

131. Questa gradazione nelle generalità e nel conseguente numero dei parametri contenuti nelle suddivisioni, che chiamiamo:

Genere di curve collineari (a cinque parametri), *Specie* di curve affini (a tre parametri), *Varietà* (a due parametri), *Forma* di curve simili (con un solo parametro), *Individui*: è talvolta soggetta a qualche restrizione. — Così la specie della parabola Neiliana (I. 1.) ammette bensì infinite varietà secondo che si fa retto o variamente obliquo l' angolo compreso tra la tangente del regresso e le ordinate, a cui i due rami di curva tendono sempre più a farsi paralleli; ma ciascheduna varietà presenta una sola forma, poichè quantunque si cangiassero tutte le ordinate in uno stesso rapporto (restando invariate le ascisse) non per questo la curva cangerebbe forma, ma resterebbe simile a sè stessa. In questa unica forma (per ciascheduna varietà) si hanno infiniti individui: si può prendere per parametro di grandezza l' ascissa che è uguale alla propria ordinata. — Invece la specie ellisse ammette una sola varietà, poichè si può bensì cangiare l' angolo di due diametri conjugati, ma esistono sempre due assi perpendicolari tra loro conjugati. Questa unica varietà comprende infinite forme, tra le quali si distingue il circolo. La parabola Apolloniana è una specie che contiene una sola varietà ed una sola forma.

132. Nella classificazione delle curve i Geometri hanno avuto riguardo alla presenza e natura dei rami infiniti piuttosto che ai caratteri generici, che rimangono invariati nella collineazione e che ci hanno servito per istabilire le prime divisioni. Pertanto se vogliamo trovare la corrispondenza tra la precedente classificazione e quelle del Newton del Cramer e dell' Eulero, dobbiamo principalmente considerare le nostre quattordici categorie, che non molto differiscono dalle quattordici prime divisioni del Newton, e dalle sedici categorie dell' Eulero (che egli chiama Specie). I generi del Cramer si accordano pienamente colle quattordici categorie del Newton. — Do quì di seguito la corrispondenza della mia classificazione colle specie del Newton, indicando poscia i nomi da lui dati alle categorie, ed i numeri con cui furono indicate dal Cramer e dall' Eulero.

Prospetto delle Linee del terzo ordine, e corrisp

Categorie dipendenti dal passare all' infinito i seguenti oggetti		I tre primi generi sono del te[rzo]			
		Classe terza			
			Genere I. *Regresso e Flesso*		*II.* *Punto doppio e Flesso.*
Tangente di un flesso . . .	1	Specie a due parametri	1. Specie 70. del Newton.	Specie a tre parametri	1. Sp. 68.
Diametro di simmetria . .	2		2. Sp. 72.		2. Sp. 59.
Tangente nel punto doppio	3				3. Sp. 66.
Tre flessi	4				
Flesso e { Regresso, . . .	5		5. Sp. 65.		
o punto doppio o isolato	6				6. Sp. 60.
Flesso e tangente ordinaria	7				7. Sp. 54.
Flesso solo	8	Specie a tre parametri	8. Sp. 42.	Famiglie a quattro parametri	8. Sp. 41.
Flesso e due punti ordinarj	9		9. Sp. 12.		9. { A. Nodo chiu. B. Nodo ape.
Regresso	10		10. Sp. 64.		
o punto doppio o isolato .	11				11. { A. Nodo ape punto dopp. B. Nodo ape luoghi. Sp.
Tangente ordinaria . . . . e punto ordinario	12		12. Sp. 48.		12. { A. Nodo chiu. B. Nodo ape.
Un solo punto ordinario .	13	Famiglie a 4 parametri	13. Sp. 35.	Famiglie a 5 parametri	13. Sp. 34.
Tre punti ordinarj	14		14. Sp. 3.		14. { A. Nodo chi. B. Nodo ap.

(*) Le Categorie XIV. 16. si riferiscono soltanto alla Specie I. 2., le altre Speci de

umerazione fattane dal Newton.

ico	Due tribù di generi		Categorie	
	Classe sesta			
Tre Flessi in linea retta				
Punto isolato.	*IV. Un solo pezzo.*	*V. Due pezzi.*	del Newton	dell' Eulero
9.	1. Sp. 71.	1. Sp. 67.	XIII.	14
2.	2. Sp. 38.	2. Sp. 27. (*)	XIV.	16
			XII.	15
mmessa.	4. Sp. 22. 23. 32.	4. Sp. ommessa.	III. IV.	5
			XI.	13
3.			IX. X.	11. 9
mmessa.	7. Sp. 53.	7. A. Ovale chiusa. Sp. om. B. Ovale aperta. Sp. 55. C. Ovale aperta. Sp. 56.	VIII.	7
. 43. β) Sp. 44.	8. Sp. 45.	8. α) Sp. 39. β) Sp. 40.	VI.	2
'lessi uniti. Sp. 13. 'lessi separati. Sp. ommessa.	9. A. Flessi uniti. Sp. 14. 16. 28. B. Flessi separati. Sp. 15. 17. 29.	9. A. Ovale chiusa e flessi uniti. Sp. 10. B. Ovale chiusa e flessi separati. Sp. omm. C. Ovale aperta. Sp. 20. 21. 31.	II. IV.	4
			XI.	12
1.			IX. X.	10. 8
).	12. Sp. 50.	12. A. Ovale chiusa. Sp. 46. B. Ovale aperta. Sp. 52.	VII.	6
5.	13. Sp. 37.	13. Sp. 33.	V.	1
.	14. Sp. 5. 6. 24.	14. A. Ovale chiusa. Sp. 1. B. Ovale aperta. Sp. 9. 26.	I..IV.	3

. sono porzioni delle Categorie IX. X. V. IV. del Newton e delle 10. 8. 1. 3. dell' Eulero.

Categoria 1.ª qualificata dall' avere all' infinito la tangente di un flesso, sicchè si ha un diametro di simmetria = Newton XIII. Le cinque *Parabole divergenti con diametro*. Specie 67. 68. 69. 70. 71. = Cramer IV. j. = Eulero 14.

2.ª Tutte le curve di questa categoria hanno un centro di simmetria. Nel genere I. è all' infinito la tangente del regresso = Newton XIV. *La Parabola cubica*. Sp. 72. = Cramer IV. iij. = Eulero 16.

Nel genere II. sono all' infinito il punto doppio ed il vertice = Newton IX. Uno dei quattro *Iperbolismi dell' iperbola*. Sp. 59. = Cramer III. iv. = Eulero 10.

Nel genere III. sono all' infinito il punto isolato ed un vertice = Newton X. Uno dei tre *Iperbolismi dell' ellisse*. Sp. 62. = Cramer III. iij. = Eulero 8.

Nella tribù IV. è all' infinito un vertice, e due flessi hanno le tangenti parallele = Newton V. Una delle sei *Iperbole difettive senza diametro*. Sp. 38. = Cramer I. j. = Eulero 1.

Nella tribù V. sono all' infinito tre vertici, e due flessi hanno le tangenti parallele = Newton IV. Una delle nove *Iperbole coi tre assintoti che s' incontrano in un punto*. Sp. 27. = Cramer II. iv. = Eulero 3.

3.ª Ha all' infinito una tangente nel punto doppio = Newton XII. *Il Tridente*. Sp. 66. = Cramer IV. ij. = Eulero 15.

4.ª Ha all' infinito i tre flessi, perciò vi sono tre diametri di simmetria = Newton III. Le due *Iperbole ridondanti con tre diametri*. Sp. 22. 23.; ed inoltre un altra delle nove *Iperbole coi tre assintoti concorrenti in un sol punto*. IV. Sp. 32. = Cramer II. iij. e porzione del II. iv. Stirling avea già notato che nella categoria III. del Newton mancavano due specie, che saranno le mie. III. 4., V. 4. = Anche Eulero riunì queste specie sotto il suo numero 5.

5.ª È all' infinito il flesso ed il regresso, quindi la curva ha un diametro di simmetria = Newton XI. Uno dei due *Iperbolismi della parabola*. Sp. 65. = Cramer III. v. = Anche l' Eulero separò questa specie sotto il suo numero 13.

6.ª Nel genere II. è all'infinito il flesso ed il punto doppio; vi è un diametro di simmetria = Newton IX. Un altro dei quattro *Iperbolismi dell' iperbola*. Sp. 60. = Cramer III. iv. = Eulero 11.

6.ª Nel genere III. è all' infinito il flesso e il punto isolato; vi è perciò un diametro di simmetria = Newton X. Un altro dei tre *Iperbolismi dell' ellisse*. Sp. 63. = Cramer III. iij. = Eulero 9.

7.ª È all' infinito una tangente ordinaria che passa per un flesso, ossia la tangente di un *vertice*. Vi è per conseguenza un diametro di simmetria = Newton VIII. Le quattro *Iperbole paraboliche con diametro*. Sp. 53. 54. 55. 56. = Cramer III. iij. osserva che il Newton ommise due specie, che saranno le mie. III. 7. V. 7. A. = Eulero 7.

8.ª Ha all' infinito soltanto un flesso ed ha quindi un diametro di simmetria = Newton VI. Le sette *Iperbole difettive con diametro*. Sp. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. = Cramer I. ij. = Eulero 2.

9.ª Ha all' infinito un flesso e due punti ordinarj, perciò ha un diametro. Le categorie seguenti, come anche le 2. 3. mancano di diametro = Newton II. Le dodici *Iperbole ridondanti con un diametro*. Sp. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. Ed inoltre IV. quattro delle nove *Iperbole ridondanti cogli assintoti concorrenti in un punto*. Sp. 28. 29. 30. 31. = Cramer II. ij. e porzione del II. iv. Stirling notò che nella categoria II. del Newton mancano due specie che saranno le mie. III. 9. B. V. 9. B. = Eulero 4.

10.ª Ha all' infinito il regresso = Newton XI. L' altro dei due *Iperbolismi della parabola*. Sp. 64. = Cramer III. v. = Eulero 12.

11.ª Nel genere II. è all' infinito il punto doppio = Newton IX. Gli altri due dei quattro *Iperbolismi dell' iperbola*. Sp. 57. 58. = Cramer III. iv. = Eulero 10.

11.ª Nel genere III. è all' infinito il punto isolato = Newton X. L' altro dei tre *Iperbolismi dell' ellisse*. Sp. 61. = Cramer III. iij. = Eulero 8.

12.ª Ha all' infinito una tangente ordinaria = Newton VII. Le sette *Iperbole paraboliche senza diametro*. Sp. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. = Cramer III. j. = Eulero 6.

13.ª Ha all' infinito un solo punto ordinario = Newton V. Cinque delle sei *Iperbole difettive senza diametro*. Sp. 33. 34. 35. 36. 37. = Cramer I. j. = Eulero 1.

14.ª Ha all' infinito tre punti ordinarj = Newton I. Le nove *Iperbole ridondanti senza diametro, cogli assintoti che formano un triangolo*. Sp. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. ed inoltre IV. Tre delle nove *Iperbole ridondanti cogli assintoti concorrenti in un punto*. Sp. 24. 25. 26. = Cramer II. j. e porzione del II. iv. = Eulero 3.

133. Nel mio genere I. io conto 9. specie o famiglie di specie; nel genere II. ne conto 15. (poichè suddivido alcune delle 11. categorie spettanti a questo genere); nel genere III. ne conto 12.; in ciascun genere della tribù IV. 10., ed in ciascun genere della V. 15. Così riunendo insieme queste divisioni (che peraltro sono di estensioni molto differenti) si ha il numero totale 61. Secondo i principj del Newton si hanno 78. specie; egli per ommissione ne enumerò soltanto 72.

134. Sarebbe molto opportuno distinguere (§. 110. 113.) quel particolar genere della tribù IV., in cui le tre tangenti dei flessi s' incontrano in un solo punto; abbiamo in questo genere le specie 1. 2. 4. 7. e le famiglie 8, 9 A, 9 B, 11, 12, 13, 14.: il carattere della famiglia 11. è che i tre flessi hanno le tangenti parallele. Questo genere ha quindi 11. divisioni, ed il predetto numero 61. si eleva a 72.

135. Un altro carattere specifico adoperato dal Newton si è che i tre assintoti anzichè formare un triangolo concorrano in un solo punto (ciò non si avvera mai nei generi I. e III.). Quando gli assintoti sono ordinarj si hanno per tal maniera 3. famiglie a tre parametri comprese nelle famiglie a quattro parametri II. 14. B, IV. 14., V. 14. B (sono le specie 25. 24. 26. del Newton.). Quando un assintoto è di flesso e due ordinarj si hanno le particolari specie comprese nelle famiglie

II. 9. B, V. 9. C, e IV. 9. A oppure IV. 9. B (Specie 30. 31. 28. 29. del Newton). Quando gli assintoti sono tutti tre di flessi si ha la nostra specie IV. 4. di quel particolar genere della tribù IV., che abbiamo già (§. 110.) qualificato colla condizione che le tre tangenti dei flessi s' incontrino in un unico punto (Specie 32. del Newton). — Le medesime famiglie quando i tre assintoti formano un triangolo possono suddividersi in due sottofamiglie secondo la differente disposizione dei tratti di curva rispetto a quel triangolo; ciò servì al Newton a diversificare le sue specie 7. 5. 18. 20. 14. 15. 22. dalle 8. 6. 19. 21. 16. 17. 23. — La diversa disposizione delle parti dà pure occasione di dividere le famiglie III. 8., V. 8. nelle sottofamiglie α) β).

136. Altre specie o famiglie si potrebbero stabilire facendo andare all' infinito uno o due di quei punti, che dicemmo vertici della curva, oppure altri punti osservabili della figura qual sarebbe il punto J. — Parmi che per la via da noi seguìta, assunta una curva come tipo di un genere, si venga a trovare facilmente tutte le specie o famiglie di specie, che tra loro differiscono per qualche essenziale carattere, e ciò senza pericolo d' incorrere in quelle ommissioni, che passarono inavvertite allo stesso Newton. I caratteri specifici dipendenti dal numero e natura dei rami infiniti si riconoscono per tal maniera più speditamente di quello sia coll' esame delle equazioni esprimenti le curve. Forse che questa Memoria e il Prospetto riassuntivo della classificazione presentano una sufficiente idea delle variate forme, che prendono le curve del terzo ordine: non sarebbe del resto difficile aggiungere in 72. figure (§. 134.) un saggio di tali forme. — Le figure 7.ª e 9.ª sono alquanto difformate per non farle troppo grandi.

Diametri e polari nelle curve del terzo ordine.

137. Come carattere distintivo delle curve abbiamo adoperati soltanto quei diametri, che a toglimento di equivoco, abbiamo detti *di simmetria*. È noto, dal Newton in poi, che le

curve algebraiche hanno per ogni direzione di ordinate un diametro rettilineo tale che per ciascuna ascissa contata sul diametro la somma algebraica di tutte le ordinate è nulla. Colla omologia o collineazione questo teorema si generalizza; sicchè, parlando delle curve del terzo ordine, se da un dato punto si tiri ad arbitrio una retta, la quale tagli la curva in tre punti, il centro armonico di queste tre intersezioni rispetto al primo punto appartiene ad una retta, che dicesi la *polare* del punto dato. Perlochè un diametro può dirsi *la polare* del punto a distanza infinita, a cui si dirigono le ordinate: in tal caso il centro armonico diventa, come è noto, centro di gravità. — Secondo i principj da me adottati nel metodo delle equipollenze, il precedente teorema sussiste eziandio quando la retta condotta pel punto dato taglia la curva in un solo punto, purchè si considerino anche le altre due loro *intersezioni fittizie*.

138. La polare di un dato punto rispetto ad una curva del terzo ordine è anche la polare del medesimo punto rispetto al sistema di tre tangenti della curva, i cui punti di contatto sieno in linea retta col punto dato. Così in particolare la polare di un punto a distanza infinita è polare del medesimo punto anche rispetto ai tre assintoti della curva: cioè i diametri della curva lo sono eziandio dei tre assintoti.

139. Colla derivazione polare o di reciprocità i precedenti teoremi conducono agli altri. Se per un punto arbitrario di una data retta si tirano le n tangenti ad una curva di $n.^{esima}$ classe, la retta centrale-armonica di queste n tangenti, rispetto a quella retta data, passa per un punto, che dicesi il *polo* della retta data. Esso è il polo della medesima anche rispetto al sistema degli n punti di contatto delle tangenti condotte da un punto di essa data retta. In particolare: il polo della retta, che sta tutta a distanza infinita, è il centro di gravità delle intersezioni di una retta, che passa per esso con n tangenti tra loro parallele, ed è eziandio il centro di gravità dei punti di contatto di tali sistemi di tangenti parallele.

140. Nelle curve del terzo ordine un punto qualunque di una tangente in un flesso, nel regresso, oppure nel punto doppio, ha la sua polare che passa per tale flesso, regresso, o punto doppio. Infatti le tre intersezioni di quella tangente colla curva si riuniscono insieme nel punto di contatto. Viene da ciò che nelle nostre specie I. 1., II. 1., III. 1., IV. 1., V. 1., I. 2., II. 3. le polari dei punti posti a distanza infinita (vale a dire i diametri) sono tutte parallele e dirette verso il punto singolare, che sta a distanza infinita. — Le polari di tutti i punti della tangente nel regresso coincidono insieme nella retta, che unisce il regresso col flesso. Viene da ciò che nella specie I. 2. una sola è la polare di tutti i punti all' infinito.

141. Nelle curve del I. genere tutte le polari dei punti di una retta condotta pel regresso passano per l' intersezione della tangente del regresso colla tangente in quell' altro punto della curva, che si trova in quella prima retta. Infatti queste due tangenti, una delle quali tien luogo di due, costituiscono quel sistema di tre tangenti menzionate al §. 138.; ed è evidente che ogni polare rispetto al sistema di tre rette, che hanno un punto comune, passa essa pure pel medesimo punto. Viene da ciò che nelle specie I. 5., I. 10. le polari dei punti all' infinito (cioè i diametri) passano per l' intersezione dei due assintoti.

142. Nel II. genere spetta la stessa predetta proprietà ad ogni retta condotta pel punto doppio; poichè non difficilmente si dimostra che tutte le polari dei punti di tal retta, sia rispetto alla curva, sia rispetto alle due tangenti del punto doppio ed alla tangente nel terzo punto d' intersezione, passano per un punto fisso. Viene da ciò che nelle specie II. 6., II. 11. le polari dei punti all' infinito passano per quel punto del terzo assintoto, che sta equidistante tra i due assintoti paralleli.

143. Una simile proprietà spetta agli altri due Iperbolismi III. 6., III. 11. ottenuti facendo andare all' infinito il punto isolato.

144. Le polari dei punti all' infinito passano evidentemente per un unico punto anche nelle Iperbole, i cui tre assintoti si tagliano in un solo punto; il che avviene (§. 135.) nella specie IV. 4. del particolar genere qualificato da $g = \frac{1}{\sqrt{3}}$; ed inoltre in alcune specie delle categorie 9, 14. La stessa proprietà delle polari dei punti all' infinito ha pur luogo in alcune specie delle nostre categorie 8, 13; ed invece non può mai verificarsi nelle Iperbole paraboliche delle categorie 7 e 12.

INTORNO

LA QUANTITÀ DELLA PIOGGIA

CHE CADE ANNUALMENTE A MODENA

DISQUISIZIONE

DEL SOCIO E SEGRETARIO PROFESSORE GIUSEPPE BIANCHI

1. Egli è soltanto dall' anno 1830, poco dopo la fondazione della Specola Modenese, che il misuratore della pioggia collocato venne all' aperto cielo nella sommità di essa, e che se ne raccolsero poscia non interrottamente e registraronsi le quantità cadute della pioggia, della neve liquefatta, e dell' umidità o nebbia qualunque atmosferica scioltasi e ivi deposta. Benchè un siffatto corso di osservazioni per verità non sembri lungo a sufficienza per conoscerne in tutta la sua varietà ed ampiezza il fenomeno delle meteore acquose in un dato luogo terrestre, cionullameno la serie stessa di tali determinazioni estesa fra gli anni 1830 e 1850 inclusivamente, ossia per ventun' anni di seguito mi ha offerto leggi e deduzioni di special importanza e sì rimarchevoli, che io reputo non inutil cosa di occuparmene e farne soggetto alla presente Memoria. Di quì anzi ho divisato di prender le mosse nel più vasto mio intendimento di raccogliere ed esaminare in ogni sua parte l' intera serie delle meteorologiche osservazioni fatte in questa Specola R. per l' accennato intervallo dei ventun' anni, sembrandomi di dover appunto incominciarne la discussione dall' osservata quantità della pioggia, come dal fenomeno che in certo qual modo è la conseguenza o il prodotto delle atmosferiche influenze e variazioni di peso, di temperatura, di umidità, di vapori, di venti che accadon continuo e si registrano quotidianamente a date ore fisse; perlocchè il dipartirsi dalle indagini della pioggia per proseguir a quelle degli altri fenomeni dell' atmosfera egli è come un risalire dagli effetti alle cagioni, ed è quindi con-

forme al più retto metodo di ragionare e conchiudere nelle fisiche investigazioni. Ma senza trattenerci oltre in preamboli entriam tosto nell' argomento che svolgerò, dividendolo per amor d' ordine, in alcuni paragrafi.

§. I.

OSSERVAZIONI DELLA PIOGGIA.

2. Il nostro pluviometro è un recipiente di grossa lastra di rame piegata in imbuto con larga bocca ed orlo armato di un forte cerchio di ferro per conservarne la figura e grandezza del diametro di metri 0,644 colla bocca stessa orizzontale e al cielo rivolta, comunicante per l'apice del cono all'ingiù con un tubo di rame che, attraversato il suolo della terrazza più alta dell' Osservatorio, mette capo entro un serbatojo, pure di rame, che foggiato esternamente ad urna sorge sostenuto e adorna una parete nella stanza degli strumenti meridiani. All' aperto il vase medesimo è tenuto fisso di posizione per altro anello di ferro che sopra un trepiede lo cinge a mezzo il cono, e in cui per due occhielli sono intromessi due lunghi uncini, fermati ciascuno alle sponde attigue della terrazza in un angolo di essa, e sormontando a queste la bocca del pluviometro, esposto così da ogni lato all'aria libera. L' interno recipiente dell' urna può contenere fin presso a metri cubici 0,020 di acqua; laonde non mi è avvenuto che una volta sola, e dopo un diluvio di pioggia per un' intera notte, di trovarne soverchiato di piccola parte il serbatojo, quando mi recai la mattina per estrarla e misurarla. Da un foro nel fondo dell' urna, e aprendone a rubinetto l' uscita, sgorga l' acqua e vien misurata con vasi cilindrici di cristallo ne' quali sul vetro è incisa una scala o division lineare corrispondente a pollici e frazioni cubici del piede francese; laonde convertitane la raccolta quantità in cubatura metrica e divisa per l' area circolare del pluviometro se ne ha immediatamente l'altezza metrica della pioggia caduta. È da porre avvertenza di non indugiar molto ad eseguir tale misurazione, specialmente in estate per la forte evaporazione che ne dissiperebbe dal serbatojo una quantità sensibile, e convien altresì

usar diligenza in questa pratica operazione, però non fino allo scrupolo che tornerebbe inutile nelle ricerche di questo genere, per le quali è sufficiente un' approssimazione accurata delle quantità maggiori, compensandosi per avventura e in gran parte le minori che sfuggono inevitabilmente o si trascurano. Quindi pure alla necessaria fiducia delle osservazioni è indifferente che l'osservatore sia qualunque, purchè abbastanza istrutto ed esperto nella facile misura, non che sicuro e preciso nel farne annotazione sui registri meteorologici. Nella mia assenza talvolta prolungata o per altro impedimento mio e degli Aggiunti, ebber cura di notar la pioggia colle altre indicazioni atmosferiche i giovani macchinisti della Specola da me all'uopo disposti ed esercitati previamente a nulla ommettere d'importante in cotal ufficio, ed io posso riposarne sopra l'esattezza e capacità loro.

3. Segnata così ogni volta la quantità della pioggia o nebbia o neve liquefatta, si suol produrne semplicemente l'altezza della somma osservata e raccolta nei quadri o prospetti mensili delle tavole meteorologiche, e tale altresì è il mio costume. Però prefiggendomi di esaminar più particolarmente questa serie di osservazioni e risultamenti mensili io comincio dal partirla in quattro annue sezioni che appello d'inverno, di primavera, di estate e di autunno, componendo la prima dei mesi di Gennajo Febbrajo e Marzo, la seconda di Aprile Maggio e Giugno, la terza di Luglio Agosto e Settembre, la quarta di Ottobre Novembre e Decembre; e ciò non tanto per inchiuderle ne' termini di principio e fine dell' anno civile, quanto in riguardo alle stagioni propriamente dette cui, anzichè dai giorni solstiziali ed equinoziali, può forse attribuirsi meglio il cominciamento cogli accennati mesi, come dai punti presso a poco delle minime massime e medie temperature dell' anno, ed anche se vuolsi per l' una e l' altra ragione insieme. Premesse le quali cose a chiara intelligenza, ecco le altezze osservate dalla pioggia (1).

(1) Le osservazioni e misure originali sono espresse e numerate in pollici e linee del piede francese, ma ho stimato bene di convertirle e recarle tutte nella numerazion metrica decimale.

I.ª SEZIONE, *Inverno.*

Anni	Altezze della pioggia caduta nei mesi di			Somme orizzontali
	Gennajo	Febbrajo	Marzo	
	millim.			
1830	78, 68330	152, 11052	108, 07656	338, 87038
1	72, 99860	3, 18072	19, 17454	95, 35386
2	44, 30448	68, 91555	0, 00000	113, 22003
3	6, 60958	64, 26855	100, 79044	171, 66857
4	27, 92715	21, 85898	12, 67775	62, 46388
5	36, 77001	25, 19761	105, 07646	167, 04408
6	8, 97820	102, 41451	18, 29477	129, 68748
7	39, 20631	60, 61413	46, 22192	146, 04236
8	52, 65105	118, 25054	45, 11657	216, 01816
9	24, 31783	12, 83566	80, 26237	117, 41586
1840	11, 03100	19, 46780	43, 96609	74, 46489
1	21, 67852	59, 35085	61, 92249	142, 95186
2	82, 69870	14, 93359	9, 76774	107, 40003
3	29, 16786	76, 22445	60, 34341	165, 73572
4	30, 29578	151, 54645	36, 40907	218, 25130
5	106, 98922	96, 34417	90, 16546	293, 49885
6	5, 78394	2, 23327	69, 49982	77, 51703
7	56, 23781	29, 89649	2, 24038	88, 37468
8	62, 44134	28, 15274	64, 13320	154, 72728
9	7, 46454	0, 00000	39, 80184	47, 26638
1850	54, 63843	3, 42660	4, 78235	62, 84738
Somme verticali	860, 87365	1111, 22318	1018, 72323	2990, 82006

II.ª SEZIONE, *Primavera.*

Anni	Altezze della pioggia caduta nei mesi di			Somme orizzontali
	Aprile	Maggio	Giugno	
	millim.			
1830	33,63440	76,33725	86,84940	196,82105
1	91,00012	117,61886	63,27600	271,89498
2	17,00895	34,10812	49,85381	100,97088
3	79,87887	29,66408	47,64310	157,18605
4	23,77643	25,10738	23,75388	72,63769
5	49,78613	137,25203	106,11412	292,15228
6	80,57820	109,70095	41,71027	231,98942
7	69,38928	77,75842	21,49808	168,64578
8	66,07323	41,59748	16,80594	124,47665
9	83,60100	137,35728	6,97051	227,92879
1840	126,80012	74,91607	35,46162	237,17781
1	43,17655	35,01046	118,22792	196,41493
2	78,36749	123,14565	81,88656	283,39970
3	30,83718	42,90585	99,50462	173,24765
4	0,22558	109,40765	85,15752	194,79075
5	67,57785	88,67436	107,68194	263,93415
6	71,99252	66,77252	15,69831	154,46335
7	46,97085	55,57911	76,19512	178,74508
8	18,64667	106,29458	17,80300	142,74425
9	74,94089	78,21409	62,15260	215,30758
1850	201,50410	108,30460	181,69346	491,50216
Somme verticali	1355,76641	1674,72679	1345,93774	4376,43094

III.ª SEZIONE, *Estate.*

Anni	Altezze della pioggia caduta nei mesi di			Somme orizzontali
	Luglio	Agosto	Settembre	
	millim.			
1830	33, 79232	4, 96282	34, 26604	73, 02118
1	35, 10071	69, 27649	51, 38777	155, 76497
2	14, 39219	8, 84285	100, 36178	123, 59682
3	217, 12350	39, 45445	371, 85077	628, 42872
4	50, 55312	55, 98966	0, 31582	106, 85860
5	19, 71593	115, 04716	59, 19293	193, 95602
6	13, 76054	30, 58904	71, 48720	115, 83678
7	68, 71253	37, 85281	14, 52753	121, 09287
8	72, 29930	64, 20089	120, 34830	256, 84849
9	9, 70006	99, 30157	57, 38828	166, 38991
1840	22, 69364	42, 04865	86, 19520	150, 93749
1	12, 72287	92, 15062	26, 55111	131, 42460
2	40, 28910	61, 56156	224, 70305	326, 55371
3	103, 88088	41, 25910	42, 70283	187, 84281
4	54, 11733	5, 91027	43, 26679	103, 29439
5	40, 08607	51, 70586	117, 65500	209, 44693
6	29, 61451	172, 14227	32, 86742	234, 62420
7	60, 46748	44, 74210	44, 06535	149, 27493
8	48, 74846	6, 17871	78, 56374	133, 49091
9	11, 27914	7, 96308	141, 87575	161, 11797
1850	72, 00380	62, 73009	38, 88598	173, 61987
Somme verticali	1031, 05348	1113, 91005	1758, 45874	3903, 42227

IV.ª SEZIONE, *Autunno*.

Anni	ALTEZZE DELLA PIOGGIA CADUTA NEI MESI di			Somme orizzontali
	Ottobre	Novembre	Decembre	
	millim.			
1830	17, 64058	94, 58690	19, 10686	131, 33434
1	31, 08531	10, 55728	21, 74619	63, 38878
2	42, 38702	39, 02584	185, 69983	267, 11269
3	30, 88229	106, 70067	14, 95614	152, 53910
4	0, 15791	57, 56875	0, 11279	57, 83945
5	76, 56280	68, 87045	15, 97127	161, 40452
6	47, 32729	60, 14038	29, 16786	136, 63553
7	23, 05457	34, 19836	83, 35286	140, 60579
8	37, 98815	105, 57277	60, 54643	204, 10735
9	225, 35731	245, 84023	193, 36962	664, 56716
1840	18, 11430	14, 59521	53, 39547	86, 10498
1	104, 30950	11, 39193	71, 73535	187, 43678
2	20, 00920	115, 06965	7, 87284	142, 95169
3	37, 98815	68, 75766	3, 29351	110, 03932
4	98, 19622	96, 21109	114, 39303	308, 80034
5	44, 49170	86, 30800	18, 16619	148, 96589
6	248, 29474	68, 62682	114, 51481	431, 43637
7	50, 85991	81, 86402	108, 05405	240, 77798
8	119, 16632	92, 82960	9, 17446	221, 17038
9	48, 50934	70, 02770	108, 50985	227, 04689
1850	178, 98417	49, 11841	54, 08575	282, 18833
Somme verticali	1501, 36678	1577, 86172	1287, 22516	4366, 45366

4. Quì abbiamo la pioggia separata e distinta per mesi e stagioni, e l' abbiamo presentata in questo modo per alcuni semplici e curiosi rapporti che ne vedremo appalesarsi. Cumulati fra loro per ciascun anno dell' intervallo i numeri dell' ultima colonna, ossia delle somme orizzontali, se ne ha le quantità rispettive dell'annuale pioggia caduta e sono esse le seguenti

Anni	ALTEZZE dell'annua pioggia	Anni	ALTEZZE dell'annua pioggia
	millim.		millim.
1830	740,04695	1841	658,22817
1	586,40259	2	860,30513
2	604,90042	3	636,86550
3	1109,82244	4	825,13678
4	299,79962	5	915,84582
5	814,55690	6	898,04095
6	614,14921	7	657,17267
7	576,38680	8	652,13282
8	801,45065	9	650,73882
9	1176,30172	1850	1010,15774
1840	548,68517		

Raccogliamo alcune conseguenze dalla semplice ispezione dei riferiti prospetti. Per l' intero corso dei ventun' anni l' altezza della pioggia caduta nel nostro suolo, comprese la nebbia e la neve sciolta, è stata di metri 15,63712587. Se tale quantità, per un supposto, fosse caduta in un tratto essa ne avrebbe inondato la terra fino all' altezza ordinaria dei nostri tetti; o in altri termini, se le successive pioggie rimanessero dove cadono senza disperdersi, dovrebbero passare ventun' anni prima che la piena delle acque raggiungesse l' altezza delle nostre abitazioni. Rileviamo ancora che il decennio dal 1830 al 1839

ci ha somministrato l' altezza della pioggia di metri 7,3032 e il successivo dal 1840 al 1849 ci ha dato la simile quantità di metri 7,3238, colla piccola differenza di 20 millimetri in aumento dal primo al secondo; laonde potrebbe credersi che la pioggia di un decennio sia prossimamente costante; ma non precipitiamo le deduzioni sopra i medj della pioggia, de' quali ci occuperemo fra poco.

5. Sebbene di non molti anni, l'intervallo delle nostre osservazioni ha offerto in riguardo alla pioggia la più grande varietà e tutte a così dire le gradazioni de' fenomeni, o delle meteore acquose. L' anno più asciutto o di minima pioggia è stato il 1834, seguendo esso immediatamente ad un anno piovosissimo qual fu il 1833; e parimente al 1839, anno della massima pioggia, seguiva il 1840 che fu il secondo della serie nella scarsezza della pioggia caduta; e così vediamo quì pure che gli estremi si toccano, qualunque ne sia la cagione che ora non ricerchiamo. Anche nelle singole stagioni, come le abbiamo distinte, riscontriamo i massimi e i minimi assai differenti fra loro nelle quantità della pioggia indicate dalle somme orizzontali dei precedenti prospetti. Ma è cosa rimarchevole che questi massimi e minimi della pioggia di una stagione, o di un trimestre, non coincidono sempre coi massimi e minimi della simile quantità di uno stesso anno. In riguardo per esempio al minimo annuo del 1834 troviamo bensì presso al minimo la pioggia di ciascuna delle quattro stagioni di tal anno; ma non è a dir altrettanto dell' anno 1840, asciutto anzi che nò complessivamente e nelle stagioni dell' inverno estate ed autunno, mentre all' opposto la primavera ne fu copiosa di pioggia nell'Aprile. E al massimo annuo del 1839 corrispose bensì quello dell'autunno, ma non quello dell'estate di detto anno; laddove per converso al quasi massimo annuo del 1833 corrispose la massima pioggia dell' estate, mentre in quell' anno la pioggia dell'autunno fu assai discreta. Ciò vuol dire che di raro le stagioni fra noi si succedono con costanza di tempo inchinevole o no alla pioggia, e che piuttosto rispetto a questa

specie di fenomeni le stagioni successive tendono sopra di noi ad alternarsi e compensarsi a vicenda. E quanto abbiam rimarcato delle stagioni relativamente all' intero anno rilevasi pure dei mesi componenti una stagione medesima, e vale a dire che raramente il tempo si mantiene per noi alla pioggia o al secco durante un' intera stagione, sembrando piuttosto eccezioni che nella primavera del 1834 scarseggiasse la pioggia per li tre mesi continui di Aprile Maggio e Giugno e ch' essa per contrario abbondasse di continuo ne' tre mesi autunnali del 1839.

6. Nella quantità misurata della pioggia è da notar eziandio un' altro carattere o elemento che si riferisce alla durazion del fenomeno, ed è la maggiore o minore grossezza delle goccie acquose e la spessezza pur maggiore o minore delle medesime, presentandosi in fatto a tale riguardo tutte le variazioni, dalla pioggia di rare o fitte stille minutissime a quella di ampie goccie anch' esse rare o fitte assai, e risultandone la diversa copia della meteora, dal tenue spruzzo di sottil nebbia o nuvola transitoria all' enorme scroscio e diluvio delle cumulate nubi temporalesche. Quindi avviene talvolta che in meno di un' ora o poco più cade tanta pioggia da superarne la media di un mese, e in un mese può raccogliersi la pioggia che avanzi quella di una stagione e ben anche di un anno. Così piovendo continuo e dirottamente nei giorni 28, 29 e 30 Settembre dell' anno 1833, dal nostro pluviometro ne furon estratti millimetri 72, 71 di altezza, ed essendo stato quel mese anche innanzi rotto al pessimo tempo sen ebbe il massimo della pioggia mensile che supera circa di un quarto il minimo annuo del seguente 1834. Sono memorabili i gonfiamenti e straripamenti che ne seguirono de' nostri fiumi e canali, le rotture degli argini, e le protratte inondazioni di valli e pianure alla destra del Po, allagando per ogni dove e rigurgitando la piena delle acque. Altrettanto e assai peggio ne' disastrosi effetti è accaduto di recente per le incessanti pioggie strabocchevoli e le impetuose fiumane di Adige e Piave che lagrimevolmente hanno desolato una vasta parte del Veneto e del Friulano

territorio. Un esempio di pioggia fortemente per così dir addensata e copiosissima, quantunque caduta in breve tempo, avvenne per noi la notte del 15 al 16 Ottobre 1839, avendone io raccolto la mattina appresso millimetri 70,63 di altezza, ed essendone stata appunto quella volta soperchiata l' urna di serbatojo del pluviometro per piccola quantità che ne andò dispersa. E ripetevasi pure questo caso dopo altro simile di densa pioggia temporalesca, mista a grandine, avvenuto nelle ore pomeridiane del 28 Agosto 1839, e uscendone dal pluviometro per l' altezza di millimetri 73, 99. Pertanto mette quì bene il riflettere a due cose: la prima che simili rovesci di pioggia non cadono a un tempo sopra tutte e neppur sopra molte e remote parti della superficie terracquea, accadendo anzi di ordinario che mentre in una di esse imperversan ostinatamente le nubi, domina in altra un' ostinata siccità, e ne abbiam pur il caso recente dell' Italia inondata, simultaneamente alle inaridite terre della Turchia: e la seconda che i detti parziali diluvj di pioggie stemperate non avvengono pe' nostri climi generalmente che nell' estate o nell' autunno. Il qual duplice riflesso ci sarà utile in seguito di richiamare.

7. Quanto si è detto poc' anzi della pioggia estiva o autunnale, che cioè se ne osserva presso di noi ogni gradazione di copia, ha luogo ancora in riguardo alla neve durante l' inverno e in sul finir dell' autunno. Volge talora per noi la rigida stagione, comecchè non di frequente, scarsissima di neve, e rarissimo poi è il caso di un inverno, come quello del cadente 1851, in cui mancò affatto la neve e quasi totalmente il ghiaccio nelle nostre pianure. Per lo contrario in altri anni del breve corso preso in disamina l' inverno ci apportò una smisurata copia di neve, e ne ricordiam tuttora quella che per 36 ore continue, a larghe falde, spessa e aggirata da furiosa bufera di tramontana cadeva ne' giorni 29, 30 e 31 Gennajo del 1842 ricoprendo il suolo all' altezza di metri 0, 950; e l'altra che dall' 8 al 13 Decembre del 1844 non cessò di fioccare, non meno fitta ma in minuti aghi e stellette cristallizzate,

aggiungendo nel suolo l'altezza massima di metri 0,596. Copia sì esorbitante di neve nell' un caso e nell' altro che, non bastando i numerosi nostri canali sotterranei a sgombrarne le vie e alleggerirne i tetti delle case urbane, costrinse a praticarne alte spallate e aprirne angusti sentieri nella Città, come per alcun tempo ne furono impedite o ritardate le comunicazioni esterne coi paesi e le campagne. Per vero dire allorchè la neve è così eccessiva, il nostro pluviometro non può darne con esattezza le indicazioni e misure nella quantità dell'acqua disciolta, perocchè riempitosi dalla neve cadente il vano dell' imbuto esteriore e formatovi sopra il colmo che può reggervisi a notabile altezza, il vento che spira libero da ogni parte ne va disperdendo un qualche strato soffice e lieve. Contuttociò la parte dispersa non è poi molta per la profondità e larghezza dell' imbuto stesso, e avendo cura di non toccare alla neve depostavi, premutavisi e assodata, finchè tutta, inferiormente gocciolando, non sia discesa ed estratta dall' urna, io ne raccolsi quantità considerevoli di acqua, e ne ho fiducia che l'approssimazione alla neve caduta sia stata quanto è possibile conseguita. Ordinariamente però e nel maggior numero degli anni della nostra serie la neve è stata discreta, comecchè ripetutasi parecchie volte nello stesso inverno, sicchè non coprendosene ogni volta la terra di alti strati non fu necessario di misurarne l' acqua disciolta con particolari diligenze e cautele. E quì facciam pure due riflessioni d' importanza e sono: l' una che fioccando per un intero giorno e fitta la neve, l' acqua liquida cui essa riducesi non risulta per avventura tanta, quanta ne versa di sovente in meno di un' ora un temporale estivo: l' altra che la nevicata invernale è omogenea ed estendesi ad un tratto di paese molto più ampio di quello in cui si rovescia l' estivo acquazzone, sembrando per tal modo essere in ambi i casi la densità della meteora acquosa in ragione inversa della sua estension orizzontale.

8. In mezzo a sì varia e complicata combinazione di fenomeni e circostanze risguardanti la pioggia riuscirebbe assai

malagevole e incerto il riconoscerne e dedurne alcuna legge costante o periodica; ma ciò finchè si considerano soltanto le singole e disgiunte risultanze o misure della pioggia caduta, nelle quali troppo grandi e irregolari o a salti si manifestano le differenze. A procedere con vantaggio in siffatte indagini è mestieri aggruppar convenientemente le quantità osservate, e considerarne i valori medj in eguali tempi successivi. Passiamo a trattenercene sotto questo altro punto di veduta.

§. II.

Medj della pioggia osservata.

9. Preveniamo una obbjezione e risolviamola. Si dirà che i semplici medj aritmetici delle pioggie mensili e annue misurate nulla significano, a cagione appunto delle troppo forti ineguaglianze nei singoli valori di queste, e che richiederebbesi un numero di mesi e d' anni assai grande per aver in quelli una probabilità ben fondata che rappresentano una legge o un fenomeno costante della natura. Così ad esempio l' esorbitanza delle pioggie nel Settembre del 1833 non può non influire ad alterar notabilmente dal valor più probabile il medio di tal mese della nostra piccola serie in confronto a quello degli altri mesi; e quel che dicesi della influenza de' singoli valori in eccesso, ossia de' massimi della pioggia, è pur vero in opposto senso pei valori in difetto, ossia pe' minimi di essa. Rispondiamo primamente all' objetto che, se nell' intervallo e corso delle nostre osservazioni siano accadute per ciascun mese, come sembra, tutte le variazioni della quantità della pioggia, il medio mensile rappresenterà in tal supposto adeguatamente la distribuzion uniforme della pioggia propria e spettante al rispettivo mese. E già vediam per esempio che la stemperata pioggia nel Settembre del 1833 si compensò colla minima e quasi nulla dello stesso mese nel susseguente anno 1834. Questo dolce mese dei frutti e della vendemmia, e che invita col mite Sole e coll' aere intiepidito a godere i diletti della cam-

pagna, come di raro scorre totalmente sereno ed asciutto, così pur di raro fortunatamente imperversa con pioggia dirotta e diuturna; ma se il medio della pioggia per oltre a vent' anni ce lo indicherà fra i mesi come il più abbondante di essa, ciò non è senza una manifesta e natural cagione che addurremo. In secondo luogo il miglior criterio di fisica probabilità favorevole, o di rapida approssimazione alla realtà de' naturali risultamenti nei medj valori di cui trattiamo emergerà dal trovarne successivamente scemate le differenze dall' uno all' altro medio, analoghi e per egual tempo, di mano in mano che aumenti la durazion di ciascuno, o che si compongan e paragonin fra loro i medj dei medj; poichè ciò non potrebb' essere effetto di fortuite combinazioni, nè di compensamenti di massimi e minimi in confronti moltiplicati. E infine se dai valori e rapporti dei medj ottenuti si rilevi una conformità con leggi d' altronde note o con alcun procedimento verosimile della natura, ciò darà prova o conferma, benchè *a posteriori* e dal fatto, della realtà e sussistenza de' medj stessi e della loro significazione. Però è sempre da tener presente che quanto ne ragioneremo si riferisce, non alle immediate osservazioni e misure della pioggia, bensì ad una combinazione di esse, quali sono i medj, che indicano un fenomeno acquoso più ampio e generale nel dato luogo terrestre.

10. Dividendo per 21 ciascuna delle somme verticali nei quattro precedenti quadri della pioggia osservata, ne ricaviamo per primi i medj di ciascun mese dell' anno. E ordinandone la serie dai risultamenti maggiori ai minori, affine di scorgerne tosto le relazioni e le conseguenze, consideriamoli nella tavoletta che quì espongo.

Mesi	Medj mensili della pioggia	Differenze
	millim.	millim.
Settembre	83, 736	4,463
Maggio	79, 273	4, 137
Novembre	75, 136	3, 642
Ottobre	71, 494	6, 934
Aprile	64, 560	0, 468
Giugno	64, 092	2, 796
Decembre	61, 296	8, 253
Agosto	53, 043	0, 128
Febbrajo	52, 915	3, 817
Luglio	49, 098	0, 587
Marzo	48, 511	7, 517
Gennajo	40, 994	

Apparisce pertanto di quì alla semplice ispezione o per deduzione agevole:

1.° Che le differenze di questa progressione dei medj mensili della pioggia sono tenui e distribuite con una certa uniformità entro stretti limiti:

2.° Che nel medio della pioggia pressocchè si eguagliano l' Agosto e il Febbrajo, l' Aprile e il Giugno, il Luglio e il Marzo; nel mentre che si differenziano principalmente il Decembre e l'Agosto, il Marzo e il Gennajo, l'Ottobre e l'Aprile:

3.° Che il Settembre è il mese del medio massimo della pioggia, e il Gennajo è quello del medio minimo, colla notabile differenza dall' uno all' altro di millimetri 42, 742:

4.° Che la somma de' medj più forti, ossia de' primi sei mesi della tabella, porgendo millim. 438, 291 e la somma de' più deboli, ossia degli ultimi sei, millim. 305, 857 ne viene la

differenza dal semestre primo al secondo di millim. 132, 434, quantità non lieve nè da trascurarsi:

5.° Che per contrario si ha una quasi perfetta eguaglianza fra la somma dei medj della pioggia di Febbrajo, Marzo, Aprile, Maggio e Giugno unitamente col Decembre, e quella dei medj di Luglio, Agosto, Settembre, Ottobre e Novembre unitamente col Gennajo. Perocchè la prima somministra millim. 371, 123 e la seconda millim. 373, 501, colla tenue differenza dall' una all' altra di millimetri 2, 378 che può ritenersi anche minore a eguaglianza di tempo, atteso che il secondo semestre nominato supera di tre giorni il primo nell' anno comune:

6.° Che la metà o il semestre primo dell' anno, di giorni 181, 25, ha il medio della pioggia di millim. 350, 821; laddove quello della seconda metà, di giorni 184, lo ha di millim. 393,803: quindi la differenza in aumento da quello a questo di millim. 42, 982 che non è grande quantità, ma neppur piccola. Quindi anche in complesso le due stagioni dell' inverno e della primavera ci si dimostran piovose maggiormente che l' estate e l' autunno.

Tutti questi sono fatti e rapporti delle quantità medie mensili della pioggia che ci sembran abbastanza precisi e ben fondati, com' essi derivano immediatamente dall' osservazion e misura de' fenomeni relativi.

11. Consideriamo nella nostra serie i medj delle quattro stagioni, che ottengonsi dividendo per 21 le somme verticali dell' ultima colonna dei quadri presentati, sotto il titolo di somme orizzontali. Sono essi

		millim.
quello dell' inverno . .	=	142, 42000
della primavera	=	208, 40147
dell' estate . . .	=	185, 87725
dell' autunno . .	=	207, 92636.

È manifesto a colpo d' occhio in questi numeri che delle quattro stagioni dell' anno per noi l' inverno è quella della minima pioggia, le due della primavera e dell' autunno sono eguali fra

loro e ciascuna di pioggia massima, e l' estate nella pioggia è molto prossimamente media aritmetica fra quella e ciascuna di queste. Rileviamo ancora che si ha l' espressione semplicissima del rapporto geometrico fra il medio massimo e il minimo della pioggia nelle stagioni annue dalla proporzione assai prossima al vero

pioggia in primavera o autunno: pioggia in inverno = 3: 2.

E conseguentemente la pioggia nelle quattro stagioni successive dell' anno si esprime con tutta semplicità dai numeri

$$2, \quad 3, \quad 2\tfrac{1}{2}, \quad 3.$$

In breve troveremo essere per noi il medio dell'annua pioggia di millim. 744,67271. Se poniamo questa = 1, e riferiamo ad essa i precedenti medj delle stagioni, esprimeremo in altro modo questi ultimi ed avremo

media pioggia dell' inverno . .	=	0, 19126
della primavera	=	0, 27987
dell' estate . . .	=	0, 24963
dell' autunno. .	=	0, 27924
Sommano . . .		1, 00000.

12. Ma perchè viemmeglio si riconosca il fondamento sul quale riposano gli ottenuti valori e rapporti delle quantità medie della pioggia e se ne vegga il grado di fiducia per ammetterli, formiamone i medj delle stagioni per ogni triennio consecutivamente. Risultan essi dalle somme orizzontali scritte nei prospetti delle osservazioni e sono i seguenti

Trienni	Medj triennali della pioggia in			
	Inverno	Primavera	Estate	Autunno
	millim.	millim.	millim.	millim.
1.	182,48142	187,89564	117,46099	153,94527
2.	133,72551	173,99201	309,74778	123,94436
3.	163,91600	175,03728	164,59271	160,44956
4.	111,61087	220,50718	149,58400	312,70297
5.	163,79568	217,21270	205,89697	187,26378
6.	153,13019	199,04753	197,78202	273,72675
7.	88,28035	283,18466	156,07625	243,46853

Confrontiamo per ciascuna stagione gli estremi, ossia i massimi e minimi delle osservazioni e misure immediate coi massimi e minimi dei loro medj triennali, prendendo le differenze di quelli e di questi, ed avremo

	Differenze dei primi.		*Differenze dei secondi.*
	millim.		millim.
per l' inverno . .	291,60400	. . . .	94,20107
la primavera	418,86447	. . . .	109,19265
l' estate . . .	555,40754	. . . .	192,28679
l' autunno . .	606,72771	. . . .	188,75861.

È singolare e da notarsi che questi due ordini di differenze nella pioggia delle stagioni ci offrono pressocchè un comune andamento di successiva grandezza e di rapporto, scemando circa di $\frac{1}{3}$ le triennali dalle differenze semplici. Potrebbe inferirsene che, mantenendosi tale regolarità, le differenze dei simili medj ne' successivi periodi, di 21 anni ciascuno, della pioggia non oscilleranno dal massimo al minimo che dai 10 ai 20 millimetri, e richiedersi perciò un corso di 105 anni, o di

un secolo almeno di osservazioni, a stabilire il medio probabile nel limite di 2 a 4 millimetri. Ma il corso a cui necessariamente per ora dobbiam restringerci, sarà poi sempre il punto di partenza o il fondamento delle indagini, e il medio per ogni stagione che ne abbiam ottenuto potrebbe avvicinarsi più al medio che agli estremi del periodo secolare, e quindi al vero medio della pioggia di stagione; oltre di che esso è conforme ad una cagione costante o legge della natura, come or ora vedremo.

13. Prendiamo infine i medj triennali anche dell' annua pioggia che riportammo di sopra e sono

Triennj	Medj dell'annua pioggia
	millim.
1.	643,78332
2.	741,39299
3.	663,99556
4.	794,40502
5.	774,10247
6.	823,68648
7.	771,00979

medio totale 744,67271.

L' approssimazione al vero medio annuo dev' essere quì maggiore che per le stagioni singole, compensandosi in parte nell' intero anno le variazioni o differenze delle quattro stagioni del medesimo relative alla pioggia. Infatti abbiamo nella nostra serie pei singoli anni la differenza fra gli estremi, ossia massimi e minimi della pioggia

$$876^{mm},50210$$

e la simile differenza dei medj triennali

$179^{mm},90316$, circa $\frac{1}{5}$ della precedente.

Quindi basteranno per avventura quattro periodi successivi, di ventun' anni ciascuno d' osservazioni a dedurne il medio dell' annua pioggia che oscilli entro pochi millimetri fra il massimo e il minimo rispettivo. Ma il medio stesso anche di un solo periodo, qual è il nostro, appunto per esser medio, e non estremo, di sette medj triennali deve già esser molto prossimo al vero medio e più probabile ricercato. Nella mia Memoria sopra lo strano inverno del 1845 (Soc. It. Tom. XXIII. Parte matematica, pag. 351) io avvertiva la rapidità dell' approssimazione de' medj triennali della pioggia al valor più costante, e credeva sufficientemente stabilito quello che risulta dai primi cinque triennj ora nuovamente discussi. Esso però è notabilmente minore del poc' anzi ottenuto, e che assolutamente mi sembra da preferire per ragioni, cui non posi mente altra volta, e in seguito suggeritemi dal meditar più di proposito sul fenomeno della pioggia dipendentemente dalle più estese e grandi cagioni che lo producono. Veniam quindi a discorrere di tali cagioni nel seguente.

§. III.

CAGIONI DELLA PIOGGIA IN GENERALE.

14. Nulla di più ovvio e comune e di più facile a spiegarsi della pioggia. Una nube che nuota vagante per l' aere componendosi semplicemente, com' è stato riconosciuto per osservazioni microscopiche da Saussure ed altri, di vapor acquoso vescicolare, ossia di vescichette sferiche e specificamente men gravi dell' aria, questa nube, per una cagione qualunque che ne abbassi fortemente la temperatura, dallo stato di fluido elastico farà passaggio a quello di liquido, e anche di solido, e acquistandone peso specifico maggiore di quello dell' aria, cadrà distillata in goccie, o in fiocchi e particelle di neve, o in duri ghiacci più o men grossi di grandine. La nuvola che per tal modo è resa alla terra, erasi innanzi da questa sollevata nell' evaporazione continua e più o meno abbondante che avviene alla superficie dei mari, dei laghi, de' fiumi, degli stagni,

delle paludi per effetto interno del calorico delle masse liquide o de' molli terreni, e per l' esterno dei raggi solari; cosicchè l' evaporazione e la pioggia costituiscono una circolazione perenne dell' acqua, raccolta e sparsa in tanta copia sul nostro globo, fra questo e l' atmosfera. Però in una tale circolazione la quantità determinata della pioggia che cade in un tempo dato sopra un dato luogo della superficie terrestre dipende da un intreccio sì complicato di tante e sì mutabili cagioni e circostanze, che il formularla e presagirla nella successione dei tempi ad ogni evento che vi si rapporti è opera vana ed impossibile. Cionullameno distinguendo rispetto alla pioggia gli eventi singoli o particolari dai complessivi o generali, come questi ultimi all' osservazione e misura de' fenomeni manifestino una regolarità qualunque e una tendenza a costanti risultamenti, egli è chiaro indicarsi da essi una legge o cagione pur costante della natura, donde procedono, e cui non sarà malagevole di scuoprire ed assegnare. Questo è appunto ciò che deve dirsi dei medj osservati della pioggia, i quali coll' accumularsi dei tempi e dei parziali fenomeni accaduti e misurati scemando progressivamente nelle differenze loro accennano ad un medio finale periodico ed invariabile per un dato luogo terrestre. Di conseguenza il medio costante, o di poco variabile, della pioggia dovrà essere considerato come un fenomeno cosmico e prodotto da una cagione o forza che agisca in grande con regolarità e generalmente. Or quale sarà questa naturale cagione?

15. Primieramente è da riflettere all' origine della pioggia nella sua quasi totalità dall' evaporazione continua del mare, il quale in superficie, com' è noto, estendesi ai $\frac{3}{4}$ di quella dell' intero globo, e in confronto al quale è da ritener pressocchè nulla e trascurabile l'evaporazione dell'altre parti acquose o molli disseminate nei continenti e nelle isole. In riguardo all' evaporazione marina, ommesso pertanto di considerar la parte o quantità ignota e verosimilmente costante che ne è dovuta all' interno calorico degli oceani, la parte di essa più

copiosa e variabile deriva senza dubbio dal riscaldamento del Sole che, vario sopra ciascun punto del mare a norma della differente inclinazione e del più o men lungo corso diurno del Sole stesso, ne solleva una rispondente quantità di vapor acqueo puro, cadendone al passaggio dallo stato liquido all' aeriforme il sal marino discioltovi. E questo vapore, vieppiù investito dalla forza riscaldante dei raggi solari, se ne dilata, prende aspetto di vapor vescicolare, sale a grandi altezze nell' atmosfera, vi si diffonde e spesso, assottigliato e leggiero qual è, penetra e si distribuisce negli interstizj dell' aria in guisa di non lasciarne menomamente intorbidata la sua diafaneità e limpidezza. Non rade volte infatti mi è occorso di osservare una nuvola distaccata, immobile e anche di qualche volume sciogliersi poco a poco e disparir interamente, restandone il luogo del Cielo affatto sereno, e senza il minimo vestigio di essa. Se dunque l' evaporazion del mare dovuta all' azion calorifica dei raggi solari è la cagion primitiva e pressocchè totale della pioggia, si concepisce di leggieri che risultando quella molto più copiosa in estate che in inverno e nelle stagioni temperate, questa pure, al raffreddarsi nelle regioni atmosferiche il vapor acquoso, dovrà cadere e raccogliersi in un dato luogo e per lo stesso tempo in copia, maggiore assai al declinar dell' estiva e al cominciar della stagione autunnale che non durante l' inverno; il che abbiam veduto avverarsi di fatto nelle quantità misurate. Una parte nondimeno dei vapori estivi che per eccessiva rarefazione sollevasi alle regioni aeree superiori e più fredde non ne discende verosimilmente che più tardi, e sembra esser destinata a fissarsi o a crescere gli eterni ghiacci e le nevi delle alpestri sommità e giogaje; mentre poi le generali nevicate dell' inverno che ricopron valli pianure e i monti meno sublimi procedon massimamente dall' evaporazione del mare, meno abbondante sì, ma innalzata pur meno, e che raffreddasi nelle basse regioni atmosferiche allo spirare di certi venti.

16. Ma se la quantità della pioggia unicamente provenisse dall' azion riscaldante del Sole alla superficie del mare, combinata con una costante legge, uniforme e continua, nella diffusion de' vapori per l' atmosfera, ne seguirebbe che il medio annuo di essa non cangierebbe col tempo di valore, e ripeterebbesi ogni anno al compiersi l' apparente giro del Sole su l'ecclittica. Ciò non accade, e anzi ne' singoli anni le osservazioni ci han fatto conoscere enormi discordanze de' corrispondenti valori della pioggia. Dunque è forza conchiudere che il medio costante di un certo numero d' anni avrà la sua ragion fisica da un'altra cagione che, insieme alla calorifica dei raggi solari, svolgasi e ritorni periodicamente con quel dato numero d'anni. Questa novella cagione, da cui derivino i moti più regolari dell' atmosfera, ossia i venti più periodici e conseguentemente, col trasporto e raffreddamento de' vapori acquei, la caduta della pioggia in un luogo determinato, altro non potrebbe essere che l' azion attrattiva del Sole e della Luna, da cui deve nascere, comecchè non ben conosciuto finora nè misurato col barometro in riguardo alla Luna, un fenomeno di flusso e reflusso atmosferico somigliante a quello del mare. E già che la posizion della Luna relativamente al Sole abbia un' influenza notevole e indubitata nei fenomeni della pioggia e nei così detti cangiamenti del tempo, dal buono e sereno al cattivo fosco e inclemente, ce ne persuade una quotidiana esperienza che quasi mai non fallisce; ed è che il tempo, buono o cattivo, si mantiene per alcun giorno di seguito dallo stato o cambiamento avvenutone alcune ore innanzi che abbia luogo una fase lunare qualunque, sia di sizigia o di quadratura. Senza essere ciecamente partigiani e propugnatori del *Saros* a ragione obbliato o di altri cicli meteorologici arbitrarj, dobbiam ammettere tuttavia, come fatto innegabile e incessante, questa coincidenza delle fasi lunari colle mutazioni dello stato meteorologico; e non è poi fuor di verosimiglianza che ciò accada per l'azion attrattiva combinata della Luna e del Sole, mentre le grandi correnti atmosferiche ossia i venti, che principalmente

giuocano nella produzione delle meteore acquose, posson aver origine in molta parte e regolarmente dall' indicata cagione. Sotto questo riguardo il medio costante della pioggia per un dato luogo terrestre e in un dato numero d'anni è dunque da considerarsi come un fenomeno luni-solare, ed esso deve ottenersi appunto con bastevole approssimazione pel nostro periodo dei 21 anni che formasi quasi esattamente da 260 rivoluzioni sinodiche della Luna, ciascuna com'è noto di giorni 29 $\frac{1}{2}$ circa. Spiegasi ora come l'approssimazione dei medj triennali al medio annuo costante risulti e si palesi rapida, formandosi in tre anni una rivoluzion lunare sinodica dal cumulo degli undici giorni che avanzano ogni anno al numero intero di siffatte rivoluzioni; e tuttavia nel triennio conservandosi un resto di 3 giorni e mezzo l' approssimazione stessa ne vien limitata, e le differenze dei medj triennali della pioggia sembrano dimostrarlo. Spiegasi ancora come i medj mensili dei 21 anni siansi accordati fra loro, differendo progressivamente dal Settembre al Gennajo di piccola quantità che ascende fra gli estremi a soli $42^{mm},7$: laddove fra gli estremi de' medj triennali abbiam trovato la differenza di $179^{mm},9$; e la ragion è che il periodo mensile avvicinasi di per sè ad una rivoluzion della Luna più che il triennale. Io concepisco pertanto il fenomeno del medio costante della pioggia prodotto per l'ordine seguente di naturali cagioni: 1.° esso deriva principalmente in origine dall'evaporazion del mare, la cui quantità o massa innalzata nell'atmosfera proporzionatamente alla totale superficie degli oceani, ogni anno dev'essere presso a poco la medesima rinnovandosene la stessa cagione della forza riscaldante al compiersi l' annuo giro apparente del Sole: 2.° questa massa del vapor acqueo, variamente rarefatto nelle stagioni dell'anno sollevasi spandesi e galleggia idrostaticamente a differenti altezze nell' atmosfera, e trasportasi e discende in pioggia o in neve o in ghiaccio per forza e temperatura di grandi correnti aeree, ossia di venti: 3.° questi venti, sebben in parte e irregolarmente prodotti per disequilibrj e moti elettrici o per altri agenti

fisici, sono però nella massima estensione e continuità l'effetto dell' azion attrattiva combinata della Luna e del Sole sullo sferoide atmosferico della terra, risultandone in questo un moto intestino somigliante alle maree: 4.° al compiersi perciò di un numero intero d'anni e insieme di rivoluzioni sinodiche della Luna la quantità della pioggia caduta in quel periodo sopra un dato luogo terrestre, qual effetto di costanti cagioni, essa pure avrà un valore prossimamente costante.

17. Ho detto prossimamente, poichè alle indicate cagioni periodiche e regolari per determinare la quantità della pioggia unendosi altre, nè poche nè piccole, influenze che avvolgon e cuopron le prime, a liberar l'effetto di quelle dalle seconde per una compensazione o distruzion di queste fra loro, un solo periodo di 21 anni per semplice probabilità è insufficiente; laonde io avvertiva poc'anzi che almeno quattro o cinque periodi all' uopo si richiederanno. Siane di conferma una osservazione più recente. Notisi che il primo termine dell' annua pioggia nella nostra serie, ossia la pioggia del 1830 fu trovata di $740^{mm},047$ valore pressocchè uguale al medio totale annuo. Se altre cagioni o influenze non sussistessero, che le regolari e avvertite, nell'anno testè mancato 1851 essendo ricominciato il periodo, sarebbesi di nuovo raccolto e misurato da noi l'annuo medio costante della pioggia. Ora ecco le quantità osservate

1851.		millim.	
	1o Genoajo, altezza della pioggia =	55, 396	pioggia d'inverno millim. 165, 886
	Febbrajo	52, 886	
	Marzo	57, 604	
	Aprile	84, 407	pioggia di primavera 211, 617
	Maggio	102, 360	
	Giugno	24, 850	
	Luglio	50, 430	pioggia d'estate 191, 738
	Agosto	64, 461	
	Settembre	76, 847	
	Ottobre	122, 834	pioggia d'autunno 266, 190
	Novembre	143, 263	
	Decembre	0, 093	
	pioggia dell'anno .	835, 431	

differenza dall' annua pioggia del 1830 in più pel 1851.....
$= 95^{mm}, 384$, essendo riusciti nel 1830 maggiormente piovosi l' inverno e la primavera, e maggiormente piovosi nel 1851 l' estate e l' autunno. Sebbene dunque la pioggia dell' ultimo anno decorso non molto si allontani da quella del 1830, e accenni quindi essa pure alla legge periodica luni-solare, cionondimeno l' ottenuta differenza è abbastanza forte per inferirne la coesistenza e l' intreccio di altre fisiche azioni, perturbatrici di tal legge e non calcolabili.

18. Una formula generale esprimente la quantità del flusso e reflusso atmosferico dovuto all' azion attrattiva del Sole e della Luna fu già data da Laplace nel Capo VII. Libro XIII. (T. 5.°) della Meccanica celeste, senza però ch' egli potesse accertarne il valore delle due costanti contenutevi, a malgrado ch' egli le avesse dedotte con calcolo di probabilità da meglio che 1500 osservazioni del barometro. Se non che, oltre questa incertezza teorica della detta formula e quantità, per applicarla poi con successo alla spiegazione dei regolari fenomeni della pioggia, altre e per avventura insormontabili difficoltà si oppongono. Imperocchè, supposto pure che si riuscisse a ben valutare l' annua quantità della evaporazion del mare prodotta dal Sole, e il modo della successiva diffusione di essa nelle differenti regioni e altezze, fino alle più sublimi dell' atmosfera, tuttavia resterebbe a conoscere per immediate osservazioni nelle superiori altezze medesime la forza e temperatura de' venti, cui generano le maree dell' aria, per conchiuderne la massa e direzione dei vapori trasportati e convertiti in pioggia sopra un luogo terrestre determinato. Ben è a dolere che istituir non si possa cotali osservazioni le quali porgerebbero non solo ragione o conferma del fatto di un medio costante della pioggia, ma ben anche fisica spiegazione delle maggiori differenze rimarcate per uno stesso luogo nell' annua pioggia dei singoli anni successivi e in quella delle stagioni e dei mesi, come altresì delle simultanee differenze di pioggia, scarsa o abbondante, da luogo a luogo in parti assai disgiunte del nostro globo.

Questo genere di ricerche è da prevedere che non sarà mai consentito all'ardimento dell'umano ingegno per mancanza dei mezzi di librarsi con sicurezza nelle alte regioni dell'aria, e di trattenervisi immobile quanto sarebbe d' uopo a raccoglierne i dati precisi del problema meteorologico.

19. Terminerò il presente paragrafo toccando di una questione promossa non ha molt' anni circa un sospettato accrescimento dell' annua pioggia in alcune località di paesi, e specialmente nel territorio lombardo. L' illustre Astronomo di Milano Cav. Ab. Cesaris nella sua Memoria sul Clima della Lombardia pubblicata fra quelle della Società italiana (T. XVIII. Parte fisica, pag. 71) avanzò che un aumento dell' annua pioggia sembra non potersi colà revocare in dubbio. E avendo egli recata la serie non interrotta di 54 anni d' osservazioni meteorologiche, dal 1763 al 1816, ne addusse in prova che il medio dell' annua pioggia ne' primi 27 anni risultava in altezza di pollici 33, e negli ultimi 27 di pollici 37; il qual aumento egli pensava di dover attribuire principalmente all' accresciuta irrigazione e coltura della Milanese provincia. Ora io rifletto primamente che il medio della pioggia dedotto da 27 anni di misure può non essere tanto prossimo al vero e costante, siccome quello dei 21 anni, in vista della cagione periodica e luni-solare da cui dipende; giacchè ne' sei anni, oltre al periodo compiuto di questa per aggiungerne il più lungo intervallo, non si contiene un numero intero di rivoluzioni sinodiche della Luna. Quindi non è a stupire della forte differenza di 4 pollici fra li medj delle due metà dell' intera serie, nè del segno di quella che avrebbe potuto presentarsi in diminuzione anzichè in aumento. Dipoi è da considerare che le variazioni della quantità della pioggia derivanti da mutate condizioni e circostanze locali debbono essere ben piccola cosa e poco men che trascurabile nel medio annuo della pioggia stessa ricavato dal corso di parecchi anni in confronto al fenomeno e alla quantità principale somministrata nel medio stesso dall' evaporazione de' mari, comecchè distribuita ad irrorar pressocchè

tutta la superficie terrestre. I cangiamenti che introducansi nella coltivazione del suolo e soprattutto ne' ristagni e nelle inaffiature delle acque per vaste praterie così dette a marcita e per valliva estension di risaje debbono influir senza dubbio con nebbie, vapori, e anche piccole pioggie nella condizion igrometrica dell' aria sui luoghi ove son praticati, e perciò ivi ancora nella salubrità dell' elemento respirato dagli abitatori, uomini animali e piante. Ma la condizion igrometrica dell' ambiente atmosfera è cosa ben diversa dall' annuo medio della pioggia, e le stesse più fitte nebbie de' luoghi palustri e de' brevi giorni alla fredda stagione, estese ancora orizzontalmente sopra molto spazio, non depongon tuttavia lentamente distillando che tenue quantità d' acqua; mentre la nuvoletta estiva o autunnale, in apparenza piccola per elevazione o lontananza, gonfiasi, discende o s' avvicina, e distemprasi d' un tratto in un rovescio d' acqua che scorre e riempie canali, rigurgita ed allaga le terre. Da ultimo vuolsi riflettere che forse più delle moltiplicate irrigazioni del piano e della valle deve contribuire ad alterar in un dato paese l' annua pioggia una cangiata disposizione di circostanze, naturalmente o artificialmente avvenuta ne' vicini monti, per fenditure o larghi franamenti di suolo, per atterramento di selve, o in altro modo che apra in quelle alture alpestri novelli varchi ai venti e con essi alle nuvole più gravide e dense di vapore. Però questa cagione medesima di mutamenti della pioggia non può esser tanta da renderne molto diverso il medio annuo, conchiuso da un periodo di tempo abbastanza lungo, e soggetto ad una legge ben più alta e generale, ossia cosmica.

§. IV.

PRONOSTICI DEL TEMPO.

20. Sembra incredibile, eppur è vero, che malgrado il tanto e sì reale, non meno che vantato progresso delle scienze fisiche a' nostri giorni, e non ostante lo zelo e le cure di gran

numero de' loro cultori a fine di renderne popolare il linguaggio e l' intelligenza, il popolo tuttavia, cioè a dire la moltitudine volgare dell' umana Società profitti bensì de' nuovi trovati o perfezionamenti, ma ignara de' principj e della ragion delle cose, e rimanendone sempre credula e affezionata a' più goffi pregiudizj. Valgane a prova d' esempio la fede e il buon accoglimento che ottengon ancora, e non sempre e solo tra il basso volgo, gli annunzj de' giornali astro-meteorologici, che presagiscono le qualità delle stagioni e le vicende giornaliere dell' aria, bastando che taluna fiata la predizione abbia colto casualmente nel segno perchè si accordi piena e costante credenza all' Autor de' pronostici, sia questo una zotica mente o un dotto discepolo di Toaldo, e senza risguardare nè all' arbitrario fondamento de' pronostici stessi nè alla realtà dell' esito il più delle volte ad essi diametralmente opposto. Se però evvi soggetto d' investigazioni, cui bene s' approprj il *coelum ipsum petimus stultitia*, egli è questo l' arte vana di presagire il tempo. E le osservazioni di non pochi anni sopra la pioggia che abbiam recate e discusse ne porgono una chiara conferma. Da esse infatti non apparisce la minima dipendenza e regolarità de' parziali e successivi risultamenti ne' periodi o intervalli eguali, sia di mesi o di stagioni o di anni. Mancando un' ordine e una connessione qualunque fra cotali fenomeni, come argomentar dai passati i futuri in epoca e quantità? L' unica via di ragionarne in prevenzione e precorrerne l' avveramento dischiuderebbesi dal fatto ben comprovato di un valor medio, noto e costante in un dato luogo e per un periodo pur dato di tempo. Ma, come si disse, anche sopra questo medio, e nella formula o legge che lo esprima influiscon tali perturbazioni, e tali anomalie possono risultarne che, impossibili a valutarsi, ci toglieranno poi sempre al calcolo e alla previsione lo special avvenimento da pronosticarsi. Dunque è vana opera e tempo gettato l' occuparsi di simil argomento.

21. Altra cosa però è il presumere di legger senza fondamento nell' avvenire e precisarne gli eventi, altra il desumere

per semplice induzione dall'andamento e dalla misura de' fatti accaduti un qualche indizio di fisica probabilità per quelli che seguiranno. E in questo secondo modo i pronostici atmosferici possono ammettersi, esser talvolta utili, e non di rado avverarsi. Egli è così che fin dall' antichità si studiarono e si riconobbero i naturali contrassegni forieri dei prossimi cangiamenti del tempo, avvantaggiandone dell' avviso l' agricoltura il commercio e la navigazione, e ne pervennero fino a noi nelle opere di Arato e di altri le indicazioni e regole dello spirare di certi venti, del notturno più irrequieto scintillamento delle stelle e somiglianti, come annunzj e minaccie di burrasche atmosferiche imminenti; ed è pure allo stesso modo e per osservata più comune succession di fenomeni che formularonsi da lunga pezza, e godono popolar grido anche oggidì i così detti proverbj della stagione, de' quali abbiam veduto adempiersi non ha guari, e perciò vieppiù accreditarsi nella volgar opinione quello di S. Bibiana. Cotali regole e sentenze nondimeno sono da ritenersi con grande riserva di dubbio, come soggette a fallir non di rado e non abbastanza dimostrate, nè sicure nè generali, e l' accettarle o il seguirle ciecamente guiderebbe spesso all' errore e all' inganno. Anche dai nostri quadri della osservazion della pioggia emergono alcune particolarità relative che sembran ripetersi o riprodursi costantemente; ad esempio quella di uno stesso mese, abbondantissimo di pioggia in un dato anno, e scarso di essa nell' anno seguente. Ma chi ne traesse una regola immanchevole di pronostico da un anno all' altro, esporrebbesi al rischio di vaticinar falsamente, e di cader nell' eccezione. Il Giugno infatti, che nel 1850 recavaci molta pioggia, non ce ne addusse che poca nell' ora caduto 1851: mentre per converso l' Ottobre di quest' ultimo anno è stato quì assai piovoso, avvegnacchè un poco meno dell' Ottobre piovosissimo del 1850. Dunque massima savia e prudente diffidar di qualunque regola proverbiale e anche spesso avverata circa il bel tempo o il cattivo, distinguendo per altro che i pronostici dei vicini cambiamenti atmosferici, ove siano dedotti

da conosciute cagioni fisiche, sono da apprezzarsi e da consultar all' uopo utilmente.

22. Nei pronostici delle prossime variazioni atmosferiche, in riguardo specialmente alla pioggia di cui trattiamo, è da considerar innanzi tutto la disposizion topografica del paese fra i non larghi confini del suo orizzonte sensibile, e per circostanze di monti, di fiumi, di valli e di coltivate pianure che lo attorniano o lo dividono. Imperocchè le parziali e più cangianti meteore acquose, a cui siffatti presagi si riferiscono, hanno una dipendenza o modificazione dalle dette circostanze locali, e ne ricevono fisica spiegazione adeguata. Pertanto l' orizzonte nostro è terminato per tutta la linea da Sud-Est a Ovest alla corona de' colli e monti in cui si digradano al versante Nord gli Apennini centrali che la sormontano in vista quà e là colle più elevate lor cime. Dall' Ovest al Nord-Ovest distendesi a perdita d' occhio la pianura lombarda, al cui limite soltanto ne' giorni freddi e di aria più limpida si può discernere alcuna cima nevosa delle Alpi elvetiche, le quali prolungandosi nella catena delle Cozzie ci permetton di vederne, come più vicina la loro base meridionale, e al Nord per noi, nei monti bresciani e veronesi, e terminandone la linea al Nord-Est ne' colli euganei. Fra quest' ultimo punto e quello di Sud-Est l' orizzonte ci rimane aperto in direzione all'Adriatico; ed è quindi chiaro che spirando i venti da questo lato, sospingono e ci riversan sopra i vapori del detto mare insieme a quelli delle valli Comacchiesi, delle lagune venete, e dei paduli di Adige e Po nell' inferior loro alveo da tramontana verso levante. All' opposto dal lato di mezzodì, e fra il Sud-Est e l' Ovest, oltre all' esser la pianura in pendio e di un rapido scorrimento d' acque, i vapori del Mediterraneo trasportati dai venti urtano, e durante il verno a travalicar non arrivano la barriera dell' Apennino, e i venti stessi allora per noi ad altro non riescono che a respinger le nubi e nebbie ammassate e addotte da venti contrarj, e valgono essi quindi a rasserenare il Cielo. Ma nelle stagioni estiva ed autunnale, colla rarefazion

maggiore dei vapori del Mediterraneo, questi dai venti d' austro posson esserci copiosamente recati, e per abbassamento di temperatura allo scontro delle correnti aeree boreali convertirsi e sciogliersi in molta pioggia sulle nostre terre. Io fui spettatore un giorno di un cotal giuoco e tenzone singolare dei venti e delle nubi, traversando io l' Apennino fra l' estate e l' autunno, ed altrove ne descrissi le circostanze. Un somigliante fenomeno avviene spesso di osservare a chi viaggia d' estate nelle alte montagne, di vedere cioè grosse nuvole, calate durante la notte in profondi valloni, rialzarsene al calor diurno e, percosse dal Sole, frangersi e inerpicarsi lungo i dossi e le balze alpestri, fissarsi e avvolgere per alcun tempo le agghiacciate sommità, come al piano si fissano diuturne le nebbie nell' inverno, e smosse di colassù e aggirate dal vento scenderne di nuovo, scorrere d' una in altra gola, e in pioggia distemperarsi insino alle falde montuose e talvolta oltre nella aperta pianura. Di che io medesimo ebbi pure una prova oculare nel rivalicare che feci, il 19 Settembre del 1850, il Sempione, avendone cominciato la salita da Briga colla nebbia, proseguitala a nubi spezzate e Sole cocente, raggiunto il vertice dell' Ospizio colla pioggia, che mi accompagnò al pomeriggio nella discesa e il mattino seguente nella fertil valle dell' Ossola sino a Baveno, dove lunghesso la ridente spiaggia del Verbano mi allietai di rivedere in tutta la sua purezza il nostro bel Cielo italico.

23. Quanto influiscano le condizioni topografiche nei varj accidenti della pioggia basterebbe a provarlo che anche la semplice linea del corso di un fiume o torrente è valevole a differenziar notevolmente le quantità particolari delle meteore acquose dall' una all' altra riva di quello. E non è maraviglia che ciò avvenga; poichè l' apertura del fiume fra' monti da cui discende, e il moto delle sue acque per le campagne del piano che attraversa, determinano lunghesso il suo alveo una corrente di aria di speciale temperatura in riguardo all' aria che ristagna sopra l' interno suolo delle rive. Al sopraggiungere

perciò dall' una o dall' altra plaga dell' orizzonte il temporal estivo, e incontrandosene le nubi sotto un cert' angolo colla detta corrente atmosferica sopra il fiume, per effetto dinamico o di temperatura deve naturalmente succederne un cangiamento nel prodotto della pioggia di quà e di là dal fiume stesso. Così vediamo spesso per esempio ai caldi giorni piovere abbondantemente sui terreni della destra riva di Secchia, o di Panaro, e quasi nulla su quelli della sinistra, o viceversa; e per la Secchia in particolare la diversità del fenomeno mi sembra pure più frequente e spiegabile per lo spaccato larghissimo del fiume fra i colli di Castellarano e Sassuolo sin presso al lungo ponte di Rubiera. Però se le nubi temporalesche siano sospinte con impeto e violenza di turbine, la detta linea e apertura di un fiume poco vale a trattenerle, e soltanto la propria temperatura della corrente aerea sul fiume stesso e dalle nuvole attraversata può variare di queste le condizioni elettriche, e influire nella disastrosa produzion della grandine, che se ne scarica e piomba per tratti irregolari e discontinui, a cagione appunto delle diverse condizioni meteoriche sopra le terre variamente coltivate, apriche o selvose, e in relazione allo stato elettrico delle nubi. Che infine sopra la quantità particolare della pioggia momentanea, o di un mese, o di una stagione possano influire altresì le differenze di coltivazione e di vegetazion dei terreni ne abbiam ogni anno per avventura un indizio all' epoca della segatura del primo fieno. Perocchè in sul finire di Maggio la molta estensione superficiale in praterie, dall' essere innanzi tutta rivestita di tenera e folta erba passando in breve ad esserne tutta rasa e nuda, pare che debba modificarne in grande sul nostro suolo le relazioni atmosferiche di umidità e temperatura, dalle quali dipendono le pioggie parziali, e osservasi di fatto che queste allora cadono in copia fra noi al punto di renderne spesso incerto, e perduto col mancato disseccamento, un sì prezioso prodotto qual è il fieno maggiatico. E il simile avviene ai monti per taglio e atterramento di grandi selve che vegetando

annualmente vivaci e rigogliose determinavano innanzi un costante rapporto meteorico locale che poi viene a cessare con esse o a cangiarsi considerabilmente.

24. Un pronostico di vicina pioggia, e d' immanchevole avveramento per noi, egli è quello del Sole che al suo tramonto immergesi e ci dispare in un denso strato di nubi, dicendosi volgarmente che queste l' insaccano. Il dì seguente o poco appresso la pioggia è in terra. Ciò avvien pure dipendentemente dalle sovraindicate nostre condizioni topografiche. Sospesi in alto gli ammassi del vapor acqueo vescicolare, che sono le nubi fornite dall' Adriatico e dall' umida nostra plaga fra Borea e Oriente, e poscia cacciati da un vento di essa plaga verso l' opposta e, occidentale, ivi e per la regione atmosferica meno calda e per la notte che sopraggiunge raffreddansi, e ribalzati da un contrario vento alla barriera dell' Alpi che li sormonta, essi debbon retrocederne abbassati e distillandosi in pioggia. Non avvien altrettanto, almeno costantemente, per le nubi all' ora del tramonto nella plaga di Nord-Est e che di là ricacciate durante la notte ci recan tutt' al più nel seguente mattino la nebbia di cui faremo in breve alcun cenno. E le nuvole adunate il mattino al Nord-Ovest, se ne vengano spinte dal vento di quella plaga, ordinariamente nelle stagioni calde e temperate ci passan sopra nel giorno senza disciogliersi in pioggia, e poco stante il Cielo se ne rasserena; sì che a ragione quel venticello di sera è considerato a preludio del buon tempo. Ma durante il verno se la massa più forte delle nubi vien soffiata continuo dal Nord-Est e cangisi, anche di giorno, il vento in contrario, partendosi quest' ultimo dalle regioni agghiacciate dell' Alpi ne abbiamo le nevicate più dirotte e prolungate, siccome quella che ricordammo (num. 7.) del Gennajo 1842. Di tutte queste e di somiglianti meteore acquose la ragion fisica nelle date circostanze locali è manifesta e ripetiamo che posson quelle pronosticarsi, ma soltanto nella prossima loro apparizione e con prudente riserva per una rara eccezionalità che derivi da cagioni straordinarie

e imprevedibili comecchè naturali. Presagiscono di siffatta guisa con qualche sicurezza di esito i cangiamenti del tempo l' esperto piloto sul mare e il vigil colono sui campi, attenti entrambi ai contrassegni che ne danno specialmente le stelle col vario loro splendore, e quantunque ignari delle fisiche leggi e dipendenze di tai fenomeni. Il buon senso e la semplice osservazione suppliscono in essi alla scienza, e tuttavia prenunziano il vero seguendone quel lume che *naturae judicia confirmat.* Ogni altra presunzione di antivenire e annunziar da lunge le meteore non è che ridevol franchezza da cerretani.

25. La nebbia è una bassa nuvola come la nuvola un'alta nebbia. E come nella fredda stagione le nuvole discendon e si fissan lungamente ai piani che, veduti dai monti, rassembrano a un mar di nebbia, così ai caldi giorni le nebbie ascendono e appajon dai piani fissarsi e incoronare le cime dei monti; perlocchè il Giove d' Omero calatosi alla vetta dell' Ida o dell' Olimpo vi si avvolge fra' nembi, ed è chiamato il Tonante e adunator delle nubi, come, pel tridente, Nettuno lo scuotitor della terra. Suol anche dirsi che le nuvole estive hanno una specie d' attrazione per le montagne; ma non l' hanno meno le nebbie invernali per le pianure, e tutte poi cotali apparenze e poetiche immagini non sono che fisici effetti delle temperature atmosferiche sopra il vapor acqueo vagante per l' aria e condensatovi o rarefatto (1). Frattanto abbiamo circa la nebbia

(1) Può muoversi una obbiezione. Le nebbie d' autunno, che finiscono in pioggie distemperate, avvengono con un tempo caldo e siroccale; mentre quelle al principio dell' inverno presso di noi ci fanno sentire d' ordinario il maggior freddo, e sovente cuoprono il piano e la valle per alcuni giorni di seguito fitte e senza disciogliersi in pioggia; sì che umide le prime, e le seconde quasi potrebbero dirsi nebbie asciutte. Dunque, si obbietterà, la nube non convertesi in pioggia per raffreddamento, e non si dissipa o svapora per un riscaldamento; ma succede il contrario.

Avvertasi però che le voci di caldo e freddo, come pure le indicazioni del termometro, sono espressioni di cose relative. La sensazione di freddo e l' abbassamento del termometro sotto una nebbia del Decembre significano una sottrazion di calorico ai corpi circondati o involti dalla nube, la quale perciò, anzichè raffreddarsi, ne vien

un comune fenomeno, curioso a spiegarsi, quanto quello della rugiada di cui tanto si è detto e combattuto, e che offre un sicuro pronostico di pioggia vicina. Esso è per noi quello della nebbia mattutina e autunnale, che risolvesi e si dissipa nel primo giorno, si addensa nel secondo, e al terzo cade in pioggia copiosa e continuata da un cielo fosco e uniforme. Si ha quasi certezza che non pioverà il primo giorno dal vedere a mattino avanzato comparir in gran numero e assai distinti i ragnateli delle siepi e rive erbose che si rendon così visibili, giusta l' osservazion fattane sino dal Galileo, per le goccioline acquose in essi deposte dalla nebbia, le quali nel secondo giorno sono meno abbondanti sì che veggonsi pur meno i ragnateli che, per cessazione di quelle, discompajon affatto nel terzo. A concepire e spiegare fisicamente come avvenga la cosa io ragionerei di questa guisa. Nel primo giorno calata la nuvola o nebbia durante la notte o all' albeggiar del mattino, essa in totalità non contiene per avventura tanto vapor vescicolare, e non costituisce uno strato di tale altezza e densità che, surto il Sole e percuotendola ognor più vivamente colla forza calorifica de' suoi raggi, le parti superiori di essa non abbian a rarefarsene ad elevarsi e disperdersi negl' interstizj atmosferici delle alte regioni. In questa rarefazione degli strati superiori della nebbia gli strati inferiori e più bassi, anzichè subir essi pure un aumento simultaneo e proporzionato di temperatura, ne subiscono all' opposto una diminuzione per la legge osservata ne' corpi che passano dall' uno all' altro stato di aggregazion molecolare. Quindi lo strato nebbioso infimo e ade-

---

riscaldata; e per opposto la sensazione di caldo e l' innalzamento del termometro per aria siroccale frammezzo la densa nebbia dell' Ottobre denotano che questa o la nube cede ai corpi che avvolge parte del suo calorico, ond' essa propriamente raffreddasi e si dispone quindi a convertirsi in pioggia. Ecco perchè alla nebbia segue la pioggia nell' autunno e manca nell' inverno. In realtà la nube, che dalle sensazioni giudichiam calda, è fredda; e quella, che similmente crediam fredda, è calda. Contuttociò anche dalle prolungate nebbie invernali raccogliesi ne' pluviometri l' umidità che se ne depone continuamente, sebbene in piccola quantità di acqua liquida.

rente al suolo raffreddandosi ne vengon formate le goccioline liquide che infilate spesse e pendule dai sottilissimi e incrociati fili dei ragni campestri ne mostran distintamente la tela. Ma proseguendo intanto la rarefazion o evaporazione al limite superiore la nube se ne assottiglia successivamente coll' ascender del Sole e finisce col dileguarsene interamente al modo che osserviamo. Avviene in tal caso, mi sembra, il contrario di quanto ammetton i seguaci dell' ipotesi di Wells per la formazion della rugiada, ed è che in questa la cagione del raffreddamento dell' imo vapore convertitone in acqua proviene dal calorico raggiante del terreno sottoposto, laddove nella nebbia liquefatta la cagione e l' effetto analogo sono prodotti dal riscaldamento solare e dalla conseguente rarefazione e dispersione dei superiori strati della nebbia stessa e perciò accadono dall' alto al basso. In appresso e col sopraggiunger della notte i sollevati vapori di nuovo son condensati, discendono, e ne diviene, per altra copia recata dai venti, più alta o più compatta la nebbia del secondo giorno, sicchè la rarefazion degli strati superiori e il raffreddamento degl' inferiori dev' esserne minore di quella del giorno innanzi, meno appariscenti perciò ancora i ragnateli; e tuttavia nel tardo mattino la bassa nube dai raggi solari investita s' innalza e dilegua. Ma ripetutosi al terzo giorno il fenomeno alterno e vieppiù aumentata la massa della nebbia, essa perviene bensì a sollevarsi, ma senza che valga il Sole a dissiparla, e distendesi in un ampio e fitto strato che copre il cielo e che, raffreddatosi in alto, vi si distempera per lunghe ore in pioggia. Un simil procedimento di nubi, che dai più lievi cirri o nebbiette sparse nell' aria serena, poco a poco si congiungono, si addensano, si allargano sopra tutto l' orizzonte e versan infine gran pioggia, non è raro ad osservarsi. Checchè ne sia delle cagioni io non saprei diversamente rappresentarmele. Ora dai fenomeni speciali della pioggia ritorniamo alle considerazioni dei generali nelle quantità medie osservate della medesima.

§. V.

MEDJ ANNUI COMPARATIVI DELLA PIOGGIA PER LUOGHI DIVERSI.

26. Se le quantità misurate della pioggia in uno stesso luogo e caduta in periodi più o meno lunghi di tempo somministran materia d' importanti e curiose ricerche intorno alle più regolari cagioni delle meteore acquose, non può esser men utile allo scopo medesimo l' istituire i confronti delle dette quantità diligentemente raccolte negli stessi intervalli di tempo, ma in luoghi terrestri differenti e più o meno fra loro distanti. Però nè anche in questa seconda maniera, come nella prima, di prendere ad esame i fenomeni della pioggia sarebbe da sperarne e conseguirne alcun fondato discoprimento di fisiche leggi, ove i confronti si restringessero alle semplici quantità osservate di ciascun fenomeno; da poi che riscontrandosi enormi e irregolarissime differenze, dovute a cagioni locali e variabili, nelle osservazioni singole di questa specie, per luoghi eziandio non molto lontani fra loro, non saprebbesi di certo ravvisarvi alcun ordine e riconoscervi un costante procedimento della natura. Egli è d' uopo a questo fine istituire i confronti pei dati luoghi fra le quantità medie della pioggia in un tempo abbastanza lungo e opportunamente prescelto, qual è appunto il periodo di ventun' anni delle mie osservazioni, che ha il pregio, se non dimostrato, sorretto almeno da ragionevoli congetture, della regolare influenza ed azione meteorica luni-solare. Per questo periodo paragoniam dunque i medj annui della pioggia in Modena con quelli che simultaneamente si ebbero a Roma da una parte e a Milano dall' altra, congiungendone così a tale rispetto tre punti d' Italia nel senso longitudinale di essa o prossimamente del meridiano, e di sito e condizioni topografiche non poco differenti.

27. In riguardo alle osservazioni di Roma farò uso di quelle riportate nell' effemeridi del Tevere, compilate dal ch. Signor

Cavalieri San Bertolo (Annali di scienze matematiche e fisiche, T. I. Roma 1850) in continuazione all'opera dello stesso titolo pubblicata sino al 1844 dall' illustre Venturoli, e protratte a tutto il 1849. Sebbene le quantità ivi recate della pioggia siano le medie delle osservate alla Specola del Collegio Romano e a quella di Perugia per estenderle a due punti diversi del bacino del Tevere, tuttavia possono prendersi come osservate da un luogo solo, attesa la piccola differenza che ivi pure apparisce nelle pioggie annue corrispondenti da uno di essi punti all' altro. Mi ha poi somministrata la pioggia dell' ultimo anno 1850 la XV.ª delle tavole meteorologiche pubblicata con altra Memoria (pag. 100) dal ch. P. Angelo Secchi Direttore dell' Osservatorio presso l' Università Gregoriana. E quanto alle osservazioni milanesi della pioggia immediatamente fatte in quella I. R. Specola di Brera esse mi sono state gentilmente comunicate dall' ill. Cav. Carlini, parte pubblicate nei *Riassunti mensili ed annui delle Osservazioni meteorologiche di Milano dal* 1763 *al* 1840, parte trascritte dai registri originali, e inserite per gli ultimi tre anni nel Giornale dell' I. R. Istituto lombardo delle scienze. Soltanto io le ho tradotte, per l' uniformità colle altre, in misura metrica dalla primitiva loro espressione in linee del piede di Parigi. Ecco, ciò dichiarato, il prospetto dei confronti.

Anni	Altezza della pioggia caduta			Differenze annue	
	a Roma	a Milano	a Modena	Milano-Roma	Milano-Modena
	millim.	millim.	millim.	millim.	millim.
1830	711,2	874,8	740,0	+ 163,6	+ 134,8
1	700,3	909,3	586,4	209,0	322,9
2	616,8	1032,5	604,9	415,7	+ 427,6
3	799,6	1029,6	1109,8	230,0	— 80,2
4	381,6	804,2	299,8	422,6	+ 504,4
5	890,1	941,1	814,6	51,0	126,5
6	785,6	996,6	614,1	211,0	382,5
7	749,7	1160,2	576,4	410,5	583,8
8	927,2	1296,4	801,5	369,2	494,9
9	914,8	1347,9	1176,3	433,1	171,6
1840	543,1	898,7	548,7	355,6	350,0
1	771,9	969,1	658,2	197,2	310,9
2	786,5	1359,1	860,3	572,6	498,8
3	651,5	1179,6	636,9	528,1	542,7
4	849,6	1147,8	825,1	298,2	322,7
5	1014,7	1355,3	915,8	340,6	439,5
6	935,6	1337,5	898,0	401,9	439,5
7	766,9	917,2	657,2	150,3	260,0
8	665,4	1770,8	652,1	1105,4	1118,7
9	544,8	977,0	650,7	432,2	326,3
1850	746,0	1272,7	1010,2	+ 526,7	+ 262,5
Medie	750,14	1122,73	744,62	+ 372,59	+ 378,11

Rileviamo di quì:

1.° Che l'anno 1834 riuscì della minima pioggia sì a Roma e a Modena che a Milano, differendone l'annua quantità di essa non molto fra i primi due luoghi e moltissimo col terzo.

2.° Che l'anno 1839 della massima pioggia in Modena fu pure dei maggiormente piovosi a Milano e a Roma; essendolo però stato di più a Roma il 1845, ed eccessivamente a Milano il 1848.

3.° Che le differenze parziali dell'annua pioggia, durante l'intero periodo dei 21 anni, fra Modena e Roma sono state bensì varie, ma non grandissime, e ora in più ora in meno; laddove a Milano tale quantità è risultata sempre in eccesso relativo, tranne l'anno 1833 in cui a Modena si ebbe alquanto più di pioggia che a Milano, e il 1835 in cui la pioggia fu pressochè uguale a Milano e a Roma: ma questi ultimi due casi eccezionali debbono essere assai rari.

4.° Che nel medio risultamento dei 21 anni Roma e Modena si accordano quasi perfettamente; mentre l'annuo medio simultaneo di Milano cresce circa di $\frac{1}{3}$ sopra il comune degli altri due luoghi. In totalità l'altezza della pioggia caduta nei 21 anni a Milano superò di otto metri quella di Modena o di Roma; chè invero è differenza rilevantissima. E notiamo infine che il medio annuo della pioggia di Milano è risultato un poco meno del massimo di Modena, e un poco più del massimo di Roma.

28. Riportiamo i medj anche dei triennj e de' novennj, ad avvicinar maggiormente le pioggie comparative dei tre luoghi:

Triennj	Medj della pioggia			Differenze	
	a Roma	a Milano	a Modena	Milano-Roma	Mil.-Modena
	millim.	millim.	millim.	millim.	millim.
1.°	676,1	938,9	643,8	+ 262,8	+ 295,1
2.	690,4	925,0	741,4	234,6	183,6
3.	820,8	1151,1	664,0	330,3	487,1
4.	743,3	1071,9	794,4	328,6	277,5
5.	762,5	1228,8	774,1	466,3	454,7
6.	905,7	1203,2	823,7	297,6	379,6
7.	652,1	1340,2	771,0	688,1	569,2
Novennj					
1.	729,1	1005,0	683,1	275,9	321,9
2.	803,8	1168,0	797,4	+ 364,2	+ 370,6

Si vede già che le differenze, largamente ancora oscillanti nei medj triennali, tendono in quelli de' novennj ad accordarsi fra loro e colla media totale, ossia dei 21 anni, che è circa di 375 millimetri. Quindi forse dai confronti dei medj della pioggia di tre consecutivi periodi, ciascuno di 21 anni, ossia di sette novennj, emergerebbe la differenza, se non costante, almeno variabile fra stretti limiti. Mi sembra poi che de' precedenti medj quelli di Modena offrano un andamento meno a salti e irregolarità che negli altri due luoghi, forse in grazia dell' orizzonte nostro più spazioso piano ed aperto.

29. Ora consideriamo la situazione di Modena esser per latitudine boreale intermedia fra Milano e Roma, con una distanza rispetto a Roma tre volte più grande che rispetto a Milano. Eppure abbiam veduto che i medj annui della pioggia concordano quasi esattamente per Roma e Modena, mentre quello di Milano li sopravanza di un terzo. Dunque non sussiste sempre la regola da taluni asserita (Scinà. Elem. di

Fisica particolare. T. II., n. 303, pag. 270. Palermo 1829) che la pioggia annuale, massima all' equatore, va dicrescendo colla latitudine, sebbene il numero de' giorni piovosi dell' anno cresca in senso inverso: e il fatto è ancora più contrario a Palermo dove l' annua pioggia risulta la metà incirca di quella di Milano con una differenza di latitudine, in meno per la prima, tanto maggiore. Se è vero che in alcune parti della superficie terrestre sotto l' ecclittica la pioggia copiosa e frequente giovi a refrigerarvi l' aria e il suolo infuocati, in corrispondenza pure della maggior evaporazione dei mari equatoriali, non è però men vero che in altre aduste regioni, come su le aride interminate sabbie del deserto, piove raro e quasi mai; sicchè non può darsi regola di pioggia per latitudine. E già le nubi sollevate in alto e trasportate dai venti vanno ad accumularsi e disciogliersi in acqua non si sa dove e come. Oltre a ciò è da riflettere che Milano e Modena giacciono entrambe nella stessa vasta pianura corsa e divisa dal Po, e dalla parte medesima degli Apennini, laddove Roma giace al versante opposto di tai monti; e nondimeno l' annua pioggia nel medio si ha differentissima da quì a Milano, mentr' essa è caduta in quantità eguale quì e a Roma. In vista di tale diversità è da modificare alquanto la conclusione che io traeva dal solo confronto dell' annuo medio della pioggia a Roma e a Modena (Annali di scienze matematiche e fisiche, T. II., pag. 310, coroll. 2°), e convien ora aggiugnere che nel medio comparativo e probabilmente costante dell'annua pioggia di due luoghi distruggonsi bensì o si compensano a vicenda le cagioni variabili e accidentali della pioggia di ciascun anno, ma potendo rimanervi l' effetto di una permanente cagione di locali differenze insieme con quello della cagione più generale e periodica, intraveduta poc' anzi e riposta nell' influenza luni-solare sull' atmosfera.

30. E qual sarà questa locale e stabil cagione che adduce a Milano l' annuo medio della pioggia maggiore di un terzo in confronto a quello di Modena? Io non saprei riconoscerla nelle copiose acque d' irrigazione che si diramano per mille canali e inaffiano ampie praterie e risaje del basso territorio lombardo.

Imperocchè sebbene da tale corso di acque e inondazione di terre debban generarsi nebbie, umidità d'aria, ed anche pioggie particolari, queste non posson affettarne di molto il medio annuo della pioggia, fenomeno assai più grande, nè cumularne in ventun' anni l' altezza rimarcata di 8 metri di pioggia sopraeccedente. Poi le nubi a tal cagione dovute non si scaricherebbero tutte e sempre nell' oltre Pò dove si formano, nè la linea del corso di questo maggior fiume d' Italia valendo a superarne l' impeto de' venti che le sospingano, esse varcandola in parte accrescerebbero eziandio le nostre pioggie. Neppur dai laghi, che numerosi, e qual più qual meno ampi di superficie, si estendon in vicinanza di Milano, si ha la ragion sufficiente della forte differenza nei medj comparati della pioggia, l' evaporazione di quelli non potendo somministrar tanta materia di nuvole, e queste non rimanendo così fisse al punto di lor formazione, da spiegarne la detta differenza. Ma la circostanza di sito che, a mio avviso, spiega principalmente l' avvertito fenomeno è la prossimità e posizion di Milano rispetto alle alte Alpi della Savoja, della Svizzera e del Tirolo. Dalle sommità perpetuamente nevose e agghiacciate di queste debbon originarsi nell' elevate regioni atmosferiche fredde correnti, le quali per le gole de' monti e l' apertura de' laghi, spirando e investendo, specialmente a' giorni estivi e autunnali, sopra il piano lombardo l' adunata massa delle nubi comincieranno quivi a distemperarle in pioggia, e procedendo poscia con esse verso il mezzodì dell' Italia e acquistandone gradatamente una temperatura più mite ne determineranno una quantità minore di pioggia relativamente al suolo milanese e ai luoghi della sinistra sponda del Po. Una simile variazione della quantità della pioggia non accade in riguardo alla catena degli Apennini che, meno alta delle Alpi e affatto sgombra di neve ai caldi mesi, non deve influir con forti cangiamenti di temperatura su le nubi che la travalicano, e dal versante orientale all' occidentale o viceversa. E questa mi sembra la ragione per cui l' annuo medio della pioggia si è trovato pressochè uguale sul bacino del Tevere e nella nostra pianura.

31. Altro fenomeno assai rimarchevole della pioggia di Milano è quello, menzionato al n. 19, del suo progressivo aumento. Ritenuto il periodo dei 21 anni come il più acconcio ad esaminare e confrontare gli annui medj corrispondenti della pioggia misurata, e la serie delle osservazioni milanesi risalendo non interrotta fino all' anno 1763, si hanno da questa quattro consecutivi periodi che porgono il detto medio, e cui giova perciò di mettere attenzione. Io ne trovo i seguenti valori:

	Medio annuo della pioggia millim.	*Differenze* millim.
Dal 1767 al 1787	895, 34	
		. . . . . + 63, 84
Dal 1788 al 1808	959, 18	
		. . . . . + 71, 96
Dal 1809 al 1829	1031, 14	
		. . . . . + 91, 59.
Dal 1830 al 1850	1122, 73	

Benchè minore di quello, che ottenne ed annunziava l' illustre Cesaris, cioè di millimetri 108 circa, l' aumento in genere però è confermato e reso indubitatamente manifesto. Esso inoltre sembra crescere col progredir de' periodi e del tempo; il che varrebbe ad ingerire alcun timore di serie minacce per l' avvenire. Tuttavia è da sperare che tale aumento o rendasi stazionario, o scemi, o volgasi anche in diminuzione; sì che il medio annuo della pioggia risulti costante da non molti periodi. Quanto alla sua cagione io inclinerei a riporla nei cangiamenti che avvengano di più o men largo e libero passaggio ai freddi venti delle Alpi, anzichè nelle introdotte novità di coltivazione e inaffiamento del piano. Certamente poi, se la nota feracità dei pingui pascoli e campi nella bassa Lombardia devesi in gran parte alla qualità copia e distribuzione delle acque irrigatrici, sarebbe a temerne il detrimento del *ne quid nimis*, ove le naturali pioggie ivi si aumentassero indefinitamente.

32. È stato detto al monte piovere più che al piano, e taluno disse (ignoro su quali precisi e molteplici confronti di osservazioni) il doppio, che mi sembra troppo. Qualora piacesse di accertar in proposito il fatto e il rapporto vero, e chiarirne altresì maggiormente le cagioni e circostanze della pioggia, sarebbe da consultarne la serie delle simultanee osservazioni,

che si praticano da parecchi anni a Ginevra e all' Ospizio del gran S. Bernardo, e riportate da qualche giornale scientifico. Ma le quantità di confronto dovranno sempre assumersi nei medj di un forte numero di singoli eventi di pioggia; poichè altrimenti si troverebbe troppo spesso che ora piove di più su l' alpestre vetta, ed ora di più in riva al Lemano.

33. Concludiamo. Il medio annuo della pioggia, ricavato da ventun' anni di osservazioni, sembra essere un fenomeno regolare, assolutamente per un dato luogo terrestre, o relativamente per luoghi diversi, e la sua importanza può meritare studio e indagini ulteriori. In quantità e per un dato luogo esso è l' effetto composto di quattro principali e costanti cagioni che lo producono o lo modificano; l' evaporazione dei mari che rinnovasi ogni anno in quantità, la diffusione dei vapori acquei nelle diverse regioni e altezze dell' atmosfera, l' azione luni-solare generatrice periodica di moti atmosferici che adunan o sciolgono o trasportan le nubi e per cangiamenti di temperatura ne favoriscon o impediscon la pioggia, e la condizion topografica del dato luogo terrestre che influisce complessivamente nella copia maggiore o minore della pioggia stessa. A tali cagioni può aggiungersi per ciascun luogo in particolare una speciale influenza di acque correnti, di vegetazione e di simili circostanze che nel medio annuo della pioggia rechi, ma in tenuissima quantità, un' alterazione qualunque. Rispetto infine alle singole meteore acquose nei vari tempi e luoghi, esse in parte derivan bensì dalle indicate cagioni più regolari, ma combinate con altre cagioni variabili e a così dir accidentali, non soggette a preciso calcolo e raziocinio, e che tuttavia sembran compensarsi e scomparire nel medio anzidetto.

Ci resterebbe a discutere ancora l'argomento della pioggia in ordine e congiuntamente alle osservazioni del barometro del termometro e dell'igrometro, non che dei venti e del numero de'giorni sereni o nuvolosi: quindi potremo nuovamente occuparcene dopo l'esame di queste ultime osservazioni che ci daranno materia di altro lavoro nel periodo meteorico dei 21 anni che imprendemmo a considerare e proporre eziandio alle altrui fisiche investigazioni.

SULL' AZIONE MAGNETIZZANTE
DELLE CORRENTI ELETTRICHE MOMENTANEE
MEMORIA X.
DELLA INDUZIONE LEIDO-MAGNETO-ELETTRICA

VALE A DIRE

DELLA CORRENTE CHE IL FERRO ECCITA NELL' ELICA CHE LO CIRCONDA MENTRE CIRCOLA ATTORNO AD ESSO UNA SCARICA ELETTRICA. EGLI È PRINCIPALMENTE DA SIFFATTA INDUZIONE CHE SEMBRA DERIVARE IL RINFORZO NELL' AZIONE MAGNETIZZANTE DELLA SCARICA ELETTRICA PRODOTTO DAL FERRO ATTORNO AL QUALE CIRCOLA LA SCARICA STESSA

DEL CAVALIERE

PROFESSORE STEFANO MARIANINI

SOCIO ATTUALE.

Ricevuta il dì 11 *Aprile* 1852.

I. Se, per aver veduto che il ferro, messo nell' elica aggiunta a quella del magnetometro, rinforza l' azione magnetizzante della scarica elettrica anche quando in esso ferro non avviene alterazione sensibile nello stato magnetico, ho giustamente sospettato, come si vide nella precedente Memoria, che egli potesse agire come semplice metallo, o conduttore elettrico di prima classe: non ne viene da ciò che quel ferro, nel rinforzare che fa la detta azione, operi unicamente come metallo. Imperocchè è troppo grande la differenza che si osserva tra il rinforzo cagionato da un ferro e quello prodotto da un altro metallo a parità di circostanze. Infatti di due tubi di eguali dimensioni l' uno d' argento e l' altro di ferro, messo il primo in un elica aggiunta a quella del magnetometro, non si ottenne, mediante la scarica d' una boccia di capacità 5 (1), e carica

(1) Il numero con cui indico la capacità della boccia esprime il rapporto della capacità stessa con quella d' un altra boccia, nella quale il vetro ha un millimetro di grossezza, e l' una e l' altra superficie armata è di un decimetro quadrato.

alla tensione di dieci gradi, se non la deviazione di gradi 27°. 30', la quale supera solo di due gradi e mezzo quella che si otteneva dalla scarica stessa quando non v'era metallo nella detta elica aggiunta. Ma sostituito al tubo d'argento quello di ferro, una scarica eguale alla precedente produsse la deviazione 33°. 30'.

Il ferro adunque nell'atto della scarica, oltre ad eccitare nell'elica che lo circonda quella corrente di induzione di second'ordine, dalla quale abbiamo veduto provenire un rinforzo all'azione magnetizzante, eccita un'altra forza che si aggiunge ad essa. Ed io credo essere questa una corrente di induzione che lo stesso ferro eccita nell'elica che lo circonda nel momento che viene magnetizzato dalla scarica elettrica.

Che un ferro nell'atto che viene fortemente magnetizzato produca una momentanea corrente in un'elica metallica che lo circonda, è noto; come è pur noto che un ferro fortemente magnetizzato introdotto in un'elica, o anche solo avvicinato ad essa, induce una corrente. Ma nel caso nostro le magnetiche forze che acquistano i ferri sono assai meschine, e tali che non se ne ottiene il menomo indizio al galvanometro quando essi vengono avvicinati o anco introdotti nelle eliche comunicanti col galvanometro stesso o col re-elettrometro. Convien dunque dire che il rinforzo prodotto dal ferro nell'azione magnetizzante della scarica che vi circola attorno sia per la massima parte dovuto ad una induzione che nel momento della scarica esso genera nell'elica che lo investe. Ella è questa un'induzione differente dalle fin qui considerate, e la distinguerò da quelle col chiamarla *induzione leido-magneto-elettrica*. Ed io mi propongo appunto di dimostrare nella prima e principale parte di questa Memoria che siffatta induzione ha luogo, per poi dimostrare nella seconda che da essa principalmente sembrano derivare i rinforzi nell'azione magnetizzante delle scariche elettriche, de'quali ho trattato nella Memoria ottava (1).

---

(1) Inserita, come la nona, nella Parte seconda del Tomo XXIV.

PARTE PRIMA

Delle correnti elettriche prodotte dalla induzione leido-magneto-elettrica.

II. I primi fatti che m' indussero a sospettare che il ferro, nell' atto che viene magnetizzato da una scarica elettrica, ecciti una corrente nell' elica che lo circonda, gli osservai esperimentando sulle induzioni leido-elettriche. Ecco alcune di siffatte sperienze.

1ª. Un' elica di fil di rame coperto di seta lunga un decimetro, di cinquanta avvolgimenti, e due centimetri di diametro fu messa in comunicazione coll' elica del re-elettrometro, ed entro quella prima ne posi un' altra. Scaricata quindi su questa una boccia di Leida di capacità 1, e carica alla tensione di dieci gradi dell' elettrometro del Volta a doppio quadrante, venne eccitata nell' elica esterna una corrente di induzione la quale deviò l' ago dello stromento di 14°.

Ma dopo aver messo nell' elica interna un fascio di cento fili di ferro dolce e ricotto lungo nove centimetri, replicata la scarica, l' ago deviò di gradi 22°. 30'.

2ª. Caricata la detta boccia a venti gradi, ed istituite le prove dell' esperienza precedente, se non vi era ferro nell' elica interna, l'effetto che conseguivasi era una deviazione di 34°. 30'.

E se vi era il suddetto fascio 51°.

3ª. Invece dell' elica esterna, ho messo questa volta la interna in comunicazione col re-elettrometro per far sì che l' elica attuante o inducente fosse l' esterna, e, scaricata la boccia sull' elica interna mentre non era ferro in essa, la deviazione fu 18°.

E messo nella detta elica interna il solito fascio 31°. 20'.

4.ª Facendo uso d' una boccia di capacità 5, e carica alla tensione di tre gradi, se non v' era ferro nell' elica interna, l' energia della corrente indotta era indicata da 4°.

E se vi era il solito ferro da 9°.

Quel fascio di fil di ferro adunque, introdotto nell' elica attuante o nell' attuata, rende più forte la corrente indotta dalla scarica elettrica. E da ciò io deduceva che quel ferro nell' atto che si magnetizza, eccita nell' elica chiusa che lo circonda, e che comunica collo stromento, un' altra corrente cospirante con quella prodotta nell' elica stessa dalla scarica elettrica.

III. Rimanevami per altro il dubbio che siccome quel fascio di fil di ferro era circondato anche dall' elica sulla quale scaricavasi la boccia, così quel ferro stesso, il quale, come sappiamo avvalora l' azione magnetizzante della scarica, ne avvalorasse ancora l' azione inducente, e da ciò nascesse l' aumento di forza nella corrente indotta. E che la cosa potesse essere così me ne accertai colla seguente sperienza.

Lasciate le cose disposte come ho detto sopra, unii ad un capo dell' elica esterna un capo d' un' altr' elica, e scaricava poi la boccia piccola colla tensione di dieci gradi ponendo un' armatura in comunicazione col capo libero dell' elica esterna suddetta, e l' altra col capo libero dell' elica aggiunta. Ed osservai che, se non v' era ferro in quest' ultima, la deviazione era 15°. 30'.

E se v' era in essa il solito fascio la deviazione era di 24°.

Si vede adunque che il ferro in un' elica aggiunta a quella su cui si scarica la boccia di Leida, accresce l' azione inducente della corrente della boccia stessa. Pertanto mentre questi risultati ci fanno conoscere una nuova analogia tra le azioni inducente e magnetizzante della scarica elettrica, dimostrano altresì che il maggiore effetto ottenuto nelle sperienze del paragrafo precedente quando nell' elica inducente o nella indotta v' era del ferro, provenir potrebbe o in tutto o in parte, dall' avvalorare che fa il ferro in quelle circostanze l' azione inducente della scarica elettrica.

IV. Per vedere adunque con chiarezza se veramente il ferro, nell' atto che viene magnetizzato dalla scarica elettrica, eccita una corrente nell' elica che lo circonda, ho messo un

fascio di cinquecento fili di ferro entro due eliche corte, ciascuna di dieci giri, ed in modo che una circondasse un' estremità del fascio suddetto, e l' altra circondasse l' estremità opposta. I capi di una li misi in comunicazione coi capi dell' elica del magnetometro, e l' altra era destinata a scaricare la boccia di Leida. Pertanto ho osservato che, scaricando su quest' ultima la solita boccia colla tensione di gradi dieci, il magnetometro rimaneva deviato di parecchi gradi.

Nè mi parve che questo risultato attribuir si potesse ad induzione leido-elettrica, vale a dire ad una corrente indotta nell' elica comunicante collo stromento dalla scarica circolante nell' altr' elica; imperocchè, tolto dalle due eliche il fascio di fili di ferro, e sostituito ad esso un fascio di fil di rame o altro metallo, o un tubo di vetro, e ripetuta la scarica, non avevasi verun indizio che nell' altr' elica si eccitasse corrente elettrica.

Egli è ben vero che se le due eliche sono tra loro vicine, non separate, per esempio, che da un centimetro o due di distanza, ha luogo un' induzione leido-elettrica, e questa nella circostanza dell' esperienza accennata, e quando non v' è il fascio di fil di ferro nelle due eliche, fa deviare di uno o due gradi il magnetometro. Potevasi perciò dubitare che l' effetto molto più notabile che si ottiene quando è il fascio di ferro nelle eliche provenisse dal rinforzo prodotto dal ferro nella azione inducente della scarica, e da quello prodotto dal ferro stesso nell' azione magnetizzante della corrente indotta. Perciò introdussi un corto fascio di fil di ferro nell' elica sulla quale avevasi a scaricare la boccia, ed un altro nell' altra; e mediante la solita scarica non otteneva che una deviazione di tre gradi e mezzo. Laddove introdotto in esse il fascio lungo ed in modo che riusciva in due de' suoi tratti ricoperto dalle due eliche, io otteneva, mediante la solita scarica, una deviazione di dodici gradi.

V. Ma l' esperimento che sgombrò ogni dubbiezza fu il seguente. Due eliche lunghe l' una e l' altra un decimetro, di

sedici millimetri di diametro e di cinquanta giri, erano avvolte al medesimo tubo di vetro e vicine l' una all' altra. Scaricata la solita boccia carica alla tensione di quindici gradi sopra una di esse, e mentre l' altra comunicava con un magnetometro, avevasi una magnetizzazione indicata da quattro, o al più da cinque gradi, e questa era prodotta dalla induzione leido-elettrica, cioè dalla corrente fatta nascere nell' elica comunicante collo stromento dalla scarica che invadeva l' elica vicina. Ma introdotto un fascio di fili di ferro lungo due decimetri nel tubo, e scaricata la boccia nell' elica libera, come precedentemente, la magnetizzazione non solo è stata più forte (portando una deviazione di quindici gradi), ma ancora contraria a quella prodotta dalla induzione leido-elettrica.

Ed ecco in questo fatto una prova convincente che questa induzione che diciamo *leido-magneto-elettrica* non è una induzione leido-elettrica rinforzata dal ferro contenuto nelle due eliche: ma è veramente una corrente eccitata dal ferro stesso nella spira metallica che vi sta attorno nell' atto che esso viene magnetizzato dalla scarica elettrica.

VI. Accertato così dell' esistenza dell' induzione leido-magneto-elettrica, mi accinsi a sperimentare intorno alla medesima per conoscere le circostanze più opportune a renderla più cospicua. E volli prima di tutto osservare se era o no indifferente che, le due eliche ricoprissero un tratto qualunque del ferro in esso contenuto.

Due eliche eguali, ciascuna di dieci giri, lunghe due centimetri furono messe attorno ad un fascio di dugento fili sottili di ferro lunghi un decimetro, ed in modo che ciascuna copriva un' estremità del detto fascio, ed erano perciò separate l' una dall' altra per un intervallo di sei centimetri. Uniti poscia i capi di una con quelli dell' elica del magnetometro, e scaricata sull' altra la boccia di capacità cinque carica alla tensione di 15 gradi, la corrente indotta nell' altr' elica fece deviar il magnetometro di 2°.

Avvicinate le due eliche in modo che distavano l' una dall' altra di centimetri 4,5 ed erano equidistanti dal punto di mezzo del fascio, l' induzione leido-magneto-elettrica cagionata da una scarica eguale alla precedente venne indicata dalla deviazione 3°. 30'.

Avvicinate le eliche al punto di mezzo del fascio di fili, in modo che non distavano più di tre millimetri l' una dall' altra, la scarica consueta produsse un' induzione indicata da 12°.

VII. Nell' esperienze fin qui descritte l' elica che riceveva la corrente indotta ricopriva i tratti del fascio di fil di ferro che acquistavano mediante la scarica la polarità boreale. Ho ripetute siffatte sperienze dopo di aver messo in comunicazione col magnetometro l' elica che si adattava alla parte del fascio la quale acquistava nell' atto della scarica la polarità australe, e la corrente leido-magneto-elettrica, che veniva indotta nell' elica, era diretta ancora allo stesso modo, poichè lo stromento deviava dalla stessa parte.

VIII. Una delle mentovate eliche fu applicata a ricoprire la parte mezzana del fascio di fil di ferro, e l' altra vicino ad essa. Uniti pertanto i capi di questa a quelli dell' elica del magnetometro, e scaricata la boccia colla tensione di quindici gradi sull' elica che involgeva la parte mezzana del fascio, la deviazione prodotta dalla induzione leido-magneto-elettrica fu di 9°.

Ma avendo messa l' elica che ricopriva la parte media in comunicazione col magnetometro, e fatta scorrere per l' altra una scarica eguale alla predetta, l' induzione leido-magneto-elettrica fu più forte; essa fece deviar l' ago di 17°.

Dopo di aver replicate più volte le due sperienze ora descritte, e sempre cogli stessi risultati, altre ne ho istituite caricando la boccia a dieci gradi di tensione. Ed allora, se l' elica che accoglieva la corrente indotta era la laterale, la deviazione era di gradi 7°. 15'. E quando la detta induzione era ricevuta dall'elica involgente il tratto medio del fascio, era di gradi 9°. 30'.

Si vede adunque che il ferro nell' atto che viene magnetizzato dalla scarica elettrica eccita una corrente di induzione

più forte attorno a se nel tratto medio; sebbene ivi la polarità che acquista sia poco o nulla appariscente.

IX. Quando per altro il ferro circondato dalle eliche è molto più lungo di esse, meno sensibile è la differenza che si osserva fra l'induzione eccitata nell'elica che circonda la parte mezzana, e quella eccitata nell'elica involgente un altro tratto del ferro stesso.

Avendo infatti sostituito al fascio delle sperienze descritte nel paragrafo precedente un fascio di 250 fili sottili di ferro lunghi vent' otto centimetri, e messa un' elica a ricoprire il tratto mezzano di esso fascio, e l'altra a rivestire il tratto vicino; se l' induzione veniva ricevuta dall' elica rivestente il tratto di mezzo, la deviazione era di 16°, e se era ricevuta dall' altra, era di gradi 15°. 30′.

In queste esperienze la boccia veniva caricata alla tensione di dodici gradi.

E qui noteremo che la differenza fra le due suddette correnti indotte è piccola anche quando le due eliche ricoprono altri due tratti qualunque tra loro vicini del fascio. Bene inteso che se le due eliche si pongono verso un' estremità, l' induzione è più debole.

Nelle circostanze dell' esperienza qui sopra descritta, se le due eliche erano ad un' estremità del fascio, fosse poi quella che acquistava la polarità boreale o quella che conseguiva l' australe, la corrente indotta era di gradi 11°,30′. Che se le due eliche stavano verso il mezzo del fascio, la deviazione era 15°. 30′.

Al fascio di fili di ferro suddetto ho sostituito un fascio di ottanta fili sottili d' acciajo lunghi centimetri 23, 5, pesanti fra tutti 69 grammi: ed allora era presso a poco indifferente per la corrente di induzione leido-magneto-elettrica, che le due spire vicine ricoprissero qualunque tratto di esso fascio.

X. Per ottenere effetti più cospicui da questa sorta di correnti volli provare ad avviarne al tempo stesso più d' una nel medesimo filo metallico. A tale oggetto ho collocato due eliche l' una accanto all' altra, fra loro parallele e congiunte

in modo che, scaricando su di esse la boccia di Leida, l' elettricità scorresse in entrambe nel medesimo senso. Altre due eliche eguali alle suddette, ciascuna avente i capi liberi, vennero poste di fronte alle prime due in modo che l' asse di ciascuna di queste era nel prolungamento dell' asse di quella che gli stava di fronte. Il filo girava nel medesimo senso anche in queste due, e li due capi che erano dalla stessa parte nell' una e nell' altra comunicavano con un capo del filo del re-elettrometro, e gli altri due capi delle dette eliche comunicavano coll' altro estremo del detto filo. Messo pertanto un fascio di fil di ferro in modo che fosse coperto in parte da una delle dette eliche, ed in parte da quella che gli stava di fronte, ho scaricata la boccia colla tensione di quindici gradi sull' elica che non comunicava collo stromento, ed ebbi un' induzione leido-magneto-elettrica indicata dalla deviazione di tre gradi.

Dopo di ciò misi un secondo fascio di fil di ferro nelle altre due eliche, e nel modo qui sopra descritto, ed allora con una scarica eguale alla precedente otteneva la deviazione di 7°.

Se questo secondo ferro collocavalo in modo che fosse circondato solamente dall' elica in cui scaricavasi la boccia, allora la deviazione superava di pochissimo quella che ottenevasi quando il detto secondo ferro non esisteva. Onde conchiudo che due correnti leido-magneto-elettriche si possono per così dire sommare insieme avviandole nel medesimo filo metallico. E così credo che se ne possano unire insieme tre, quattro e più. Io non ho per altro estesa maggiormente questa maniera di sperimentare, perchè mi è suggerito un modo più agevole di ottenere di siffatte correnti più forti, e che passo a descrivere.

XI. Io aveva veduto, come notai al §. VI, che la direzione della induzione leido-magneto-elettrica era la stessa, da qualunque parte si ritrovasse l' elica che la riceveva rispetto a quella sulla quale veniva scaricata la boccia; pensai perciò che si avrebbero induzioni più forti qualora l' elica che la riceveva si fosse trovata in mezzo ad altre due, sulle quali si fosse scaricata la boccia.

Ho adunque introdotto il fascio di fil di ferro che servì alle sperienze del §. V. in tre eliche da tre giri ciascuna, ed eguali alle già descritte: ho messi i capi di quella di mezzo in comunicazione con quelli dell' elica del re-elettrometro; ed ho uniti fra loro i due capi delle altre due vicini all' elica di mezzo; e gli altri due, che rimanevano liberi, servivano alle comunicazioni colle armature della boccia quando voleva scaricarla su di esse.

Eseguita pertanto la scarica della boccia di capacità 5 e colla tensione di 15 gradi, mentre gl' intervalli che dividevano le due eliche laterali da quella di mezzo non erano che di un centimetro, l' induzione leido-magneto-elettrica eccitata nella detta elica di mezzo fece deviare lo stromento di 20°. 30′.

E quando io invadeva colla detta scarica una sola elica laterale, l' induzione eccitata nella vicina non portava che la deviazione di gradi 12.

XII. Applicate le tre eliche al fascio di ottanta fili lungo centimetri 23, 5, di cui si parlò al §. VIII, ed esperimentando come si è detto nel precedente, si ottennero a circostanze pari induzioni leido-magneto-elettriche più forti che non quando esperimentavasi con due soltanto di dette eliche.

Si provò ad applicarle ora nel mezzo, ora verso le estremità di esso fascio: ma non si ebbero differenze sensibili negli effetti. La boccia carica alla tensione di dodici gradi produsse una corrente indotta, che deviava di 17 gradi il re-elettrometro, dovunque fossero collocate le tre eliche, purchè non variassero le distanze a cui si trovavano fra di loro.

XIII. Poteva dubitarsi se il maggior effetto ottenuto, esperimentando colle tre eliche al modo che abbiamo detto, provenisse dall' essere le due eliche, riceventi la scarica o l' induzione, collocate l' una da una parte e l' altra dall' altra della terza, o provenisse solamente dall' essere le due eliche unite in modo da formarne una sola, nulla importando poi che l' altra fosse fra esse, o accanto ad esse. Tornai pertanto ad esperimentare con due eliche, ma una di esse doppia dell' altra e

per numero di giri e per lunghezza, a fine di vedere se, anche in questa guisa, ottenevansi induzioni più forti.

Messe adunque siffatte eliche vicine fra loro a ricoprire un tratto del fascio di ottanta fili di acciajo, e scaricata la boccia di capacità 5 e alla tensione quindici su quella di dieci giri, la corrente eccitata nell' altra congiunta col re-elettrometro fece deviar l' ago di 18°. 30′.

Congiunta poi collo stromento l' elica di dieci giri, e scaricata la boccia, carica come sopra sull' elica di venti giri, il risultato medio di quattro esperimenti fu ancora la deviazione di 18°. 30′.

E lo stesso accadeva se, all' elica di venti giri, io sostituiva due eliche di dieci vicine tra loro e congiunte in guisa da formarne una sola.

Ma messa l' elica di dieci giri in mezzo ad altre due parimente di dieci giri, quando l' induzione era ricevuta da quella di mezzo, la deviazione fu (per medio risultato di tre sperimenti) 26°. 40′.

E quando l' induzione era ricevuta dalle altre due insieme unite, l' ago dello stromento deviò di 28°. 30′.

La differenza fra questi due ultimi risultati è poca cosa: ma è notabile il vantaggio che quest' ultima disposizione ha sulla precedente. Volli pertanto vedere se, quando si scarica la boccia sull' elica di mezzo, le due induzioni eccitate nelle laterali fossero indipendenti l' una dall' altra.

Ho messe perciò intorno al fascio di fil di ferro tre eliche, la prima delle quali comunicava con un re-elettrometro, e la terza con un altro: scaricai la boccia colla tensione 15 sopra la seconda che stava tra le altre due; e avvenne che, sì l' uno che l' altro istromento indicava, con deviazioni di circa quattordici gradi, che aveva luogo l' induzione leido-magneto-elettrica e nella prima e nella terza delle dette eliche.

E con successivi esperimenti ho pur veduto che, a parità di circostanze, le deviazioni ottenute in ciascun istromento erano eguali e quando una sola delle eliche indotte comunicava col

re-elettrometro, e quando comunicavano entrambe. Il che dimostra che la corrente eccitata da un tratto del ferro attorno a cui circola la scarica elettrica non turba la corrente che viene eccitata da un altro tratto.

XIV. Il fatto ora stabilito mi suggerì di collocare attorno allo stesso fascio di fili cinque delle solite eliche ed in modo che la prima, la terza e la quinta fossero unite in guisa da formarne una sola, e ne congiunsi li due capi estremi coll'elica del re-elettrometro. Parimente la seconda e la quarta le congiunsi in modo da formarne una sola, così che scaricando mediante i due capi liberi di queste la boccia, la scarica le invadesse successivamente entrambe. E fattone l'esperimento, si ottennero induzioni più forti che quelle ottenute con tre eliche a parità di scarica. Così aggiunte ancora altre due eliche, e fatta scorrere l'elettricità per la seconda, la quarta e la sesta, l'induzione eccitata nelle altre quattro unite in modo da formarne una sola congiunta collo stromento, le deviazioni ottenute indicavano che la corrente indotta era ancor più forte.

Veduto come coll'accrescere il numero delle eliche attorno ad un ferro o fascio di fili di ferro aumentasi la forza delle induzioni leido-magneto-elettriche, e come poco o nulla importasse che il ferro, mediante la scarica, spiegasse una più o men forte polarità magnetica, ho pensato di avvalorarle ancor più, mediante l'apparecchio che son per descrivere.

Una matassa di filo sottile di ferro, circolare, del diametro esterno di centimetri 13,3, e l'interno di 12,7, e nella quale il filo era ripiegato sopra se stesso 240 volte, e pesava grammi 55, la ho fatta circondare di undici eliche, ciascuna delle quali era avvolta ad un tubetto di cartone con dieci giri, e tutte nel medesimo senso. Queste coprivano all'intorno tutta la matassa, lasciando fra una qualunque di esse e le vicine un intervallo di qualche millimetro. La prima, la terza e tutte le altre in posto dispari erano unite in modo che potevasi far circolare successivamente in tutte quante la scarica della boccia di Leida. Allo stesso modo erano unite fra loro quelle dei

posti pari. Il capo libero della seconda fu congiunto con un capo dell' elica del re-elettrometro, ed il capo libero della decima coll' altro. Il capo libero poi della prima ponevasi in comunicazione con un' armatura della boccia di Leida, e il capo libero dell' undecima coll' altra ogni qual volta volevasi sperimentare l' induzione leido-magneto-elettrica con siffatto apparecchio.

Adoperando la solita boccia di capacità 5 e carica soltanto alla tensione di un grado si eccitò mediante il detto congegno una corrente indicata dalla deviazione re-elettrometrica 11°.

Caricata la boccia a due gradi la eccitò indicata da 26°.

E colla tensione di tre gradi la deviazione fu 60°.

XV. Volli poi vedere se la corrente leido-magneto-elettrica venisse rinforzata quando la scarica dalla quale è prodotta, circola attorno ad un' altr' elica contenente ferro.

Mi valsi a tal uopo dell' apparecchio di tre eliche, con cui vennero istituite le esperienze notate al §. X, ed aggiunsi all' elica di mezzo un' altr' elica lunga un decimetro e del diametro di sedici millimetri. E, scaricata su queste eliche la boccia solita carica a 13 gradi di tensione, la corrente leido-magneto-elettrica ottenuta produsse la deviazione 18°.

Ma replicata l' esperienza dopo di aver messo nell' elica aggiunta un fascio di 500 fili sottili di ferro ricotto, la corrente indotta fu più forte; essa fece deviar l' ago dello stromento di 26 gradi.

XVI. E se la corrente leido-magneto-elettrica stessa circolasse in un' altr' elica contenente ferro, sarebbe essa rinforzata? L' esperienza che son per descrivere dimostrò che in tal caso, non un rinforzo, ma un indebolimento ha luogo nella induzione leido-magneto-elettrica.

Tolta l' elica aggiunta a quella di mezzo nell' esperienza del paragrafo precedente, ed aggiunta alle due fra loro unite, e nelle quali nasce l' induzione leido-magneto-elettrica, scaricai la suddetta boccia con 15 gradi di tensione sull' elica di mezzo, e l' induzione ottenuta deviò l' ago di 25°.

E dopo di aver messo nell' elica aggiunta il fascio di 500 fili di ferro, replicata la scarica, la deviazione ottenuta dalla corrente indotta fu solo di 16°.

Distrutta la magnetizzazione nel ferro dello stromento, indi replicata la scarica, si ebbe la deviazione 16°. 30'.

Tolto il ferro dall' elica aggiunta, e poi rinnovata una scarica eguale alle due precedenti, la deviazione fu 25°.

Un' esperienza simile alla sovradescritta la ho istituita mediante l' apparecchio a matassa descritto al §. XIV. Ho aggiunta cioè un'elica lunga circa un decimetro al filo che parte dalla unione di cinque eliche per le quali passa la corrente indotta dalla magnetizzazione operata nel fascio di fil di ferro quando nelle altre sei eliche insieme unite si scarica la boccia. Ciò fatto scaricai la boccia colla tensione di dieci gradi sulle dette sei eliche, e l' induzione eccitata nelle altre era indicata da 180°, quando non era ferro nella detta elica aggiunta; e solo da 51° quando in essa era un fascio di 123 fili di ferro dolce.

Nelle sperienze descritte in questo paragrafo l' elica aggiunta a quella per la quale scorreva l' indotta era destra. Non dissimili dai sovraccennati furono i risultamenti delle esperienze istituite quando l' elica aggiunta era sinistra.

L' induzione leido-magneto-elettrica adunque viene indebolita quando essa è fatta circolare per un'elica entro la quale sia del ferro (1).

XVII. Tornerà opportuno in altra Memoria il far conoscere le circostanze influenti a rendere più o meno sensibile il sovraccennato indebolimento, e il dare maggiore estensione ad alcune precedenti proposizioni. Chiudo ora la prima parte di

---

(1) Anche quando si fa uso di due sole eliche, come nelle sperienze de' §§. V, VI, VII e VIII, se si aggiunge un' elica a quella per cui passa la scarica, e vi è del ferro in essa, l' induzione leido-magneto-elettrica è più forte. Ma se l' elica aggiunta si unisce a quella per cui passa la corrente indotta, questa è più debole quando nella detta elica aggiunta vi è del ferro.

Noterò pure che anco l' induzione leido-elettrica viene indebolita dal ferro che si trovi in un' elica, per la quale essa trascorre nel recarsi al re-elettrometro.

questa notando che può aversi anco un' induzione leido-magneto-elettrica di secondo ordine, cioè che può aversi una corrente elettrica eccitata dal ferro nell' atto che viene magnetizzato, non dalla scarica elettrica circolante attorno ad esso, ma dalla stessa corrente di induzione leido-magneto-elettrica, che vi gira attorno.

Ho messo tre delle solite eliche corte attorno ad un fascio di dugento fili sottili di ferro crudo. Le due laterali congiunte in modo da formarne una furono destinate a ricevere la scarica. Quella di mezzo destinata a ricevere la corrente indotta dalla magnetizzazione del ferro suddetto, fu messa coi suoi capi in comunicazione coi capi esteriori di altre due eliche, entro le quali stava un altro fascio di 200 fili di ferro crudo, ed erano fra loro congiunte, e fra l' una e l' altra era un' elica destinata a ricevere la corrente leido-magneto-elettrica di secondo ordine, e questa comunicava col re-elettrometro.

Così disposte le cose, la boccia solita carica alla tensione di 15 gradi, scaricata nelle eliche a ciò destinate produsse una corrente di induzione leido-magneto-elettrica di secondo ordine, la quale venne mostrata dallo stromento colla deviazione di tre gradi.

Ripetuta l' esperienza colla boccia carica a venti gradi, la induzione di secondo ordine fu indicata da una deviazione di quattro gradi, e talvolta da una di cinque.

Siffatte sperienze replicate più volte, e magnetizzando ora in un senso, ed ora in senso opposto, e variando ferri, e boccia di Leida, e carica, non lasciano dubbio che possano aversi correnti elettriche per induzione leido-magneto-elettrica di secondo ordine.

PARTE SECONDA

Il rinforzo nell' azione magnetizzante del ferro, che si osserva quando la scarica elettrica circola attorno ad altro ferro, sembra nascere principalmente dalla corrente leido-magneto-elettrica indotta dal ferro, nell' atto che si magnetizza, nell' elica che lo circonda.

XVIII. A dimostrare la qui enunciata proposizione basterà il far vedere che le circostanze nelle quali ha luogo il rinforzo dell' azione magnetizzante prodotto dal ferro attorno al quale circola l' elettricità, ha luogo altresì la induzione leido-magneto-elettrica; e che le circostanze che giovano a quel rinforzo, giovano pure a rendere più vigorosa siffatta induzione.

Già nella prima parte abbiamo veduto che l' induzione di cui si tratta ha luogo con iscariche eccitate da bocce leidensi di poca e di molta capacità, e caricate a forte ed a debole tensione: e sappiamo che il rinforzo nell' azione magnetizzante di cui si tratta ha pur luogo qualunque sia, entro i limiti delle nostre esperienze, la carica e la capacità della boccia.

Il rinforzo nell' azione magnetizzante ha pur luogo qualunque sia il ferro che si pone nell' elica aggiunta. Ed anco l' induzione leido-magneto-elettrica non richiede qualità speciali nel ferro che si pone nelle eliche.

Un cilindro lungo centimetri 8, 5 e pesante grammi 13, 6, messo nelle tre eliche descritte al §. XI, e scaricata su quella di mezzo la boccia solita colla tensione di quindici gradi, la corrente indotta nelle altre due fu tale che deviò il re-elettrometro di gradi 3°.

Fatta una eguale esperienza con un altro cilindro di ferro pesante grammi 7, 5, l' induzione ottenuta deviò lo stromento di gradi 2°.

E con un cilindro pesante grammi 69, 5 si ottennero gradi 9°.

Con un tubo di ferro pesante grammi 5 si ebbe 3°. 30'.

Messi nelle tre spire in vece di cilindri di ferro due fili d' acciajo temprato, in peso grammi 4, 6, la deviazione fu 2°.

Sette lamine di ferro lustre lunghe centimetri 8, 6, pesanti tra tutte grammi 37, produssero nelle suddette circostanze una induzione leido-magneto-elettrica, la quale deviò lo stromento di gradi 17°.

XIX. Anche quando nell' elica aggiunta si pone ferro il quale poco o nulla si alteri nello stato magnetico per la scarica elettrica, o si alteri al contrario del solito, il rinforzo nella azione magnetizzante non manca. Così non manca l' induzione leido-magneto-elettrica quando il ferro che si adopera per eccitarla è preparato o in guisa da non alterarsi per la corrente che vi si fa girare attorno, o in guisa che si alteri al contrario di quel che suole.

1ª. Il tubo portante le tre suddette eliche lo posi sovra un ago da bussola a guisa d' un' elica di re-elettrometro, e dentro di essa posi un fascio di dugento fili sottili di ferro dolce e ricotto. Scaricai ripetutamente la boccia colle tensioni 15, 18 e 20 gradi sull' elica di mezzo, e sempre nel medesimo senso, finchè l' ago sottoposto non dava più segno che avvenisse alcun aumento nella forza magnetica del fascio suddetto. Ed allora misi in comunicazione coll' elica del re-elettrometro le altre due eliche circondanti il ferro, e scaricai di nuovo la boccia colla tensione di 18 gradi sull' elica di mezzo: ed il risultato fu che l' ago del re-elettrometro deviò di sei gradi; mentre l' ago sottoposto alle tre eliche non diede indizio che il fascio in esse contenuto si fosse alterato nel magnetismo.

2ª. Ho tolto il ferro dall' elica dello stromento. Indi scaricai la boccia con dieci gradi di tensione sulla solita elica di mezzo, ed osservai, che l' ago sottoposto al fascio che veniva magnetizzato da quella scarica, dai gradi 49 di deviazione, a cui era stato portato antecedentemente, passò a segnare 50°. 30′. Allora ho rimesso nell' elica dello stromento il fascio di fil di ferro, e privo di magnetismo, indi scaricata la boccia colla tensione di 15 gradi, l' ago sottoposto al fascio inducente, da gradi

50°. 30′ dov' era, ritornò a 49°, e l' ago del re-elettrometro deviò di gradi 9°.

3ª. Di nuovo tolsi il fascio di fil di ferro dal re-elettrometro, e, scaricata la boccia colla tensione di dieci gradi sulla detta elica, l' ago sottoposto al fascio inducente si portò da 49 a 52 gradi. E rimesso il fascio spogliato di magnetismo nell' elica dello stromento, e poi scaricata sulla solita elica di mezzo, e nella consueta direzione, la boccia carica alla tensione di ventisette gradi, avvenne che il ferro, attorno a cui era stata scaricata la boccia, si smagnetizzò anche più che non fece nelle sperienze precedenti, poichè l' ago sottoposto ad esso dal grado 52° si portò al 46°, e quello del re-elettrometro deviò dalla solita parte, e di gradi 13°.

Dunque anche quando il ferro è preparato in modo che per una data scarica, o non si alteri sensibilmente nello stato magnetico, come nella prima delle descritte esperienze, o si alteri in senso contrario al consueto, come avvenne nelle altre due, l' induzione leido-magneto-elettrica ha luogo, e sempre nel medesimo senso (1).

XX. Il rinforzo nell' azione magnetizzante della scarica è più notabile se il ferro messo nell'elica aggiunta è di maggior massa; e tale aumento è più cospicuo se si adoprano fasci di fili. Egualmente comportasi l' induzione di cui parliamo: essa è più notabile se è prodotta da maggiore massa di ferro.

Nelle solite tre eliche ho messo un fascio di ottanta fili sottili di ferro, e la boccia con dieci gradi di tensione diede un' induzione leido-magneto-elettrica che deviò lo stromento di gradi 9°.

Aggiunsi al detto fascio altri 170 fili della stessa qualità, la deviazione fu, nelle stesse circostanze, di gradi 14°.

Ed aggiunti altri 80 fili la deviazione fu 22°. 30′.

---

(1) Bene inteso che quando l' alterazione in senso contrario nello stato magnetico del ferro avviene perchè la scarica è diretta all' opposto, anco l' induzione leido-magneto-elettrica riesce contraria.

Caricata la boccia a 16 gradi, cogli 80 fili si ebbe la deviazione . . . . 19°.

Con 250 . . . . 26°.

Con 330 . . . . 40°.

XXI. Se i fasci di ferro messi nell' elica aggiunta sono sempre d' egual lunghezza e peso, abbiamo veduto esservi più rinforzo nell' azione magnetizzante quando era più grande il numero de' fili formanti quella massa. E così pure si osserva che un fascio di fili di ferro produce un' induzione leido-magneto-elettrica più forte quando è più grande il numero de' fili formanti il fascio di quel dato peso. Ecco un esperimento.

Un cilindro lungo otto centimetri, e pesante 28 grammi, messo nelle tre eliche corte delle precedenti esperienze, scaricata la boccia suddetta colla tensione di quindici gradi si ebbe un' induzione, che deviò lo stromento di 5°.

Un fascio di quattro cilindri, pesanti tra tutti grammi 28 come il suddetto, boccia e tensione come sopra, la deviazione fu 8°.

Un fascio di 22 fili lunghi come i precedenti e del peso complessivo di grammi 28, nelle dette circostanze la deviazione fu 17°. 30'.

E con un fascio di 29 fili, nelle stesse circostanze produsse la deviazione di 24°.

XXII. Il rinforzo recato all'azione magnetizzante della scarica elettrica dal ferro messo nell' elica aggiunta è più notabile quando l' elica stessa è più ristretta, che non quando è più larga. Così anco l' induzione di cui parliamo è più forte se l' elica è più ristretta. Lo vidi con parecchie esperienze istituite con tre eliche solite, e confrontandone poi gli effetti con quelli prodotti da altre tre di minor luce.

XXIII. Avendo obbligata la scarica elettrica ad attraversare uno strato d' acqua che avvalorava la magnetizzazione, rimase avvalorata anche l' induzione leido-magneto-elettrica.

Coll' apparecchio delle tre eliche corte, la boccia carica alla tensione di quindici gradi, se la scarica non traversava uno

strato d' acqua rinforzante la magnetizzazione, generava una corrente di induzione leido-magneto-elettrica, la quale deviava il re-elettrometro di nove gradi; e quando la scarica stessa traversava un prisma d' acqua leggermente salata di tre centimetri quadrati di base e quattro di altezza, l' induzione leido-magneto-elettrica produsse una deviazione di quattordici gradi (1).

E risultati simili si ottennero caricando la boccia a dieci gradi e non a quindici, e ponendo nelle eliche invece di un fascio di 200 fili sottili di ferro, un fascio di parallelepipedi di ferro dolce e crudo lungo centimetri 8, 6, e pesanti tra tutti grammi 37.

Sappiamo pure che il ferro messo nell' elica aggiunta avvalora l'azione magnetizzante anche quando la scarica traversa uno strato d'acqua; abbiamo perciò anche in questo fatto una nuova analogia.

XXIV. Si sa che il ferro con magnetismo dissimulato rinforza, e presso a poco allo stesso grado che quello senza magnetismo, l' azione magnetizzante della scarica: e ciò tanto quando la scarica stessa tende a magnetizzare quel ferro nel senso in cui è più suscettibile, come quando tende a magnetizzarlo nel senso in cui lo è meno (2). Anco rispetto all' induzione in discorso sembra comportarsi allo stesso modo il ferro dotato di magnetismo dissimulato.

Un tubo di ferro del diametro di millimetri dodici, lungo sei centimetri, e pesante grammi 9, 5, messo, senza magnetismo dissimulato, nelle tre eliche, e scaricata su quella di mezzo la boccia colla tensione di dieci gradi, la deviazione prodotta nello stromento dalla magnetizzazione conseguita dal tubo fu di 27°. E la deviazione prodotta dalla induzione fu di 9°.

---

(1) Se il prisma d' acqua è fatto traversare dalla induzione leido-magneto-elettrica nelle circostanze dell' esperienza descritta, essa induzione non è nè maggiore, nè minore di quando non l' attraversa.

(2) Veggasi il §. XVII della citata Memoria VIII.

Magnetizzato quindi il detto tubo in modo che il magnetismo fosse dissimulato, indi rimesso nelle tre eliche, e scaricata la boccia (carica come sopra) in modo da polarizzare il detto tubo nel senso che ha minore suscettibilità, esso tubo deviò l' ago di 17°, e l' induzione prodotta venne indicata da una deviazione di 5°.

Replicata quest' ultima esperienza, ma dirigendo la scarica in modo da polarizzare il detto tubo nel senso nel quale aveva maggiore suscettibilità, esso tubo deviò l' ago di 35°, e l' induzione venne indicata da una deviazione di 4°. 30'.

XXV. Al paragrafo XIX della citata Memoria ottava feci osservare che anche il ferro collocato esteriormente all' elica aggiunta avvalora l' azione magnetizzante dell' elica che l' invade. Ora introdotte nel tubo di ferro che servì a quell' esperienza due eliche, una per parte, lunghe la metà del tubo stesso, e, messi i capi di una in comunicazione coll' elica di un magnetometro, e scaricata sull' altra la boccia carica a dodici gradi, si ottenne una corrente leido-magneto-elettrica indicata da una deviazione di circa quattro gradi.

XXVI. Dopo aver vedute tante analogie fra l' induzione leido-magneto-elettrica, e il rinforzo nell' azione magnetizzante della corrente leido-elettrica prodotto dal ferro attorno a cui si fa circolare la corrente stessa, io conchiudo essere al tutto probabile che quel rinforzo nasca appunto da una corrente che il ferro nell' atto che si magnetizza fa nascere nell' elica che lo circonda.

E se non riguardo come dimostrata questa proposizione, egli è perchè mi avvenne di osservare che talvolta il ferro messo nell' elica aggiunta, indebolisce invece di rinforzare l' azione magnetizzante della corrente leido-elettrica.

Nell' elica d' un magnetometro era un fascio di 123 fili di ferro crudi lunghi otto centimetri, e pesanti fra tutti ventisette grammi. A quest' elica erane aggiunta un' altra poco differente da essa. Pertanto colla scarica della solita boccia colla

tensione di dieci gradi, se non vi era ferro nell'elica aggiunta, la deviazione magnetometrica era di 34°.

Ma se nella detta elica aggiunta era un fascio di ottanta fili di ferro sottili e ricotti, la magnetizzazione che acquistava mediante la suddetta scarica quel fascio di centoventitrè fili di ferro, era meno forte; essa veniva indicata da una deviazione di 25°.

Ho trovato anche un fascio di fili sottili e crudi, i quali messi nell' elica aggiunta indebolivano l' effetto della scarica sul fascio de' 123 fili suddetto, e questo reciprocamente indeboliva la magnetizzazione dell' altro fascio.

È per altro da notarsi che l' uno e l' altro de' detti fasci di fili crudi aveva servito a molte sperienze: e forse quella disposizione di riuscire magnetizzati più debolmente nella circostanza in cui gli altri ferri si magnetizzano con più forza, proviene da un particolare stato magnetico conseguito per le molte magnetizzazioni alle quali erano stati assoggettati. Se mi verrà fatto di conoscere con esattezza le circostanze che danno origine a siffatta anomalia, tornerò su questo argomento.

Le proposizioni principali di questa Memoria sono:

1ª. Il ferro nell' atto che viene magnetizzato da una scarica elettrica eccita in un' elica metallica chiusa che lo circonda un' altra corrente cospirante con quella prodotta nell' elica stessa dalla scarica elettrica che vi si fa girare attorno. Essa può chiamarsi *corrente di induzione leido-magneto-elettrica.*

2ª. Se due eliche vicine avvolgono un fascio, ed una di esse è chiusa, magnetizzando il ferro collo scaricare la boccia sulla altr' elica, esso ferro induce nella prima una corrente. Nè questa può supporsi prodotta da induzione leido-elettrica rinforzata dal ferro contenuto nella spira, perchè talvolta è diretta al contrario di quella.

3ª. Più le due eliche sono vicine, e più la corrente di induzione leido-magneto-elettrica è forte.

4ª. Siffatta corrente è diretta nel medesimo senso e quando l' elica che la riceve ricopre la parte del ferro che acquista

la polarità boreale, e quando ricopre la parte che acquista l'australe, purchè la scarica sia sempre diretta nello stesso verso.

5ª. L'induzione che produce il ferro nell'atto che viene magnetizzato è più forte nel tratto medio che non negli altri: e tale differenza è poco sensibile quando il ferro circondato dalle due eliche è molto più lungo di esse.

6ª. Gli effetti di due o più correnti leido-magneto-elettriche si possono accumulare dirigendole nello stesso filo metallico.

7ª. Se un ferro è ricoperto da tre eliche, e si scarica la boccia su quella di mezzo, in ciascuna delle laterali, se sono chiuse, nasce l'induzione leido-magneto-elettrica; e l'una non altera menomamente l'altra; e se queste due eliche sono unite in modo da formarne una sola, l'effetto è maggiore. In questo caso qualunque sia il tratto del ferro ricoperto dalle tre eliche, l'effetto è sempre lo stesso, purchè non variino le distanze a cui si trovano fra di loro.

8ª. Una data scarica può produrre induzioni leido-magneto-elettriche molto più cospicue circondando un lungo fascio, o una matassa di fili di ferro, con parecchie eliche l'una di seguito all'altra, e unendo la prima, la terza e tutte le altre in posto dispari in modo da formarne una sola congiunta poi con l'elica dello stromento, e così formandone di tutte quelle in posto pari una sola, sulla quale poi scaricasi la boccia di Leida.

9ª. Se la scarica è rinforzata perchè fatta circolare in un'elica contenente ferro, la corrente leido-magneto-elettrica riesce pure avvalorata. Ma se per contrario si fa circolare la corrente suddetta di induzione, oltre che nell'elica del magnetometro, anche in un'altra contenente ferro, l'induzione leido-magneto-elettrica è più debole.

10ª. Se la corrente leido-magneto-elettrica eccitata dalla scarica d'una boccia si fa circolare in un'elica circondante un fascio di fili di ferro, e attorno al fascio stesso siavi un'altra elica comunicante col magnetometro, si ottiene una corrente leido-magneto-elettrica di secondo ordine.

11ª. Il rinforzo nell' azione magnetizzante della scarica elettrica prodotto dal ferro, attorno al quale si fa circolare la scarica stessa, sembra nascere principalmente dalla corrente leido-magneto-elettrica, la quale dal ferro stesso, nell' atto che si magnetizza, viene eccitata nell' elica che la circonda. E ciò perchè tutte le circostanze, nelle quali ha luogo quel rinforzo ha pur luogo l' induzione leido-magneto-elettrica; e tutte quelle circostanze, dalle quali viene quel rinforzo avvalorato, giovano a dar più vigore alla induzione leido-magneto-elettrica medesima (1).

---

(1) Un cenno circa il fenomeno che forma il principale argomento di questa Memoria venne pubblicato nella *Gazzetta Piemontese* del 3 Aprile 1847.

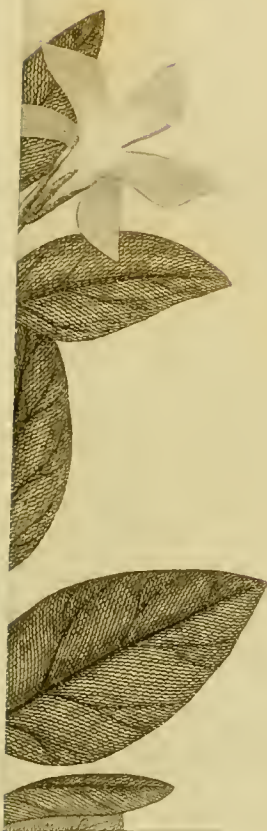



Fig.

rti II. pag. 121.
Tav. II

Leucojum hyemale Roem. et Schult.

Tav. III.

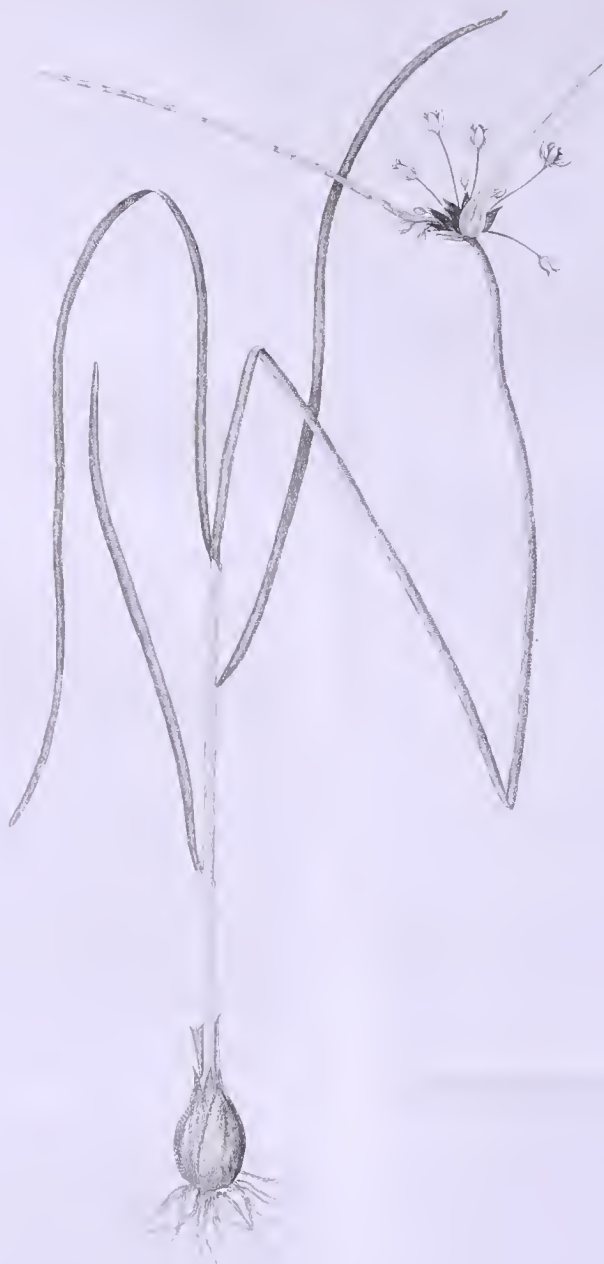
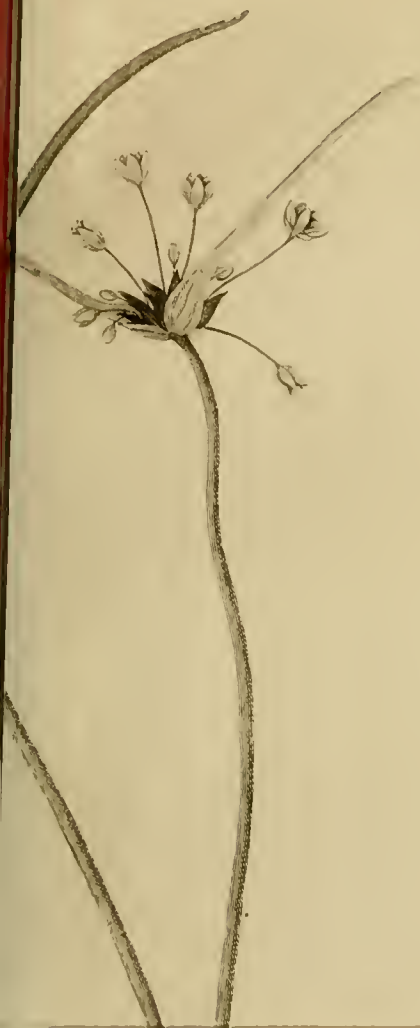
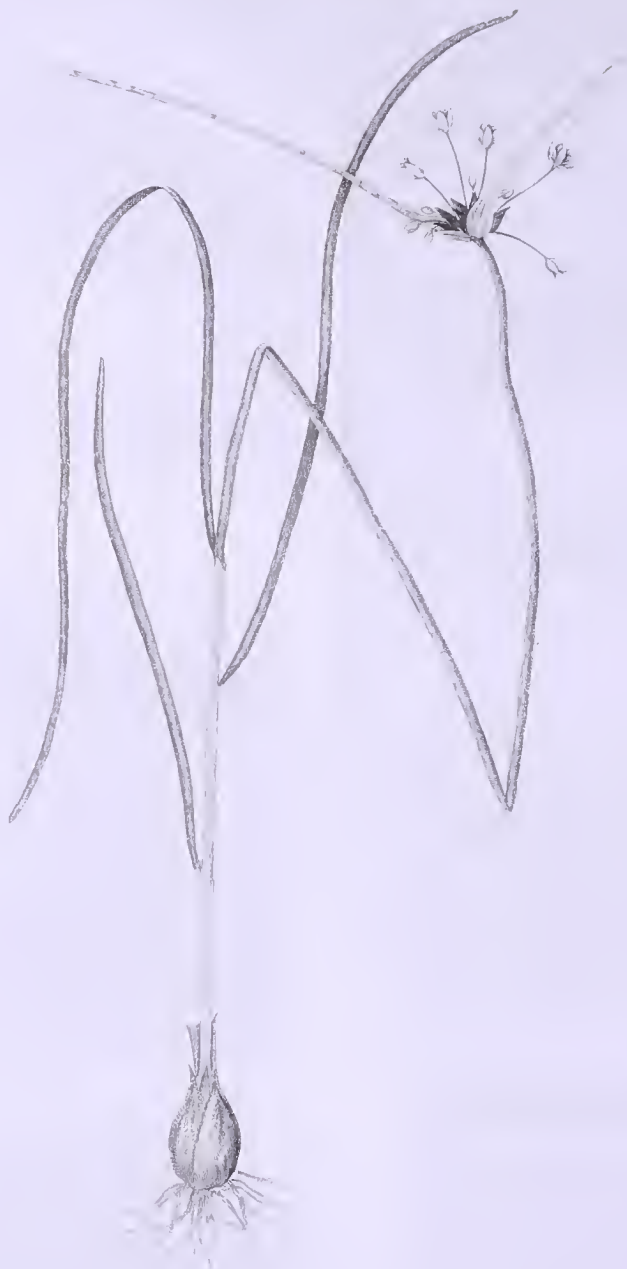
Allium ampeloprasum L.

Allium oleraceum L.

Tav. V.

Allium oleraceum L.

…1. pag. 121
Tav. VI.

Allium ligusticum Dc. 2/4.

MANIPOLO SECONDO DI PIANTE DELLA LIGURIA

MEMORIA

DEL CAV. ANTONIO BERTOLONI

SOCIO ATTUALE

Ricevuta il 18 *Aprile* 1852.

In questo secondo Manipolo delle piante della Liguria faccio conoscere sei altre specie insigni, ed alle mie descrizioni accoppio le figure delle medesime disegnate, e colorite dall'egregio e diligente P. De Negri dell' Oratorio, che me ne fu cortese, e che disegnò, e colorì anche quelle del Manipolo primo. Già dissi nell' introduzione a quel Manipolo, che la Liguria era ricca delle piante più rare della nostra Flora, ed i ch.mi Professori Viviani, Gherardi, Sasso, De Notaris ne diedero prove cogli esemplari, che ne raccolsero, e de' quali mi misero a parte. Di recente si è aggiunto ai medesimi il Sig. Dott. Francesco Panizzi di S. Remo, il quale proseguendo a fare ricerche, ha scoperto altre piante sfuggite ai primi, delle quali sarà mio dovere dare contezza nella *Flora Italica*. Una di esse è il *Rhododendron ferrugineum* trovato dal Panizzi nell' Apennino della Liguria occidentale, pianta sino ad ora sconosciuta nell' Apennino in generale, e che di recente è stata rinvenuta anche nell' Apennino di Fivizzano sul monte *Bado*, nelle così dette *Alpi di Mommio*, dall' illustre Sig. Tommaso Calandrini di Lucca, il quale me ne mandò l' esemplare. L' altra pianta del Panizzi, che merita di essere quì rammentata, è la *Statice cumana* Ten. propria delle rupi marittime della *Bordighiera* parimente nella Liguria occidentale. Mi viene il sospetto, che

questa sia la *Statice cordata* All. Fl. Ped. 2. p. 90. n. 1608., giacchè l'Allioni la dice frequente nelle rupi marittime, e certamente intendeva le rupi marittime della Liguria o di Nizza, perchè questa sola costa marittima appartiene alla Flora Piemontese. Nel tomo 3. p. 522. della Flora Italica io addussi il sinonimo dell' Allioni alla *Statice articulata* propria della Corsica e della Sardegna, pianta, che sino ad ora non fu trovata dai Botanici Liguri nel Genovesato, siccome non fu trovata nemmeno in altra parte della costa Italiana. Io lo addussi citando l' erbario dell' Allioni non esaminato da me, ma da altri per me, ed è probabile, che sia stato preso un qualche equivoco, trattandosi di specie assai affini. Laonde prego i Botanici, e segnatamente i Botanici Piemontesi, ai quali è facile l' accesso all' erbario dell' Allioni, di chiarire meglio l' anzidetto sinonimo.

---

1. MORSINE *maggiore*: fusti sterili ripiegati, fusti fertili dritti; foglie ovate, ristrette da ambe le estremità, glabre; lacinie del calice strette, lineari, nude; lacinie della corolla ovate, appuntate, oblique *Tav.* 1.

Vinca acutiflora *Bert. Fl. Ital.* 2. *pag.* 751. *n.* 3., *et tom.* 5. *p.* 614.

Perenn. Nasce nella Liguria orientale vicino a Sarzana, e nella occidentale vicino ad Albenga. Fiorisce nel Marzo e Aprile.

È assai somigliante alla *Vinca major* L.; ma ne differisce per le foglie ovate, ristrette tanto all'apice, che alla base, sebbene meno nella base, non cordate nemmeno leggermente, glabre nelle due faccie, e nel margine. Ha le lacinie del calice più corte, e che soltanto uguagliano il tubo della corolla non compresa la fauce, tutte quante glabre come le foglie. Le lacinie della corolla sono ovate, appuntate, oblique.

Il Boissier nel suo Voyag. en. Esp. p. 409. n. 1131. malamente congiunse questa specie colla *Vinca media* di Hoffmansey e Link Fl. Port. tom. 1. p. 377. tab. 70., la quale ha le

dimensioni minori della metà di quelle della *Vinca acutiflora*, e che realmente è una specie intermedia fra questa e la *Vinca minor* L. La figura della *Vinca acutiflora*, che quì unisco, è la prima, che se ne abbia.

Spiegazione della tavola prima.

Fig. a. La pianta nello stato naturale.
b. La corolla aperta, e che mostra il sito degli organi genitali.
c. L' ovaïo collo stilo, e stimma.

2. Campanellina *penzola*: foglie lineari, strette, piane; spata bivalve, biflora; lacinie del perigonio lanciuolate, appuntate; stilo alquanto più lungo degli stami *Tav.* 2.

Leucojum hyemale *Bert. Fl. Ital.* 4. *pag.* 6. *n.* 1. *De Cand. Fl. Franc.* 5. *p.* 327. *a.*

Perenn. Nasce nelle colline della Liguria occidentale, e nelle colline di Nizza. Fiorisce nell' Aprile e Maggio.

Bulbo radicale piuttosto picciolo. Foglie lineari, larghe appena una linea, piane, rigate per il lungo. Scapo rotondo, grossetto. Spata di due valve, lineari, canalicolate, ottuse, all' apice piegate a fornice, nel dorso rigate, e verdi, nel margine bianco-membranacee. Spata biflora. Peduncoli grossetti, disuguali, curvi, ora più corti ed ora un poco più lunghi della spata. Fiore picciolo, turbinato-campaniforme, bianco con lacinie lanciuolate, appuntate, rigate, le tre esteriori un poco più lunghe. Stami uguali alla metà del perigonio, o poco di più. Filamenti cortissimi. Antere bianche. Stilo filiforme, un poco più lungo degli stami. Stimma semplice, troncato. Tutta la pianta glabra.

La figura, che quì si dà, è la prima, che se ne abbia.

3. Porandello: bulbo composto di due mezzi bulbi, fatti a castagna; fusto inferiormente foglioso; foglie lineari, piegate a doccia; spata univalve; ombrella globosa; sepali nella carena scabri *Tav.* 3.

Allium ampeloprasum *Sp. pl. p.* 423. *Bert. Fl. Ital.* 4. *p.* 28. *n.* 1.

Perenn. Nasce ne' colli di Genova. Fiorisce nel Maggio e Giugno.

Bulbo radicale più o meno grosso, ovato, coperto di tonache bianche, scariose, internamente composto di due mezzibulbi, ciascuno de' quali ha la forma di una castagna, alla base tra le tonache esterne porta alcuni bulbetti minori, per lo più nereggianti al di fuori. Fusto solido, rotondo, dritto, nel terzo, o nella metà inferiore vestito di foglie, glabro, lungo da due a quattro piedi. Foglie lineari, appuntate, carenate, inguainanti, larghe da due a sei linee, piegate a doccia, nel margine e nella carena superiore scabre. Spata di un solo pezzo, ovale, larga, mucronata, concava, bianco-scariosa, in ultimo lacera, e decidua. Ombrella di moltissimi raggi, ora contratta, globosa, ora più spiegata. Raggi sottili, alla base distinti da squamette membranacee. Fiori piccioli. Perigonio campaniforme, di colore roseo, o roseo-pallido. Sepali ovati, ottusi, o poco acuti, nella carena scabri di tubercoletti, e di colore rosso più carico, talora scabri anche nel margine. Filamenti alternamente trifidi, colle lacinie laterali lunghe, e sottili. Gli stami maggiori sono un poco più lunghi del perigonio. Stilo dopo la fecondazione allungato più degli stami. Stimma grossetto, ottuso. Cassula globoso-trigona, un poco più corta del perigonio. La pianta puzza dell' odore dell' Aglio comune, *Allium sativum* L.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA TERZA.

Fig. a. Pianta al naturale.
b. Bulbo primario co' bulbetti alla base.
c. d. Due bulbetti della base, uno nudo, l'altro coperto da una porzione della tonaca nera.
e. Perigonio nella sua direzione naturale.
f. Perigonio ingrandito, e aperto ad arte.
g. Uno degli stami trifidi.
h. Pistillo.
i. Perigonio colla cassula immatura.
k. Cassula aperta, e che mostra i semi.

La diversa grandezza, che questa specie acquista, secondo che nasce in terreno fertile, o sterile, ha fatto credere, che la pianta magra sia una cosa diversa, lo che certamente non è. La figura quì data esprime la pianta magra.

4. Aglio *spuntonato*: bulbo semplice; fusto per breve tratto foglioso; foglie lineari, piane; spata univalve, corta; ombrella convessa, piuttosto aperta; sepali lanciuolati, molto appuntati; stami, e stilo più corti del perigonio; filamenti superiormente ciliati *Tav.* 4.

Allium acutiflorum *Lois. Desl. Not. pag.* 55. *Bert. Fl. Ital.* 4. *p.* 32. *n.* 3.

Perenn. Dalle colline di Genova. Si trova ancora nell' isola *Gallinara* vicino ad Albenga. Fiorisce nel Giugno.

Bulbo ovato, grossetto, coperto di tonache fosche. Fusto dritto, rotondo, nel terzo, o nella metà inferiore vestito di foglie, lungo un piede, o poco più. Foglie lineari, piane, appuntate, rigate, glabre, o soltanto scabre nel margine, inguainanti, larghe due, o tre linee, più corte dello fusto. Guaine a due taglienti. Ombrella di molti raggi, non bulbifera, convessa, e quasi globosa, ma co' raggi alquanto allargati. Spata univalve, più corta dell' ombrella, scariosa, bianca, o rossiccia. Alla base de' raggi sono squamette scariose, esse pure bianche, o rossiccie. Perigono a forma di campanella. Sepali lanciuolati, molto appuntati, all' apice un pochetto ricurvi, rosei, o biancastri, col nervo carinale di colore rosso più carico, e talora verde, scabrosetto. Stami più corti del perigonio, alternamente trifidi, colla lacinia di mezzo molto più lunga, e anterifera, colle laterali capillari, e flessuose. Filamenti dilatati alla base, superiormente cigliati. Stilo uguale agli stami, o poco più lungo. Cassula tondeggiante-trigona, più corta del perigonio.

Di questa specie non si aveva ancora la figura.

5. Aglio *d' ortaggio*: fusto inferiormente foglioso; foglie semirotonde, fistolose, solcate; spata bivalve, con valve disu-

guali, lineari, assai lunghe, alla base dilatato-ovali; ombrella sparpagliata, bulbifera; stami quasi uguali al perigonio. Cassula bislungo-turbinata, con sei solchi *Tav.* 5.

Allium oleraceum *Sp. pl. pag.* 429. *Bert. Fl. Ital.* 4. *p.* 35. *n.* 7.

Perenn. Raccolto dal P. Negri nelle vigne di Gavi. Io lo trovai ancora in quelle di Genova. Fiorisce nel Luglio.

Bulbo ovato, o ovato-bislungo, coperto di tonache scariose, che si prolungano al di sopra di esso, e finalmente divengono lacere. Fusto dritto, rotondo, inferiormente foglioso per lungo tratto, alto un piede e mezzo, o due piedi. Foglie semirotonde, fistolose, solcate, di sopra canalicolate, inguainanti. Spata di due valve assai lunghe, disuguali, all' apice subulate, alla base dilatate, ovali e concave, superanti di molto l' ombrella. Raggi dell' ombrella disuguali, sparpagliati, arricchiti alla base di bulbetti numerosi, ovali acuti, e talora all' apice caudati. Perigonio turbinato-campaniforme, lungo due in tre linee. Sepali bislunghi, ottusi, o appena acuti, talora nel dorso di colore porporino più carico, e tristo, e nei lati pallidi, oppure tutti pallidi con leggiera sfumatura porporina. Stami semplici, connati alla base, i primarj quasi uguali al perigonio, nè mai sporgenti fuori di esso. Stilo, che a poco a poco si allunga, e finalmente esce alquanto fuori del perigonio. Stimma grossetto. Cassula turbinato-bislunga, ottusa, con sei solchi, un poco più corta del perigonio. Tutta la pianta puzza quasi di cipollino.

6. AGLIO *fiorellino*: bulbo ovato, vestito di molte tonache, in ultimo lacero-fibrose; fusto inferiormente vestito di foglie piane, lineari, strette; ombrella di pochi raggi disuguali, corta; spata di due valve, alla base allargate, ed ovali, prolungate in punta, che supera l' ombrella; perigonio picciolo, con sepali ellittico-bislunghi; stami semplici, in ultimo sporgenti fuori del perigonio *Tav.* 6.

Allium ligusticum *De Not. Prosp. della Fl. Lig. p.* 46. *et* 55., *et Repert. Fl. Lig. p.* 412. *Bert. Fl. Ital. tom.* 6. *p.* 624.

Perenn. Delle colline intorno a Genova. Fiorisce nel Giugno.

Bulbo ovato-bislungo, coperto di molte tonache, che presto si sfacellano in fibre fosche, privo di odore. Fusto rotondo, fin quasi alla metà vestito di foglie, lungo circa nove pollici. Foglie lineari, strette, piane, acute, rigate, larghe mezza linea, o poco più, di sopra canalicolate, inguainanti. Ombrella di sei — nove raggi disuguali, corta, e senza bulbetti. Spata bivalve, due o tre volte più lunga dell'ombrella, colle valve ovate alla base, indi lineari, acute, disuguali. Perigonio bianco, o di colore tra il bianco ed il carnicino pallido, lungo una linea e mezzo in due linee. Sepali elittico-bislunghi, ottusi, o leggermente smarginati, tenui, durante la fiorita patenti, gli esterni un poco più corti. Stami semplici, a poco a poco allungati, e finalmente più lunghi del perigonio, anche del doppio. Stilo alla fine più lungo degli stami. Cassula globoso-triloba, più corta del perigonio. Tutta la pianta è glabra.

Si mancava della figura di questa specie.

INTORNO
ALLA RAGIONE DINAMICA DELLA SOLUZIONE
NUOVI FATTI E CONSIDERAZIONI

DEL PROFESSORE BARTOLOMEO BIZIO

SOCIO ATTUALE

Ricevuta il 2 *Maggio* 1852.

§. I.

Si accenna a' primi fatti, che condussero al nuovo modo di vedere la soluzione, e si ricorda il rilevantissimo del Person, concernente il così detto da lui calorico di diluizione.

Messomi nell' anno 1842 con pesato riflesso a considerare il fatto volgare, e perciò notissimo della calce che, quando sciolta nell'acqua se indi si esponga al libero contatto dell'aria, passa a condizione di carbonato, con questo di aggregarsi in pellicole o croste alla superficie del liquido, presi partito di farmi a indagare sperimentalmente, se tutta, o solo in parte, quivi si adunasse a qualità di sale. Dato adunque di piglio all' esperienza, e variatone in più guise il modo, sempre conforme all' intendimento di vedere, se realmente le molecole muovessero per sè dal basso in su, rinvenni in fatto che la calce usciva tutta dall' acqua a quella volta, rendendosi a forma di sale alla superficie, e ne diedi in luce i risultamenti in opuscolo pubblicato l'anno 1845 (1). Da questo io era condotto a vedere un corpo sciolto, in opera della propria forza ripulsiva, riuscire in grembo al liquido, effettivamente in condizione mo-

(1) Vegg. l' Opuscolo pubblicato coi torchi Cecchini Naratovich, Venezia 1845, intitolato: *Sopra l' azione della calce entro l' acqua conducente a ravvisare in che consista la soluzione.*

lecolare e quindi elastica, e in tal forma spargersi dentro al solvente a guisa di un vapore in uno spazio definito. Di qua io escludeva tra il liquido e il corpo da sciogliersi l' affinità, ammessa come indispensabile perchè si sciolga, avvegnachè non si tenga a legge veruna di chimica proporzione, nè a regola di effetti, che fedelmente si accompagnano a' vincoli di combinazione: talchè, ove il discorso non si torca stranamente ad arguire dalla diversità degli effetti conformità di causa, la soluzione de' corpi non poteva giammai scriversi a chimica operazione, come in fatto da essa punto non procede.

Posata questa idea dinamica della soluzione, mi faceva ad avvalorarla colle gravi considerazioni del Gay-Lussac. Questo distinto chimico in un suo lavoro intitolato: *Considerazioni sopra le forze chimiche e quindi sopra la coesione* (1), condotto dal filo de' suoi argomenti riuscì col discorso alla solubilità dei corpi, e quindi alla soluzione. Trovò egli che la soluzione di un corpo avviene senza verun rispetto allo stato in che il corpo si trova, cioè se solido o liquido, onde la coesione non influisce menomamente sopra il cangiamento, che i corpi quivi incontrano. Trovò in contrario che la solubilità è strettamente legata colla temperie; talchè la soluzione di un sale saturato ad una data temperie, quando si raffreddi per un certo numero di gradi, abbandona una proporzionata quantità del sale sciolto; onde concludeva avvenire *della soluzione de' corpi quel medesimo che della elasticità de' vapori, la quale varia colla temperie.* Si faceva quindi a comparare *la soluzione colla vaporizzazione*, dichiarando « che non si potrebbe non ammettere, così egli, « che nella soluzione, come nella vaporizzazione, il prodotto « sia essenzialmente limitato a ciascun grado di temperie pel « numero delle molecole, che possono esistere in una porzione « data di solvente. Esse si separano per la cagione medesima, « onde le molecole elastiche precipitano, cioè per un abbassa- « mento di temperie ». Crede che la compressione, come

(1) Vegg. Annales de Chimie et de Physique; Tom. LXX, anno 1839.

obbliga a precipitare le molecole elastiche de' vapori, così faccia delle molecole saline sciolte. Ricorda, che come le molecole de' vapori precipitano per la riduzione dello spazio, così del pari le molecole sciolte de' sali quando si menoma il volume del solvente; del che, per così dire, la cotidiana sperienza ci chiarisce, anche quando facessimo, dopo la svaporazione di parte del solvente, di ricondurre la temperie della soluzione a quel preciso termine a che fu operata la saturazione. Finalmente richiama l' attenzione alla conformità del fenomeno con che si opera la *soluzione* e la *vaporizzazione*, cioè del freddo che si accompagna ad entrambe queste tramutazioni de' corpi di uno in altro stato. Vero è ch' egli, lontano dal riconoscere in questa operazione fisica la parte efficiente che tiene la forza ripulsiva molecolare, si die' a scriverne l' effetto alla chimica affinità; conciossiachè gli bisognasse una forza perchè molecole solide o liquide si spargessero per entro un solvente; sicchè nella ignoranza della naturale, operante, ammise la fittizia e disacconcia a dichiarazione degli effetti.

Quando il celebre Gay-Lussac fermava tutti questi punti di analogia esattissima tra la soluzione e la vaporizzazione, l' esperienza non ci aveva per anche fornito l' ultimo anello, che valesse a legare queste due operazioni fisiche così strettamente fra sè che niente restasse a desiderare; ch' era il vedere a mano de' fatti, se, come un vapore che satura uno spazio dato, quando si conduce a spargersi in uno spazio più grande, per la rarefazione che siegue, produce freddo, così del pari i sali sciolti, messi a diffondersi in una copia maggiore di solvente, a similitudine de' vapori, rendessero anch' essi un abbassamento di temperie. Il primo cenno che apriva la via alla verificazione di questo fatto rilevante, senza però il menomo intendimento, che fosse per valere al più fedele riscontro della soluzione colla vaporizzazione, io il rinveniva nel *Rapport annuel* dell' anno 1846, in che il Berzelius ci divisa brevemente alcuni risultamenti sperimentali del Person intorno alla soluzione del cloruro sodico, ne' quali l' autore si prefisse

di determinare la quantità del calorico assorbito nello sciogliersi di questo sale. Quivi è detto: « Il Person attirò l' attenzione « sopra la seguente particolarità del sal marino: Quando si « scioglie un grammo di questo sale in 50 grammi di acqua, « esso assorbe 22 unità di calorico, mentre quattro grammi di « questo medesimo sale fatto sciogliere nella stessa quantità « di acqua, non assorbe che 10 unità di calorico. Che se poi « si scioglie un grammo di sal marino in una soluzione, la « quale contenga $\frac{1}{6}$ di sale, essa non ne assorbe che 3 unità. « Ne siegue da ciò che, quando si aggiunga dell'acqua ad una « soluzione di sal marino, la temperie si dee abbassare, e ciò « avviene effettivamente (1). »

Dichiaratoci nel modo allegato il predetto singolare avvenimento, facendosi il medesimo autore quattro anni appresso, cioè nell' anno 1850, a cercare *il calorico specifico delle soluzioni e il latente di soluzione*, leggiamo nei *Compts Rendus* del detto anno queste parole: « *A priori* saremmo condotti a cre- « dere che la quantità di calore che si rende necessaria per « isciogliere un sale, dovesse essere minore di quella che bi- « sogna per fonderlo; perocchè l' azione chimica fra il sale e « l' acqua suscita una quantità di calorico, che ci toglie por- « zione dell' effetto sensibile di quello assorbito a cagione del « passaggio dallo stato solido al liquido; ma il fatto siegue in « opposto alla predizione. Quarantanove calorie bastano per « fondere un grammo di azotato o nitrato potassico, e ne oc- « corrono sessantanove per iscioglierlo. Io suppongo che la so- « luzione si faccia con cinque parti di acqua; e se si aumenti « la proporzione dell' acqua, avvegnachè in tal caso l' azione « chimica fornisca senza dubbio una quantità maggiore di ca- « lorico, pur nondimeno la misura che ne abbisogna è vie più « grande; conciossiachè occorrano allora ottanta calorie per « isciorre il sale in venti parti di acqua. Ne viene da ciò evi- « dentemente che la semplice *diluizione* in una quantità di

(1) Vegg. Rapport annuel, 31 Marzo 1846, pag. 15.

« acqua più grande assorbe una quantità considerabile di ca-
« lorico. Si può verificare questo fatto direttamente; e si trova
« che il medesimo sal marino rende latente più calorico nell'
« atto che si allunga la soluzione, che non quando fu sciolto
« il sale. Ne siegue da ciò che s' ingannerebbe colui, il quale
« stimasse, che il freddo osservato, quando si scioglie un sale,
« fosse dovuto semplicemente al cangiamento dello stato di so-
« lido in liquido: in questo passaggio non è assorbita che sola
« una parte di quel calorico che scompare. Un' altra parte,
« sovente più ragguardevole che la prima, conferisce alle mo-
« lecole già divenute liquide una modificazione, che non co-
« nosciamo, ma senza della quale le predette molecole non si
« spargono nel solvente. Di qua siamo condotti a riconoscere
« un calorico latente di *diluizione*, e quindi non ce ne ammi-
« riamo che la quantità del calorico, che si rende necessaria
« per la soluzione torni più grande che per la semplice fusione. »

Prima di formare le considerazioni nostre sopra il *calorico di diluizione*, ci sembra dover osservare, che alla somma del freddo che si palesa quando si scioglie un sale, non esserne da aggiungere quantità alcuna maggiore per quel *calorico*, che si presuppone suscitato dall' operamento chimico di soluzione, che verrebbe a toglierci una porzione dell' effetto del freddo prodotto dal cangiamento di stato. Tutti i chimici fin quì, lasciando d' occhio le grandi difficoltà che si contrappongono, ammettono che la soluzione venga per un atto chimico del solvente verso il corpo che si scioglie, ma nessuno ha immaginato che, quando il corpo che si scioglie sia in condizione idrata, v' abbia produzione di calore; onde attenendosi al fatto visibile, e al solo fornitoci dall' esperienza, si diedero piuttosto a credere, darsi operazioni chimiche, le quali, anzichè accompagnarsi al fenomeno del calore, si accompagnino a quello del freddo. Stimiamo adunque doversi ritenere che il freddo prodotto nell' atto in che un sale idrato si scioglie, sia l' indicazione dell' effetto intero e preciso del cangiamento di stato incontrato dal corpo.

Ma se attenendoci alle attitudini del *calorico* veduto nelle sue qualità di un *imponderabile*, abbiamo facile ragione del freddo quando un sale si scioglie, perchè ha assorbimento di calorico quando un corpo di solido viene liquido, e di liquido si conduce a condizione elastica; onde avviene poi che il sale già messo in istato liquido, seguitando a tenersi nello stato in che si trova, atteso il solo accidente che la soluzione si allunghi, rende di bel nuovo una manifestazione di freddo? Il Person ci soggiugne, che *questa porzione di calorico si fa ad imprimere alle molecole, già divenute liquide, una modificazione sconosciuta, ma senza della quale le predette molecole non si spargerebbono nel solvente*. E noi soggiungiamo per qual cosa quando si *sono sparse* la prima volta *nel solvente*, giusta il consentimento de' Chimici e del Person medesimo, che stimò eziandio consentirvi producimento di calore, fu reputata operazione chimica, non è poi operazione chimica anche lo spargimento secondo? E s' è operazione chimica, perchè rende freddo, anzichè calore? Noi crediamo che, per dilucidare questo nuovo arcano che ci è dato innanzi dall' esperienza, sia da richiamarci, come abbiamo detto a principio, lo stretto legame divisatoci dal Gay-Lussac tra la vaporizzazione e la soluzione, e scorgere quindi nel fatto, messoci innanzi dal Person, l' ultimo esattissimo riscontro, ch' è quando un vapore saturante uno spazio dato, conducendolo a spargersi in uno spazio più grande, produce freddo, come le soluzioni producono freddo quando si diluiscono.

§. II.

Sperienze comprovanti la generalità del fenomeno del freddo, che si produce quando si allungano le soluzioni.

Ora fermatomi col pensiero nella rilevanza di questo fatto al tutto acconcio ad avvalorare l' idea dinamica della soluzione, in che il corpo che si scioglie è veduto a guisa di un vapore condursi in condizione elastica dentro il solvente, che torna il mezzo in cui le molecole venute elastiche si tengono librate,

trovai debito il cercare se rispondesse così al cimento di più maniere di sali sciolti da potersi avere quale successo in ogni contingenza sicuro e immancabile. Siccome il fine propostomi quello era di raffrontare la soluzione a un vapore saturante uno spazio, così, nello istituire le mie ricerche, stimai bene di partire costantemente da una soluzione satura a una data temperie, come quella che mi rappresentava per punto lo spazio saturato di vapore a quel termine termometrico. Le diverse soluzioni salinee, ch' io ho cimentate, furono condotte a saturazione tra + 8° e + 12° del R. Indi avuta dentro i limiti accennati la soluzione satura, di che io cercava di conoscere il freddo che fosse stato per prodursi nel diluirla, prendeva quelle tante misure eguali in volume di acqua con che divisava di allungarla, esempigrazia, due, tre, quattro e fino a cinque, e condotta l' acqua diluente alla precisa identica temperie della soluzione da esperimentarsi, faceva a un tratto la mescolanza, badando attentamente alla misura del freddo, che il termometro m' indicava al tramescolarsi dell' acqua colla soluzione; non senza portare pianamente il bottone del termometro ne' strati differenti del liquido tramescolato, e tenerlo quivi finchè si metteva al tutto in quiete. Non ommisi neppure di tener conto, avvegnachè non rilevasse essenzialmente al mio proposito, del freddo prodotto nel primo tempo in che il sale era aggiunto all' acqua per apparecchiare la soluzione satura; badando altresì alla misura di questo freddo di soluzione, per iscorgere se al più o al meno di esso, fosse legata una qualche relazione col freddo successivo solito prodursi quando si mesce l' acqua.

Tenutomi in ogni sperienza all' osservanza esatta di queste norme, il primo sale a che io posi mano, fu il sal marino o cloruro sodico, come quello, che nelle mani del Person, valse a fornire questo novello lume alla scienza. La prima quantità del sale infuso nell' acqua, era in peso poco meno di quello domandato alla sua saturazione ne' limiti di temperie in che operava; e ciò io faceva appunto per conoscere la misura del

freddo rendutomi all'atto della soluzione; al qual proposito mi piace osservare, che il freddo prodotto da un dato sale nel punto in che si scioglie, è legato così alla rapidità della sua soluzione da potersi notare una differenza, se prima più o meno renduto in polvere sottile.

Preso adunque un volume di acqua, che corrispondeva sempre a cento parti in peso, ci aggiungeva, operando una rapida agitazione, la predetta quantità di sal marino o cloruro sodico e ne aveva un abbassamento di temperie al termometro di R. di — 2°. Fatto ciò, come il sale era dileguato compiutamente, ne rimetteva successivamente altre piccole porzioni, finchè coglieva il preciso termine della saturazione, indicatomi dall' ultima piccola presa, che, o non si scioglieva, o si scioglieva solo in parte. Allora separata con ogni sicura diligenza la soluzione satura del poco sale residuo, prendeva tre tanti di acqua in rispetto al volume prima saturato, e conduceva l' acqua da infondersi e la soluzione alla precisa identica temperie; al che non mi bisognò in ogni sperienza meno dello spazio di ventiquattr' ore. Conseguita l' eguaglianza di temperie, versai l' acqua nella soluzione, rimescolando il liquido col bottone medesimo del termometro, e, come quietò, ebbi un freddo uguale a — 1°. Onde, essendo aggelati, compresa l'acqua della soluzione, quattro tanti di acqua che dianzi, ne seguì un freddo corrispondente a — 4°, cioè il doppio di quello avuto nella soluzione del sale: senza fare nessuna stima del sale sciolto, ch' è da comprendersi col liquido nella massa raffreddata di un grado.

Rifeci l' esperienza con aggiugnere alla soluzione quattro volumi di acqua, e ne venne un freddo totale di — 5°. Finalmente iterata la medesima pruova con cinque volumi di acqua, ne seguì un freddo di — 6°, cioè triplo di quello avuto nella soluzione.

Verificato il fenomeno, per altra via conseguito dal Person, stimai di farmi coll' esperienza al cloruro ammonico, sale che si scioglie nell'acqua con possente gagliardia. Il freddo, venutomi

nella soluzione, fu $-10^\circ \frac{1}{2}$. Fermato il pensiero nel freddo notevole prodotto da questo sale nello sciogliersi, mi parve bene di menomare per la prima volta l' acqua da aggiungersi, onde ne presi solo un doppio volume; e condotta, come dianzi, a egualità di temperie, feci la mescolanza; e non senza grande sorpresa, vidi seguirne nessuna indicazione di freddo. Allora rifeci la pruova con aggiugnere tre volumi di acqua, e ne venne un abbassamento di $\frac{1}{8}$ di grado, che corrisponde ad un' aggelazione di tutta la massa di solo $\frac{1}{2}$ grado. Iterai l' esperienza con l' aggiunta di quattro volumi, e n' ebbi una manifestazione di freddo uguale a $\frac{3}{10}$, che torna a $-1^\circ \frac{1}{2}$ dell' intera massa. E per ultimo rifatta un' altra volta la medesima sperienza con cinque volumi di acqua, il termometro si abbassò di $-\frac{4}{10}$ o $\frac{2}{5}$, che corrisponde ad una somma di freddo seguito ne' sei volumi di acqua, uguale $-2^\circ \frac{4}{10}$ o $\frac{2}{5}$, che torna all' incirca il solo quinto del freddo avuto nella soluzione del sale. Gli sperimenti instituiti sopra questo sale, come sopra altri sali diversi, furono ripetuti più volte; onde i risultamenti, ch' io do, sono o i più prossimi, o i realmente conformi avuti in più sperienze.

Veduto il procedimento di questo sale gagliardamente solubile, avvisai di metter mano al cloruro calcico cristallizzato, sale, non che solo solubilissimo, ma in eccesso deliquescente. Attesa appunto la deliquescenza grande di questo sale, parendomi difficile il cogliere il punto della saturazione, reputai per questo sale di variare il modo sperimentale in questa guisa: Sciolsi una statuita quantità di cloruro cristallizzato in un peso eguale di acqua. Ne seguì un freddo, o un abbassamento di temperie di -10°, il quale sarebbe stato vie più grande, se io avessi adoperata una maggiore quantità di acqua; conciossiachè col poco di acqua adoperata rendendosi la soluzione prontamente densa, le ultime quantità del sale passano in istato liquido assai lentamente, e quindi poco o niente contribuiscono a quel producimento del freddo, ch' è opera del primo mettersi del sale nel solvente. Avuta questa soluzione densa, ne pigliai parti cento in peso, e parti trecento di acqua, e,

condotte entrambe a egualità di temperie, feci la mescolanza, ma non ne seguì la menoma produzione di freddo. Veduta questa nullità di effetto, deliberai di servare questa medesima soluzione allungata per istituire un' altra pruova con aggiungervi altre ducento parti di acqua. Guardate le consuete cautele, feci l' aggiunta, e la temperie mi venne abbassata di $\frac{1}{4}$ di grado; il qual freddo, essendosi fatto in tutta la massa, che in questa sperienza monta a parti seicento, se n' ebbe un freddo eguale a $- 1° \frac{1}{2}$. Scorto questo piccolo effetto, mi parve bene di rifare la pruova, prendendo, come dianzi, le cento parti di soluzione, e aggiungervi a un tratto le cinquecento parti di acqua. Così operando ne seguì un abbassamento di $\frac{2}{10}$, ovvero di $\frac{1}{5}$ di grado, che rapportato a tutta la massa ne viene il freddo di $1° \frac{1}{5}$, cioè poco più di un quinto del freddo di soluzione, ch' è in una concordanza pressochè esatta co' risultamenti avuti dianzi, sperimentando il cloruro ammonico.

Indagata la predetta attitudine ne' mentovati sali aloidi, che si risolvono in meri composti binarj, passai agli ossisali, cioè a' composti ternarj, e tra questi per primi scelsi il nitrato potassico od azotico come il secondo de' sali in che il Person fermò il singolare fenomeno del freddo di *diluizione*. Messo mano a sperimentare anche questo sale nel modo già divisato, e fattomi ad apparecchiare la soluzione satura, ne seguì un freddo di soluzione di $- 7°$. Per questa prima volta feci pruova di allungarla con tre volumi di acqua e ne venne un abbassamento di $- \frac{1}{2}$ grado, che torna a $- 2°$ in tutta la massa. Rifeci l' esperienza coll' aggiunta di quattro volumi, e il freddo venutomi fu di $- \frac{3}{4}$ di grado, che, riferito alla totalità della massa, torna di $- 3° \frac{3}{4}$. Per ultimo fattomi ad aggiungerne cinque volumi, n' ebbi un abbassamento di $- \frac{1}{2}$ grado, che rende un freddo totale di $- 3°$, sicchè il massimo freddo avuto in opera di *diluizione* col nitrato potassico, fu coll' aggiugnere alla soluzione satura quattro volumi di acqua; e questo sommo di freddo non valse che la metà scarsa del freddo di soluzione.

Verificato nel modo anzidetto nel nitrato potassico il freddo di *diluizione* veduto dal Person per altra via, mi feci a provare il nitrato calcico. Siccome questo sale è deliquescente all' incirca alla maniera del cloruro calcico, quindi vedendo difficile il poter cogliere il preciso termine di saturazione, divisai di prendere un volume d' acqua in peso parti cento, e quivi sciogliere una statuita quantità di questo sale. Ne sciolsi adunque parti quaranta in parti cento di acqua; ed attesa la predetta deliquescenza, non avendo potuto avere il sale in condizione idrata, trasandai il freddo di soluzione, che non valeva a significarmi che il solo eccesso sopra il calore predetto nella idratazione del sale: il che niente nuoceva al fine della ricerca, che si faceva solo a verificare la generalità del freddo di *diluizione*, come fenomeno di correlazione allo spargersi dei vapori in ispazio più capace. Avuta adunque nella proporzione allegata la predetta soluzione, c' infusi dapprima tre volumi di acqua, e ne seguì un abbassamento di $-\frac{1}{2}$ grado, che risponde a $-2°$ di tutta la massa. Iterai la medesima sperienza coll'aggiunta di quattro volumi, e del pari l' abbassamento si tenne a $-\frac{1}{2}$ grado, che rende in tutto un freddo di $-2° \frac{1}{2}$.

Da questo sale passai al nitrato baritico, dotato di poco gagliarda attitudine a sciogliersi. Fattomi adunque ad apparecchiare la soluzione satura, nell' opera prima solvente ne seguì il solo abbassamento di $\frac{8}{10}$ di grado. Adoperate le consuete cautele, feci prima l' aggiunta di tre volumi d' acqua, onde ne seguì un freddo di $-\frac{2}{10}$, ovvero di $\frac{1}{5}$, che, per tutta la massa raffreddata di quel tanto risponde a $-\frac{4}{5}$. E rifatta con quattro volumi, n' ebbi un freddo totale di $-1° \frac{1}{2}$; e con cinque di $-2° \frac{1}{4}$.

Fattomi ora a un altro genere di sali, cioè a' solfati, diedi di piglio al solfato sodico, del quale nell' apparecchiarmi la soluzione satura, seguì un freddo di $-7°$. Nel primo cimento aggiunti tre volumi, la temperie venne abbassata di $-\frac{1}{2}$, che rende un freddo totale di $-2°$. Nel secondo fatto l' aggiunta di quattro volumi, l' aggelazione totale seguitane fu di $-3° \frac{3}{4}$,

e non mi venne trovata differenza sensibile col più di cinque volumi aggiunti.

Per fare esperienza di un altro sale di questo genere, posi mano a sciogliere il solfato magnesico, del quale ne seguì un freddo di soluzione uguale a — 4° $\frac{1}{2}$. Ed aggiunti dapprima tre volumi di acqua, ne tornò una minorazione totale di temperie uguale a — 1°; indi con quattro — 2° $\frac{1}{2}$; e con cinque soli — 3°, che non rende il freddo di soluzione, come nè anche il precedente solfato.

Stimato bene di fare qualche piccolo saggio anche co' fosfati, mi diedi a sciogliere il fosfato sodico, e nello scioglierlo mi segnò un freddo di — 2°. Indi aggiunti alla soluzione satura tre volumi di acqua, ne tornò un abbassamento totale di — 2°, cioè il preciso freddo di soluzione; e con quattro volumi un aggelazione di — 3° $\frac{3}{4}$.

Poscia, per far pruova altresì di qualcuno de' carbonati solubili, elessi il carbonato sodico, che mi diede un freddo di soluzione uguale a — 5° $\frac{1}{2}$. Aggiunti tre volumi di acqua, il freddo totale avutone fu di — 2°, e con quattro di — 2° $\frac{1}{2}$.

Per comprendere in queste ricerche anche qualche sale od acido organico, sciolsi l' acetato calcico, il quale perchè in condizione anidra, non mi lasciò avere il freddo di soluzione, che niente però rileva al fine delle mie sperienze, addirizzate unicamente all' investigazione di quel freddo, che costantemente viene nell' allungare la soluzione coll' acqua. Aggiuntivi adunque prima tre volumi, n' ebbi il solo freddo totale di — $\frac{1}{2}$, ed iterata l' esperienza con l' infusione di quattro volumi non ne seguì nessuna maggiore indicazione di freddo.

Fin qui i sali sperimentati non uscirono dal novero dei sali neutri; onde sembrandomi non doversi trascurare di porre alla pruova qualche sale in che l' acido vantaggiasse la proporzione della neutralità, mi feci per primo al biborato sodico, o borace. Nell' apparecchiarmi la soluzione di questo bisale non mi venne fatto di notare che il solo esiguo abbassamento di — $\frac{1}{2}$ grado. Attenendomi alla misura consueta dell' aggiunte

dell' acqua, ne infusi dapprima tre volumi, e ne tornò un freddo totale di — 2°, cioè quadruplo dal freddo di soluzione. E — 2° $\frac{1}{2}$ con l' aggiunta di quattro volumi, e — 2° $\frac{2}{5}$ con cinque volumi.

Indi mi apparecchiai una soluzione satura di quadriossalato potassico. Il freddo venutomi nella soluzione fu di — 2° $\frac{3}{5}$; ed aggiunti primieramente tre volumi di acqua, n' ebbi un abbassamento totale di — 1°, e con quattro di — 2° $\frac{1}{2}$.

Siccome in questi brevi saggi io mirava di passare da'sali consistenti nella più semplice composizione a' quelli della composizione più implicata, così volendo sperimentare anche un sale quadernario, sciolsi l' allume, o solfato alluminico-potassico. Il freddo di soluzione venutomi fu lieve tanto da non aver potuto notare che il solo abbassamento di — $\frac{1}{4}$ di grado, e con la prima aggiunta di tre volumi di acqua nessuna visibile variazione di temperie. Iterata poi la pruova con aggiugnerne quattro volumi, ne venne un abbassamento totale di — 1° $\frac{1}{4}$; sicchè anche questo sale, lentissimo a sciogliersi, non lasciò di rendermi un apprezzabile freddo di *diluizione*; onde mi sembra di poter concludere, che il fatto in generale debba tenersi per immancabile.

§. III.

Considerazioni intorno agli esposti risultati sperimentali.

Condotti noi, come abbiamo detto dapprincipio, a vedere la soluzione di un corpo in un liquido, quale la risoluzione del corpo in istato molecolare, e quindi elastico, operata dalla intrinseca forza ripulsiva delle molecole, onde il corpo si gitta nel liquido a similitudine di un vapore saturante uno spazio definito ad una determinata temperie, mi parve assai rilevante il fatto del *calorico di diluizione* ad avvalorare questo presupposto della soluzione, che si aggiusta acconciamente a tutti gli accidenti, che alla soluzione medesima si accompagnano. Tra questi gravissimo è certamente quello notatoci dal Person, che siegua un abbassamento di temperie pel solo fatto che si al-

lunghi la soluzione. L' autore ci afferma, come dicemmo, che *quel calorico assorbito conferisce alle molecole già divenute liquide una modificazione sconosciuta, ma che senza della quale le predette molecole non si spargerebbono nel solvente.* Lasciando da parte questo nuovo bujo, che il progresso sperimentale gitta nel campo della scienza, non è poi piccola cosa, che per esso rovini una delle leggi attenentesi al cangiamento dello stato de' corpi in relazione al *calorico.* Non è adunque più vero che vi abbia assorbimento di calorico, quando i corpi si tramutano di uno in altro stato, ma anche senza che cessino di tenersi in quello stato in che sono, solo che si diradino, come esempigrazia, un corpo liquido si obblighi, per così dire, a rendersi più liquido o meno denso, ha assorbimento di calorico? È vero che anco questa specialità di avvenimento potrebbe appoggiarsi alle conosciute condizioni del *calorico*, con farci coll' occhio al gas e ai vapori quando rendono freddo perchè rarefatti, o si rarefanno. Ma quando si voglia mettere in accordo le soluzioni che si allungano coi vapori che si diradano, bisogna convenire di necessità che la soluzione sia tale quale è per noi divisata. Fu appunto per questa rilevanza, ch' era da noi veduta essere nell' osservazione del Person, che, trovata per lui ristretta a soli due sali, cioè al cloruro sodico e al nitrato potassico, abbiamo stimato bene estenderla a un numero bastevolmente diverso in generi e specie di sali, sì che bastasse a condurci a ritenere immancabile la generalità del fatto.

La quantità poi maggiore o minore del freddo di *diluizione*, non sarebbe per noi, attenendoci alla ragione dinamica, che l' espressione della gagliardia più o meno grande, onde le molecole elastiche istantaneamente si spargono in uno spazio più grande nel che, colla pressione in contrario, incontrando vie maggiormente le molecole circostanti, e con ciò abbassandone i tremiti vibratorj ripulsivi, rendono il fenomeno del freddo (1). Siccome poi la quantità di un dato corpo, che si

(1) Vegg. Dinamica chimica; Tom. 1°, pag. 425.

scioglie in una posta misura di solvente, è sempre in relazione, come un vapore che si tiene in uno spazio dato, colla temperie, quindi essendo evidente che al crescere della temperie, cresce altresì il numero delle molecole saline, che si sospingono in condizione elastica nel predetto spazio, ne viene conseguentemente che deggiono quivi riuscire in una tensione maggiore; onde nell' atto dell' allungamento doversi gittare in quello spazio più grande con più veemenza; d' onde un freddo più notevole. Da questa considerazione ne siegue, che se in luogo di sperimentare ne' limiti di temperie in che noi abbiamo sperimentato, che sono tra gli otto ai dodici gradi sopra il zero, s' instituissero le medesime sperienze alle temperie ordinarie più elevate, porteremo opinione, che il freddo di allungamento fosse per riuscirci maggiore. In fatti conducendo a saturazione un posto volume di liquido, esempigrazia, ad una temperie doppia che dianzi, che potrebbe essere tra i gradi venti e ventiquattro sopra il zero, avremmo a proporzione un più gran numero di molecole elastiche obbligate a tenersi dentro lo stesso spazio, onde fatta ad esse libertà di spargersi in ispazio maggiore, deggiono gittarvisi a più grande impeto, e quindi, crederei, doverci rendere un freddo maggiore.

Notai altresì il freddo di soluzione, avvegnachè non facesse direttamente al fine delle mie ricerche; e mi venne fatto di riconoscere, tenersi sì strettamente legato all' atto repente dello spargersi delle molecole salinee nel solvente, che, intervenendo cagioni ritardatrici, scema il freddo, che alla soluzione si accompagna. Al qual proposito mi sembra avvenimento degno di considerazione, che due sali, tra i non pochi sperimentati, la cui tendenza alla soluzione perchè in eccesso grande, quali il cloruro ammonico e il calcico, mentre rendono un freddo di soluzione notevole, danno un lievissimo abbassamento di temperie in opera della *diluizione*; e in contrario alcuni sali, il cui freddo di soluzione è poco, tra' quali pochissimo quello rendutoci dal biborato sodico e dal solfato alluminico-potassico, pur nondimeno allungandone le soluzioni, ce ne torna

un freddo a proporzione grande. Pare adunque evidente, che le molecole di que' sali, ne' quali è una grande tendenza a sciogliersi perchè a ragione della piccolezza molecolare e della grande forza ripulsiva degli elementi in che consistono, sono dotati di molta gagliardia allo espandersi, entrino di primo tratto in quella misura di rarefazione, che loro prossimamente compete, sicchè pochissima virtù resti a un dilatarsi successivo alle giunte dell' acqua; dove quelle de' sali, che per la propria condizione lievemente si espandono al primo atto del mettersi ne' liquidi, serbino l' attitudine a un più largo spargersi appresso, che si confarebbe per punto coll' idea dinamica della soluzione. Ma dove pure non piaccia badare a queste particolarità conferenti al caso nostro, ci basta solo che sia fermata l' attenzione nel fatto comprovatissimo, che le soluzioni rendono freddo quando si allungano, ch' è il solo di che avevamo mestieri per metterle esattamente a fronte de' vapori, che a una posta temperie saturano uno spazio.

Qui adunque non estimiamo debito il farci a notare a ragione di grandezza molecolare le differenze incontrate nel freddo di soluzione relativamente al freddo di *diluizione* in ogni singola sperienza, che sarebbe opera di tedio e troppo minuziosa, ma non crediamo di pretermettere di richiamar l'attenzione ai due capi estremi, che sarebbe, come ho accennato dianzi, il cloruro ammonico e gli altri sali aloidi paragonati al solfato alluminico-potassico. Ne' primi la grandezza molecolare è in eccesso piccola, e grandissima in opposto nel predetto ossisale; sicchè ove non si voglia avere l'occhio che alla sola forza ripulsiva universalmente proporzionale alle grandezze molecolari, è veduta la ragione del molto freddo di soluzione rendutoci dai cloruri calcico ed ammonico, e del molto di *diluizione* del cloruro sodico, come del pari del pochissimo avutone e in un caso e nell'altro del mentovato sale quadernario. Avvegnachè la relazione delle grandezze molecolari non si tenga esattissima che alla dichiarazione de' fenomeni che si accompagnano all' azione chimica, e non possa mai credersi

bastevole a mostrarci la ragione delle qualità specifiche dei corpi; pur nondimeno, quando una qualità generale unisca insieme un numero più o men grande de' corpi, com' è della solubilità, essa ci si fa scorta sicura a svelare in essi i temperamenti diversi della qualità stessa.

§. IV.

Fatto convalidante, non essere la soluzione de' corpi che la tramutazione loro in condizione molecolare e quindi elastica dentro a' solventi, che sono i mezzi in che le molecole elastiche si librano.

Il fatto del freddo, che si produce quando le soluzioni si allungano, e che noi ci siamo studiati a mano dell' esperienza di certificarci se fosse per tenersi, come si tiene a valore di successo generale e costante, mette la condizione de' corpi sciolti così a petto de' vapori in ogni particolare, che non saremmo lontani dal farci a credere, che alla ragione dinamica della soluzione, fosse per esserle accordato un generale accoglimento. Tuttavia, per quel grande inciampo, che ognora si attraversa al riceversi quelle novità, che si mettono a stravolgere le idee ricevute e saldamente radicate al discorso e alla ragione comune de' fisici, non crediamo disutile di afforzare l' argomento presente colla allegazione di un fatto, in che un corpo insolubile diviene ad occhi vigenti solubile solo perchè si rende in condizione elastica. Questo corpo è il fosfuro idrico solido, che ci viene in forma di una polvere di elegante color giallo. Questa polvere è insolubile nell' acqua e nell' alcoole; pur tuttavia quando si stemperi o nell' uno o nell' altro di questi liquidi, e si lasci che posi e che dia quietamente a fondo, e quindi si esponga a' raggi diretti del sole, non tarda guari a scomparire la residenza, spargendosi nel liquido a forma di corpo sciolto, in quel modo medesimo che qualunque altro corpo, il quale sia solubile e nell' acqua e nell' alcoole; onde i chimici affermano, che sotto l' influsso de' raggi solari il

fosfuro idrico diviene d' insolubile solubile. Qui ci resterebbe a sapere, che cosa facciano in questo corpo i raggi solari, che vagliono a conferirgli la solubilità. Per noi sarebbe la luce, che, come materia eminentemente dinamica e ripulsiva, ferendo in esso, vi partecipa una cotal misura di movimento vibratorio ripulsivo, onde siegue una rarefazione molecolare sufficiente alla risoluzione del corpo in istato molecolare od elastico, nella qual forma si sparge nel liquido, come in suo mezzo, e vi si tiene librato senza ajuto alcuno di chimica affinità. Quale altro discorso terrebbe l' universale de' chimici e de' fisici? Eglino si accorderebbono certo ad ammettere, che la luce, o come luce, o come misura delle ondulazioni dell' etere, o come calore che vi si accompagna, suscita una rarefazione nelle molecole del fosfuro, sicchè elle bastano a spargersi nel solvente, con quell' ajuto qualunque che porge loro l' affinità; perocchè senza la rarefazione indotta dall' operamento della luce, la sola affinità lasciava il corpo nella sua qualità di corpo insolubile: dunque l' affinità non è cagione efficiente della solubilità dei corpi, dove in contrario veggiamo essere o non essere solubili, secondochè, in un modo o nell' altro, possono o non possono condursi in condizione elastica in grembo di un liquido. Questa elasticità adunque che per altri argomenti stringentissimi fu per noi veduta ne' corpi sciolti, ci è anche mostrata visibilmente in questo fosfuro idrico che solo a mano di essa d' insolubile si rende solubile, il che solo si facciamo a considerare, senza por mente alla sua scomposizione, ch' è successiva all' atto in ch' è renduto solubile.

§. V.

Se i corpi sciolti sono quivi a condizione di vapore, siccome i vapori si mostrano altresì con certe qualità specifiche, attentesi a' corpi da cui derivano, potrà anche avvenire che alcune soluzioni si rendano nel colore preciso del vapore spettante al corpo sciolto.

Quando ci venisse fatto d' incontrare nel corpo sciolto salde e immutate le qualità specifiche del vapore che al corpo appartiene, non altro certamente ci resterebbe a inferire, se non che in quel mezzo qualunque che diciamo menstruo o solvente, ha quel vapore medesimo, che in opera della temperie si leva dal corpo stesso o in grembo all' aria, o nel vuoto secondo che piace a noi di operare. Vero è che questo non sarebbe se non una qualità di più tra quelle tutte, che, spettando a' corpi in istato di solidità o liquidità, veggiamo in essi altresì costantemente mantenersi dopo condotti a condizione di corpi sciolti in uno od altro liquido. In fatti se il corpo è dolce, o amaro, o agro, o austero o salato prima che si sciolga, tale immutabilmente resta anche dopo sciolto; che solo dovea bastare a svolgere i Chimici dall' idea di qualsivoglia operazione chimica di affinità, che fosse per aver mano ne' corpi che si sciolgono e nella quale pur seguitò a tenersi l' illustre Gay-Lussac. Senza che al vedere le soluzioni non istare a governo di proporzioni definite dovea da un pezzo in qua averneli tolti d' inganno. Pur nondimeno posciachè per noi i corpi sciolti sieno veduti a forma di un vapore, tratti dalla propria forza ripulsiva molecolare a spargersi e tenersi in un mezzo, crediamo utile di avvalorare l' assunto col metterli altresì al riscontro di un vapore, che, tale quale ci viene veduto nell' aria o nel vuoto, ci si appalesa altresì in grembo a' solventi. Questo vapore è quello dell' iodio, che, atteso l'elegante color violetto in che ci viene, è in tutto acconcio a far pruova sopra qualsivoglia altro vapore, come il solo che si rende in una

tinta sì vaga e speciale da non potersi in verun modo confondere con temperamenti di altro colore. Le soluzioni più ordinarie, in che ci riesca questo metalloide, sono di un colore giallognolo, variante nella intensità secondo i liquidi diversi in che si sparge. Qui non è il luogo in che fermarci a dichiarare, perchè uno stesso corpo in liquidi diversi, ed anche in uno stesso liquido messo in circostanze differenti, ci venga o possa venire in colori diversi, bastandoci di provare che quel medesimo iodio che ordinariamente si scioglie in color giallo, si scioglie altresì in quel preciso, elegantissimo color di viola, in che sempre e costantemente ci si mostra il suo vapore.

Alcune soluzioni violette d' iodio ci erano date a vedere anche prima delle ingegnose e delicate ricerche instituite a tal fine dal chiarissimo Prof. Selmi, ma queste ci pajono sovra le prime rilevanti al proposito nostro, e quindi degne che più specificatamente si ricordino. Questa soluzione violetta d' iodio il nostro autore la ottiene nell' acido solforico monoidrato a questo modo: Egli mesce in un bicchiere di forma conica arrovesciata una certa quantità di acido solforico monoidrato. Indi apparecchiata una soluzione allungatissima di acido iodidrico in misura un quarto dell' acido solforico preso a sperimentare, ve l' aggiugne e prestamente tramescola. Quivi, attesa l' azione vicendevole, che i due acidi tramescolati adoperano, è renduto non solo libero l' iodio, dell' acido iodidrico, ma esce in tale estremo di attenuazione, che prontamente, ajutato dal poco scaldamento che la reazione suscita, si sparge in grembo all' acido, producendo una soluzione limpidissima in elegante color di viola (1). Questo adunque è quel medesimo vapore d' iodio che ci è renduto, quando ne' cimenti fisici scaldiamo il metalloide fino al termine in che ci torna risoluto in gas. Se adunque per arguire l' identità della condizione dei corpi, non abbiamo altro argomento che l' identità degli attributi che alle diverse condizioni loro appartengono, chi oserà

---

(1) Vegg. Raccolta Fisico-Chimica italiana; Volume III, pag. 398.

metter dubbio, che quivi entro all' acido solforico non sia l' iodio a qualità di vapore? E se questa è soluzione vera e reale, come tutte le altre che per tali si riconoscono, sarà forse considerratezza di pesato discorso l' affermare che l' una riesca di un modo, le altre in altro? Dunque perchè del sal marino sciolto nell' acqua non ci si palesa a' sensi altra sua qualità che il sapore di salato, oseremo dire che quivi non è a forma di vapore, perchè il sapore di sale al palato non vale quello che all' occhio il colore di viola? Non credo che a questa vanità di sofismi sia per riparare i considerati cultori della scienza; pur tuttavia non reputai eccesso l' ammetterne la possibilità dell' evento, veggendo l' argomento gravissimo della soluzione, ch' è uno di tutti gli altri abbracciati dalla ragione dinamica, tenersi dopo sette anni in quella muta noncuranza a che si condannano i vaneggiamenti chimerici. Insisto adunque con questo rincalzo di pruove a fidanza, che il lume portato dal moltiplicarsi de' fatti valga a rischiarare così la ragione, onde i fatti medesimi procedono, da renderne, se non pronta, meno ritrosa o tarda l' accettazione.

Ora l' iodio si scioglie altresì in colore violetto nel solfido carbonico e nell' etere nitroso; pur nondimeno io diceva poco dianzi, riuscire vie più rilevante delle soluzioni predette, la soluzione fornitaci dal Selmi nell' acido solforico monoidrato; conciossiachè, dove le predette soluzioni restano quali sono ad ogni ordinaria temperie, quella nell' acido, attesa la gagliardia ripulsiva del mezzo e la sua forte densità, non si tiene se non quanto resta il poco scaldamento suscitato dalla reazione. In fatti il nostro autore si fece a indagare la misura della temperie occorrente a sostenere l' iodio a forma di vapore in quel mezzo, e si accertò soprattenervisi tra i + 35° e i 22° della scala del R. Al disotto di questo limite il metalloide comincia a rendersi dalla forma aerea alla solida fino a condursi interamente in questo stato. Come il vapore del metalloide precipitò al tutto, il Selmi, parato il bicchierino in un bagno d' acqua, quivi pianamente lo scaldò in guisa che la temperie passo passo

risalisse al termine di scaldamento, che suscitò da prima la reazione. Come giunse a' + 25° del R. osservò riapparire un avviamento di soluzione, finchè toccati i + 35°, l' ebbe compiuta sì da averne il vapore in tutta l'eleganza di color viola. È probabile che questa soluzione sarebbe restata quale riuscì al nostro autore per un termine di temperie molto al disopra dei + 35°, e forse fino al segno da averne scacciato l' iodio a condizione di gas. Ma ciò niente rilieva al caso nostro. Quello che torna molto al proposito è averci il Selmi provato a mano dell' esperienza, che la soluzione violetta d' iodio nell' acido non ha altro rispetto al tenervisi, che il termine domandato dalla temperie; talchè al mettersi o al togliersi di essa, entra innanzi o si sospende la soluzione; ch' è precisamente il divisatoci dal Gay-Lussac, cioè la soluzione de' corpi governati per punto, come i vapori, a legge di temperie. In questa particolarità dell' iodio di non restare sciolto nell' acido che dentro certi limiti di temperie, ci si appalesa come la forza ripulsiva molecolare di questo metalloide, per guardarlo a condizione di vapore entro la densità di quest' acido, abbisogni il rincalzo della temperie, che ne ingagliardisca la forza elastica.

§. VI.

Se i corpi sciolti si tengono dentro il solvente a forma di vapore, dee seguirne che le molecole elastiche quivi sparse si risentono della pressione del mezzo, o liquido cerchiante.

Fino dal Febbrajo dell'anno 1845, in che io pubblicava i primi miei sperimenti e idee circa la ragione dinamica della soluzione, io divisava di qual modo le molecole elastiche del corpo sciolto dovessero risentirsi della pressione del liquido, in che la propria forza ripulsiva le conduceva a gittarsi e tenervisi in condizione elastica. Mi sembrava quindi di vedere che, data una soluzione qualunque ad una posta temperie, ove si dia mano a scaldarla, fosse costantemente per verificarsi uno di questi tre casi: O che le molecole elastiche quivi sparse,

per tutta quella scala (ch' è il caso più frequente) a che il liquido monta per condursi al termine dell' ebullizione, fossero per dilatarsi così di forza da sostenere la pressione ingagliardita del liquido scaldato, senza provare una costipazione valevole ad obbligarle a rendersi in istato solido. O che questa pressione fosse per vantaggiare in tal modo la gagliardia ripulsiva delle molecole sciolte da condurle a serrarsi in condizione solida e precipitare. O che la elasticità delle molecole sciolte fosse valevole a vincere, per tutta la scala a che il liquido ascende prima di bollire, l' elaterio del liquido stesso in modo da fuggirsene prima o più facilmente ch' esso; conciossiachè raramente o forse non mai lo accompagnano nella rarefazione sì di pari passo da condursi con esso equabilmente a forma di vapore in grembo dell' aria. Messi questi temperamenti differenti, che provano le molecole elastiche de' corpi sciolti per rispetto al mezzo in che sono, io mi faceva alla dilucidazione di alcuni fenomeni palesatici dalle soluzioni, de'quali la scienza non ha modo di aggiustata dichiarazione. È noto, verbigrazia, che, ove si abbia una soluzione di calce, e si scaldi, guardata così dall' aria che non possa mettersi a sconciarne l' effetto il gas acido carbonico quivi disseminato, la soluzione si rende albiccia, torbida e finalmente precipita, se non tutta, la massima parte della calce sciolta. D' onde questo effetto? Io dico che le molecole elastiche della calce, messe in opera della soluzione dentro all' acqua, quando l' acqua si scalda per un certo numero di gradi, acquistando essa un elaterio vie più grande che le molecole della calce, punta contro esse sì gagliardamente che ne rintuzza non solo parte dell' espansione, ma ne obbliga un certo numero a stringersi fra sè, fino a che adunate in aggregati visibili, offuscano il liquido e precipitano. Questo, che avviene della calce, siegue altresì di alcuni sali come toccano certi limiti di temperie, e si registrano dalla scienza quali particolarità specifiche, che si sottraggono all' indagine speculativa, se non forse i chimici quietano, facendosi a credere, che l' affinità tra il solvente e il corpo sciolto sovente cangi o si

annulli in opera di determinate misure di calore. Quanto sia da fondarsi nell' affinità, non che a dilucidare questi fatti speciali, ma a render conto in genere dell' opera solvente de' liquidi, credo di averlo bastevolmente mostrato, sì che a niuno possa mai sorger dubbio che le soluzioni dipendano da operamenti attrattivi di affinità. In contrario veggiamo di leggieri il perchè di questi speciali successi, quando si facciamo coll' occhio della mente a considerare il necessario cangiamento di relazione, che dee mettersi tra le molecole sciolte e il solvente in opera dello scaldamento, onde non può stare che sovente non sorgano in più maniere modificati e diversi.

Ora, avendo io divisata innanzi ogn' altro la dimorfia del cloruro rameico (1), mi faceva a dichiararne la cagione a guida della predetta opera del calore verso le soluzioni. Diceva io adunque, che l' intenso color verde, in che ci riesce la soluzione di questo sale bastevolmente satura, deriva dal trovarsi quivi le molecole del cloruro fortemente compresse, atteso il gran numero in che, portate dalla propria forza ripulsiva, sono entrate a serrarsi calcate in uno spazio definito. Il colore poi azzurro in che si rende questa medesima soluzione, quando si allunga bastevolmente, io affermava procedere da una rarefazione seguita nelle molecole sciolte, atteso lo spargersi in una copia grande di liquido, che, come è detto dianzi, corrisponde al farsi de' vapori ad occupare uno spazio maggiore; sicchè, a mio avviso, le molecole del cloruro nella soluzione verde erano più dense che nella soluzione azzurra, cioè la cagione della dimorfia posava nella prefata differente densità delle molecole. Per convalidare questa dichiarazione del fenomeno, posi a riscontro dell'esperienza questa argomentazione. Se il colore azzurro della soluzione allungata viene da minore densità in che sono quivi le molecole sciolte, siccome le molecole del cloruro sono meno espansive che le molecole dell' acqua, dove io facessi di scaldare la soluzione, posciachè allora cresca l'elaterio

---

(1) Vegg. Annali di Fisica, Chimica ec. del Prof. Majocchi; Tom. XI, p. 282, anno 1843.

dell' acqua in una misura molto più grande che nel cloruro, dee seguire ch' essa il prema e costipi, conducendone le molecole in una densità maggiore, onde avverrà che nella medesima soluzione allungata scompaja il colore azzurro e subentri il verde. Dato mano alla pruova, come previde il discorso, così avvenne, sicchè con solo scaldare la soluzione e quindi aggelarla, si rendeva immantinente dal color verde all' azzurro e così a vicenda. Verificata questa parte, che la dottrina ci dava da antivedere, se veramente il color verde della soluzione veniva da una pressura adoperata sovra le molecole del cloruro sciolto, onde fossero condotte in una densità maggiore, io arguiva potersi ciò fare nella soluzione allungata azzurra anche senza opera di colore, cioè con isciogliere in essa altra fatta di cloruri scoloriti non idonei a mettersi verso il cloruro rameico a qualità di cloruri doppj; conciossiachè facendosi a pigliar luogo in quello stesso spazio o misura di solvente un numero vie più grande di molecole, dovea seguirne che le preesistenti riuscissero piggiate e comprese, e perciò rendersi la soluzione di azzurra in color verde eziandio alla temperie ordinaria. Come divisai, così feci col cloruro sodico, baritico ecc. e l' effetto puntualmente seguì (1); onde scorgendo i fatti succedere per punto quali mi erano dati a vedere al semplice lume della deduzione teoretica, mi parve non potersi più aver dubbio, che le molecole sciolte in un liquido, non riescano quivi variamente compresse, secondo le modificazioni differenti a che il liquido o il mezzo soggiace, attesi tutti quegli accidenti di temperie od altro, che in esso in più modi valgono ad influire.

A più grande confermazione dell' esposto fin quì sarebbe valuto assai, quale argomento di peso gravissimo, l' avere a mano dell' esperienza la sicura certificazione, che le molecole de' corpi sciolti riuscissero quivi in un volume più piccolo che

(1) Vegg. Sperimenti sopra l' azione della calce entro l' acqua conducente a ravvisare in che consista la soluzione. Tipografia Cecchini e Naratowich; Venezia 1845, pag. 19 e seguenti.

non sono in istato di solidità; perocchè le molecole de' corpi in istato solido, salvo lo schiacciamento che provano in opera dell'urto al momento dell'aggregazione o del combinarsi, niente indi resta che si faccia a serbarle nella costrizione primitiva, nè ha mai in giro una pressura che si tenga a stringerle e a serrarle equabilmente per tutto intorno. Di qua avviene, che veggiamo sovente corpi solidi venuti a principio in una cotal forma di aggregazione, indi per sè rilevarsi e mettersi in altra a solo impulso della propria forza ripulsiva molecolare, che non cessa di operare il suo effetto rarefacente nemmeno dopo che le molecole furono legate fra sè a mano della coesione. Dunque, attesa questa attitudine rarefacente, che rimane sempre nelle molecole de' corpi solidi, e dalla quale veggiamo seguirne effetti visibili di tramutato aggruppamento molecolare, saremmo condotti *a priori* a dedurre, che le molecole de' corpi solidi fossero in generale per tenersi in un volume più grande che ne' corpi sciolti, cioè in istato di liquidità; conciossiachè quivi debbano risentirsi, com' è detto, per tutto intorno dell' opera premente del liquido o del mezzo in che si gittarono in forma elastica. Abbiamo già con ispecificata considerazione svelate le grandi difficoltà, che si attraversano all'esatta determinazione de' volumi molecolari de' corpi; onde si pare come per al presente lo estendere le cognizioni nostre fino a un cotal limite, si risolva in un desiderio a che la scienza aspira, senza speranza di vicina verificazione (1). Tuttavia, dove non si tratti della determinazione rispettiva de' volumi molecolari de' singoli corpi, ma solo di sapere in genere, se le molecole solide sieno in un volume più o men grande che le sciolte o liquide, senza veruna relazione di quantità, stimiamo che il lume fornitoci dall' esperienza debba aversi per sicura e immancabile scorta alle nostre deduzioni.

Ora, i Signori Plaifair e Joule nell' anno 1846 instituirono un numero grande di sperienze coll' intendimento di determinare

(1) Vegg. Dinamica chimica; Tom. I, pag. 60.

il volume molecolare de' corpi in istato di soluzione, comparativamente a quello in che sono allo stato solido, e trovarono costantemente, che il volume delle molecole in istato solido è più grande che in istato di soluzione, anzi secondo loro la relazione sarebbe : : 11 : 9. Noi, senza fare assegnamento veruno del valore numerico delle cifre allegate, sentiamo di non poterci astenere dalla accettazione del fatto, preso nella semplice significanza del più e del meno in volume delle molecole dei corpi nelle due condizioni diverse. Nel che stimiamo di doverci tenere vie più immobili, conciossiachè nello stesso tempo, essendosi dato il Signor Holker alla medesima investigazione, giunse, per rispetto alla predetta differenza de' volumi delle molecole dallo stato solido a quello di soluzione, agl' identici risultamenti, cioè che le molecole solide sono in un volume più grande che le sciolte (1). Ora questo lume fornitoci dalla materialità del fatto sperimentale, tenendosi in perfetto accordo cogli attributi di elasticità e quindi di compressibilità, in che per noi furono vedute le molecole de' corpi sciolti, e con che ci siamo fatti alla dichiarazione di alcuni speziali fenomeni, che le soluzioni medesime palesano, crediamo che basti a suggellare per modo la ragione dinamica della soluzione, che al muoverne più oltre dubbio sia tolta ogni via di considerata argomentazione.

(1) Vegg. *Rapport Annuel*; 31 Marzo 1846, pag. 15 e seguenti.

INTORNO AL MOVIMENTO DI UN PUNTO MATERIALE SOPRA UNA SUPERFICIE QUALSIVOGLIA

MEMORIA

DI FRANCESCO BRIOSCHI

Presentata dal Socio Cavaliere ANTONIO BORDONI,
Approvata dal Socio GIUSEPPE BIANCHI

Ricevuta il dì 8 *Giugno* 1852.

1°. La integrazione delle equazioni del moto di un punto materiale, o di un sistema di punti, in alcune circostanze particolari di movimento, fu di recente scopo alle indagini dei Geometri. Le nuove forme assegnate da Lagrange e da Hamilton alle equazioni della dinamica, la integrazione delle medesime ridotta dipendente pei teoremi di Hamilton e di Jacobi dalla integrazione di una equazione alle derivate parziali del primo ordine non lineare, e la teorica dell' ultimo moltiplicatore dovuta a Jacobi aprirono la via a quelle ricerche. Il Sig. Liouville assumendo le formole di Lagrange e giovandosi dei risultamenti del Jacobi, prese in tre differenti Memorie a considerare alcuni casi in cui le equazioni del moto di un punto sopra una superficie, del moto di un punto libero nello spazio, e del moto di un sistema di punti sono integrabili; i quali due ultimi problemi vennero anche discussi, il primo dal Sig. Serret mediante le formole di Lagrange, ed il secondo dal Sig. Richelot partendo dalle formole della dinamica trasformate col metodo di Hamilton (*).

(*) Journal de Liouville; T. XI, XII, XIII, XIV. – Journal de Crelle; T. 40.

Le ricerche che, innanzi il lavoro del Sig. Liouville, esistevano intorno alle circostanze del moto di un punto sopra una superficie non piana, si riassumono in quelle del moto di un grave sopra una sfera o sopra una superficie di rotazione; e nelle più recenti del movimento di un punto materiale sopra una superficie di rivoluzione ammesse alcune particolari condizioni per le forze agenti, le quali fanno parte di una Memoria del Sig. Jacobi (*). L' uso delle linee esistenti sopra una superficie a rappresentare punti della medesima di tanto vantaggio nella trattazione di problemi di statica e di geometria fu anche di giovamento in questa parte della dinamica, ed i problemi discussi dal Signor Liouville devono appunto il loro successo a quel metodo di rappresentazione, come pure lo devono quelle cose che quì si aggiungono sul medesimo argomento.

2°. Se colla

$$f(x, y, z) = 0$$

si indica la equazione di una superficie qualsivoglia riferita a tre assi ortogonali, e con X, Y, Z le componenti parallele a quegli assi della risultante di tutte le forze acceleratrici agenti sopra un punto materiale il quale deve moversi sopra quella superficie, si hanno le tre equazioni

$$(1) \qquad x'' = X + \lambda d f'(x), \qquad y'' = Y + d f'(y), \qquad z'' = Z + d f'(z);$$

nelle quali

$$\lambda d = \pm \frac{N}{\sqrt{[f'(x)^2 + f'(y)^2 + f'(z)^2]}},$$

ed N è una forza di grandezza incognita, diretta normalmente alla superficie, e che rappresenta la resistenza della superficie medesima.

Dalle equazioni (1) si passa come è noto alla

$$\tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) = \int (Xx' + Yy' + Zz')\, dt + H,$$

essendo H una costante.

(*) De motu puncti singularis. Journal de Crelle, T. 24.

Si ritengano ora le x, y, z funzioni di due quantità u, v; parametri variabili di due superficie le quali colle loro comuni intersezioni colla superficie data determinano due sistemi di linee esistenti nella medesima, per l' uno dei quali sistemi $u =$ cost., e per l' altro $v =$ cost. Ritenuto inoltre che le linee di un sistema sieno ortogonali alle linee dell' altro; ponendo secondo le notazioni di Gauss (*)

$$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2 = \mathrm{E}, \qquad \left(\frac{dx}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dv}\right)^2 = \mathrm{G}$$

la equazione superiore si trasformerà nella

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{E}u'^2 + \mathrm{G}v'^2) = \int (\mathrm{P}\sqrt{\mathrm{E}}\,.\,u' + \mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{G}}\,.\,v')\,dt + \mathrm{H},$$

essendo P, Q le componenti dirette secondo le tangenti le linee $v =$ cost., $u =$ cost., della risultante di tutte le forze acceleratrici agenti sul mobile. Suppongasi abbia luogo il principio delle forze vive talchè sia

$$(2) \qquad \int (\mathrm{P}\sqrt{\mathrm{E}}\,.\,u' + \mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{G}}\,.\,v')\,dt = \mathrm{U}(u, v)$$

e si avranno le

$$\mathrm{P}\sqrt{\mathrm{E}} = \frac{d\mathrm{U}}{du}, \qquad \mathrm{Q}\sqrt{\mathrm{G}} = \frac{d\mathrm{U}}{dv},$$

ed

$$\tfrac{1}{2}(\mathrm{E}u'^2 + \mathrm{G}v'^2) = \mathrm{U} + \mathrm{H},$$

e le espressioni $u'\sqrt{\mathrm{E}}$, $v'\sqrt{\mathrm{G}}$ rappresenteranno le componenti secondo le tangenti alle linee $v =$ cost., $u =$ cost. della velocità che ha il mobile alla fine del tempo t.

3°. Indicando con T la semisomma delle forze vive, alle formole (1) si ponno sostituire le

$$(3) \qquad \frac{d\frac{d\mathrm{T}}{du'}}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{du} - \frac{d\mathrm{U}}{du} = 0, \qquad \frac{d\frac{d\mathrm{T}}{dv'}}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{dv} - \frac{d\mathrm{U}}{dv} = 0;$$

ammessa la sussistenza della equazione (2). Queste sono le formole date da Lagrange nella Sezione IV. della seconda parte

---

(*) Disquisitiones generales circa Superficies curvas. Atti della Società di Gottinga Vol. VI.

della Meccanica Analitica; nel caso poi del moto di un punto sopra una superficie essendo $T = \frac{1}{2}(Eu'^2 + Gv'^2)$, le medesime si mutano nelle

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{dEu'}{dt} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dE}{du}u'^2 + \dfrac{dG}{du}v'^2\right) - \dfrac{dU}{du} = 0, \\[2mm] \dfrac{dGv'}{dt} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dE}{dv}u'^2 + \dfrac{dG}{dv}v'^2\right) - \dfrac{dU}{dv} = 0. \end{cases}$$

Jacobi ha dimostrato che le formole ordinarie (1) pel moto di un punto sopra una superficie si ponno ridurre alla forma assegnata da Hamilton alle equazioni pel moto di un sistema libero. Queste formole, utili nella trattazione di alcuni problemi, si ponno dedurre dalle superiori (3) di Lagrange nel modo seguente. Pongansi

$$\frac{dT}{du'} = p, \qquad \frac{dT}{dv'} = q,$$

e da queste equazioni le quali sono lineari rispetto ad u', v' si ricavino i valori di u', v' in funzione di p e di q; quindi si sostituiscano questi valori nella funzione T, la quale potrà così considerarsi come una funzione delle u, v, p, q. Dunque la T che è funzione delle u, v, u', v', ammesse le equazioni superiori potrà ritenersi funzione delle u, v, p, q. Ora si ha

$$T = \frac{1}{2}(Eu'^2 + Gv'^2),$$

ossia

$$T = pu' + qv' - T.$$

Suppongasi la T nel primo membro funzione delle $u, v, u' v'$, e la T nel secondo membro funzione delle u, v, p, q, e derivando l'equazione superiore rispetto a t si avrà dopo una riduzione

$$\left(\frac{dT}{du}\right)u' + \left(\frac{dT}{dv}\right)v' = p'u' + q'v' - \frac{dT}{du}u' - \frac{dT}{dv}v' - \frac{dT}{dp}p' - \frac{dT}{dq}q',$$

essendo $\left(\frac{dT}{du}\right)$, $\left(\frac{dT}{dv}\right)$ le derivate della T rispetto alle u, v quando si supponga la T funzione delle u, v, u', v'. Da quest'ultima equazione si hanno le

$$\frac{dT}{dp} = u', \quad \frac{dT}{dq} = v', \qquad \left(\frac{dT}{du}\right) = -\frac{dT}{du}, \qquad \left(\frac{dT}{dv}\right) = -\frac{dT}{dv};$$

per le quali le formole (3) riduconsi alle

$$p' = \frac{d(U-T)}{du}, \qquad q' = \frac{d(U-T)}{dv},$$

e queste insieme alle due

$$\frac{dT}{dp} = u', \qquad \frac{dT}{dq} = v'$$

sono le quattro formole richieste.

4°. Dalle equazioni (4) si passa facilmente alle

$$E'u' + Eu'' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dE}{du}u'^2 + \frac{dG}{du}v'^2\right) + \frac{dU}{du},$$

$$G'v' + Gv'' = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dE}{dv}u'^2 + \frac{dG}{dv}v'^2\right) + \frac{dU}{dv}.$$

Ora

$$E' = \frac{dE}{du}u' + \frac{dE}{dv}v', \qquad G' = \frac{dG}{du}u' + \frac{dG}{dv}v',$$

per cui sostituendo e riducendo si avranno le

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{du'\sqrt{E}}{dt} = \dfrac{v'}{2\sqrt{E}}\left(\dfrac{dG}{du}v' - \dfrac{dE}{dv}u'\right) + P \\[2ex] \dfrac{dv'\sqrt{G}}{dt} = \dfrac{u'}{2\sqrt{G}}\left(\dfrac{dE}{dv}u' - \dfrac{dG}{du}v'\right) + Q. \end{cases}$$

Si indichi con ω l' angolo che il raggio del circolo osculatore la linea $v = \text{cost.}$ nel punto di coordinate u, v fa colla tangente nello stesso punto alla $u = \text{cost.}$, e con ρ il raggio del circolo osculatore medesimo. Si avrà, come è noto

$$\frac{1}{2}\frac{\frac{dE}{dv}}{E\sqrt{G}} = \frac{\cos\omega}{\rho}, \quad \text{ed anche} \quad \frac{1}{2}\frac{\frac{dG}{du}}{G\sqrt{E}} = \frac{\cos\omega_1}{\rho_1},$$

essendo le ω_1, ρ_1 rispetto alla linea $u = \text{cost.}$ ciò che sono le ω, ρ rispetto alla linea $v = \text{cost.}$ Alle equazioni superiori si potranno quindi sostituire le

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{du'\sqrt{E}}{dt} = v'\sqrt{G}\left[\dfrac{\cos\omega_1}{\rho_1}v'\sqrt{G} - \dfrac{\cos\omega}{\rho}u'\sqrt{E}\right] + P \\[2ex] \dfrac{dv'\sqrt{G}}{dt} = u'\sqrt{E}\left[\dfrac{\cos\omega}{\rho}u'\sqrt{E} - \dfrac{\cos\omega_1}{\rho_1}v'\sqrt{G}\right] + Q. \end{cases}$$

Chiamisi θ l' angolo che la trajettoria sulla superficie fa colla linea $u=$cost., ed s l'arco percorso nel tempo t, sussisteranno le due equazioni

$$v'\sqrt{G} = s'\cos\theta, \qquad u'\sqrt{E} = s'\operatorname{sen}\theta;$$

per i quali valori le equazioni superiori si trasformano nelle

$$s''\operatorname{sen}\theta + s'\cos\theta\,.\,\theta' = s'^2\cos\theta\left(\frac{\cos\omega_1}{\rho_1}\cos\theta - \frac{\cos\omega}{\rho}\operatorname{sen}\theta\right) + P$$

$$s''\cos\theta - s'\operatorname{sen}\theta\,.\,\theta' = s'^2\operatorname{sen}\theta\left(\frac{\cos\omega}{\rho}\operatorname{sen}\theta - \frac{\cos\omega_1}{\rho_1}\cos\theta\right) + Q\,.$$

Queste equazioni moltiplicate ordinatamente per $\operatorname{sen}\theta$, $\cos\theta$ quindi sommate danno

$$(7) \qquad s'' = P\operatorname{sen}\theta + Q\cos\theta;$$

e moltiplicate per $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$ e poi sottratte danno

$$(8) \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos\omega_1}{\rho_1}\cos\theta - \frac{\cos\omega}{\rho}\operatorname{sen}\theta + \frac{P\cos\theta - Q\operatorname{sen}\theta}{s'^2}.$$

Quest' ultima equazione può ridursi ad una forma assai più semplice. Infatti chiamando r il raggio di contingenza geodesica della linea descritta dal mobile, vale a dire il raggio del circolo osculatore della linea piana nella quale si trasfigurerebbe la trajettoria, considerata come linea di contatto fra la superficie data ed una superficie sviluppabile, allorquando quest' ultima si distendesse in un piano, si ha come è noto

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} - \left(\frac{\cos\omega_1}{\rho_1}\cos\theta - \frac{\cos\omega}{\rho}\operatorname{sen}\theta\right),$$

per cui l' equazione superiore diventa la

$$\frac{1}{r} = \frac{P\cos\theta - Q\operatorname{sen}\theta}{s'^2},$$

dalla quale

$$(9) \qquad P\cos\theta - Q\operatorname{sen}\theta = \frac{s'^2}{r}.$$

Le equazioni (7), (9) tengono luogo delle (6) e quindi delle (4). Ora osservisi essere $P\operatorname{sen}\theta + Q\cos\theta$ la componente diretta secondo la tangente alla trajettoria della risultante di tutte le

forze sollecitanti il mobile, e $P\cos\theta - Q\,\mathrm{sen}\,\theta$ la componente della forza medesima diretta secondo la tangente alla trajettoria ortogonale della linea descritta dal mobile. È evidente l'analogia fra le formole (7), (9) e quelle che si danno comunemente per le questioni di moto di un punto sopra una linea. Dalle (9) se $P=0$, $Q=0$, oppure $P\cos\theta - Q\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$, si ha $r=\omega$, cioè la linea descritta dal mobile è geodetica. Dalla equazione medesima se $P\cos\theta - Q\,\mathrm{sen}\,\theta = ks'^2$, k costante, si ha $r=\frac{1}{k}$; cioè la linea descritta dal mobile sarà della famiglia di quelle della massima o minima area fra le isoperimetre.

5°. La equazione (8) può porsi sotto una forma che prestasi facilmente all'integrazione in alcuni casi. Infatti rammentati i valori di $\frac{\cos\omega}{\rho}$, $\frac{\cos\omega_1}{\rho_1}$ si passa da quella alla seguente

$$\frac{d\theta}{ds}\sqrt{EG} = \frac{\cos^2\theta}{v'}\left\{\frac{\frac{dG}{du}}{2G}s' + \frac{P\sqrt{E}}{s'}\right\} - \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{u'}\left\{\frac{\frac{dE}{dv}}{2E}s' + \frac{Q\sqrt{G}}{s'}\right\},$$

e da questa richiamati i valori di $\mathrm{sen}\,\theta$, $\cos\theta$, alla

$$\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\frac{d\theta}{ds} = \cos^2\theta\left\{\frac{\frac{dG}{du}}{2G} + \frac{\frac{dU}{du}}{2(U+H)}\right\}\frac{du}{ds} - \mathrm{sen}^2\theta\left\{\frac{\frac{dE}{dv}}{2E} + \frac{\frac{dU}{dv}}{2(U+H)}\right\}\frac{dv}{ds}$$

per essere $$s'^2 = 2(U+H).$$

Moltiplicando i termini dell'equazione superiore per $2GE(U+H)$, la risultante si riduce alla

$$2GE(U+H)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\frac{d\theta}{ds} = E\cos^2\theta\frac{dG(U+H)}{du}\frac{du}{ds} - G\,\mathrm{sen}^2\theta\frac{dE(U+H)}{dv}\frac{dv}{ds}, \tag{10}$$

la quale evidentemente è l'equazione della trajettoria.

Si indichi con λ una funzione di u e di v, e suppongasi essere

$$G = \lambda\varphi(v), \qquad E = \lambda\psi(u);$$

l'ultima equazione trovata dopo alcune riduzioni mutasi nella

$$2\lambda(U+H)\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\frac{d\theta}{ds} = \cos^2\theta\frac{d\lambda(U+H)}{du}\frac{du}{ds} - \mathrm{sen}^2\theta\frac{d\lambda(U+H)}{dv}\frac{dv}{ds}.$$

Dalla forma di questa equazione apparisce subito che ogni qualvolta risulti

$$\lambda\,(\mathrm{U}+\mathrm{H})=f(u)-\mathrm{F}(v),$$

la equazione stessa potrà integrarsi. Infatti essa riducesi alla

$$2\,[f(u)-\mathrm{F}(v)]\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta\,\frac{d\theta}{ds}=\cos^2\theta\,f'(u)\,\frac{du}{ds}-\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{F}'(v)\,\frac{dv}{ds},$$

che integrata dà

$$(11)\qquad f(u)\cos^2\theta+\mathrm{F}(v)\,\mathrm{sen}^2\theta.=\mathrm{A}$$

A costante; e quest' ultima è l' equazione della trajettoria alle derivate del primo ordine. Nel caso considerato più sopra sono compresi tutti quelli trattati dal Sig. Liouville nella Memoria citata, la formola cui siamo giunti coincide perfettamente colle sue in quei casi particolari.

Per applicare le formole trovate a qualche esempio supponiamo che la superficie sulla quale muovesi il punto materiale sia rappresentata dalla equazione

$$\frac{x^2}{t^2-a^2}+\frac{y^2}{t^2-b^2}+\frac{z^2}{t^2-c^2}=1,$$

e le superficie a parametri variabili dalle

$$\frac{x^2}{u^2-a^2}+\frac{y^2}{u^2-b^2}+\frac{z^2}{u^2-c^2}=1$$

$$\frac{x^2}{v^2-a^2}+\frac{y^2}{v^2-b^2}+\frac{z^2}{v^2-c^2}=1.$$

Queste equazioni danno

$$x^2=\frac{(t^2-a^2)(u^2-a^2)(v^2-a^2)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\quad y^2=\frac{(t^2-b^2)(u^2-b^2)(v^2-b^2)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)},\quad z^2=\frac{(t^2-c^2)(u^2-c^2)(v^2-c^2)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

e quindi

$$\mathrm{E}=\frac{u^2\,(t^2-u^2)\,(v^2-u^2)}{(u^2-a^2)\,(u^2-b^2)\,(u^2-c^2)},\qquad \mathrm{G}=\frac{v^2\,(t^2-v^2)\,(u^2-v^2)}{(v^2-a^2)\,(v^2-b^2)\,(v^2-c^2)}.$$

Per cui se avrà luogo la

$$\mathrm{U}+\mathrm{H}=\frac{f(u)-\mathrm{F}(v)}{v^2-u^2}$$

la equazione della trajettoria sarà la (11) essendo $\lambda=v^2-u^2$.

Suppongasi che il sistema di linee per le quali $v = \text{cost.}$ sieno geodetiche; assumendo come si fa comunemente pel parametro u la lunghezza di un arco delle linee medesime si avrà $E = 1$, per cui se ritiensi anche essere U funzione della sola variabile u, la equazione (10) darà

$$2G(U+H)\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\frac{d\theta}{ds} = \cos^2\theta\frac{dG(U+H)}{du}\frac{du}{ds},$$

che integrata conduce alla

$$G\cos^2\theta = \frac{k}{U+H}$$

k costante. Se $U = 0$ e quindi la linea descritta dal mobile sia geodetica si ha

$$\cos\theta = \frac{A}{\sqrt{G}}$$

proprietà notissima pel caso delle superficie di rotazione.

6°. Le circostanze del moto di un punto materiale sopra una superficie nelle ipotesi ammesse quì sopra, si deducono completamente dalle equazioni (5). Verremo così ad estendere ad una superficie qualunque un teorema dimostrato dal Signor Jacobi per le sole superficie di rotazione (*). Dalle (5) si hanno le equazioni

$$u'' = \tfrac{1}{2}v'^2\frac{dG}{du} + P$$

$$\frac{dv'\sqrt{G}}{dt} = -\frac{1}{2\sqrt{G}}u'v'\frac{dG}{du}.$$

La seconda di queste integrata dà

$$Gv' = \alpha \tag{12}$$

α costante arbitraria. Per questo valore la prima equazione diventa

$$u'' = \alpha^2\frac{\frac{2G}{du}}{2G^2} + P, \tag{13}$$

dalla quale integrando e riducendo

$$u' = \sqrt{\left[2\int P\,du - \frac{\alpha^2}{G}\right]},$$

(*) Journal de Crelle; T. 24. — Journal de l'Ecole Polytecnique; T. 19.

e quindi

$$\frac{dt}{du}=\frac{1}{\sqrt{\left[2\int P\,du-\frac{a^2}{G}\right]}},$$

e

$$(14)\qquad t+A=\int\frac{1}{\sqrt{\left[2\int P\,du-\frac{a^2}{G}\right]}}\,du.$$

Ma dalla (12) si ha

$$\frac{dv}{du}=\frac{a}{G}\,\frac{dt}{du},$$

per cui si avrà anche la

$$(15)\qquad v+B=a\int\frac{1}{G\sqrt{\left[2\int P\,du-\frac{a^2}{G}\right]}}\,du.$$

Le equazioni (14), (15) sono le soluzioni del problema: la (14) avendo origine dalla (13) ci porge il tempo impiegato dal mobile a percorrere l' arco di geodetica per la quale $v=$ cost., e la (15) ci fa conoscere la posizione della geodetica medesima rispetto ad una fissa.

Supponiamo che la superficie sia di rotazione, i meridiani saranno le linee geodetiche, i paralleli le trajettorie ortogonali. Riteniamo essere l' asse delle x quello della superficie, ed indichiamo con r il raggio del parallelo corrispondente al punto di coordinate x, y, z della superficie; e sia $x=\phi\psi(r)$ la equazione di un meridiano qualunque. Chiamisi v l' angolo che il meridiano corrispondente al punto in cui trovasi il mobile alla fine del tempo t fa con un meridiano fisso che supporremo coincidere col piano delle xz; e sia u l' arco di quel meridiano. Saranno $y=r\,\mathrm{sen}\,v$, $z=r\cos v$ e quindi $E=1$, $G=r^2$, e le equazioni (14), (15) diverranno

$$t+A=\int\frac{1}{\sqrt{\left[2\int P\,du-\frac{a^2}{r^2}\right]}}\,du,$$

$$v+B=\int\frac{a}{r^2\sqrt{\left[2\int P\,du-=\frac{a^2}{r^2}\right]}}\,du,$$

od anche

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} t+\mathrm{A} &= \int \frac{\sqrt{[1+\varphi'^2\psi'^2(r)]}}{\sqrt{\left[2\int \mathrm{P}\,du-\frac{\alpha^2}{r^2}\right]}}\,dr, \\ v+\mathrm{B} &= \int \frac{\alpha\sqrt{[1+\varphi'^2\psi'^2(r)]}}{r^2\sqrt{\left[2\int \mathrm{P}\,du-=\frac{\alpha^2}{r^2}\right]}}\,dr, \end{aligned}\right.$$

le quali sono le formole trovate direttamente dal Sig. Jacobi.

7°. Supponiamo l' asse della superficie di rotazione essere verticale, ed agire sul punto materiale la sola gravità. Sarà $\mathrm{P}=g\frac{dx}{du}$, e quindi per una delle superiori equazioni:

$$\frac{dv}{du}=\frac{\alpha}{r\sqrt{[r^2(2gx+2\beta)-\alpha^2]}}$$

β costante introdotta dalla integrazione. A determinare le costanti α, β si osservi che se con k indicasi la velocità iniziale, con θ l' angolo che la direzione della medesima forma colla sua projezione sul meridiano che passa pel punto della superficie in cui trovasi il mobile al principio del tempo; il valore di rv' corrispondente a $t=0$, sarà $k\,\mathrm{sen}\,\theta$; e quindi chiamando d il valore di x corrispondente a $t=0$, si avrà

$$(r^2 v')_0=\psi(d)\,k\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

talchè per la (12) sarà

$$\alpha=\psi(d)\,k\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

essendo $r=\psi(x)$ il valore di r ricavato dalla $x=\varphi(r)$.

Così dalla (13) o dalla susseguente si ha

$$k^2\cos^2\theta=2gd+2\beta-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta,$$

e quindi

$$2\beta=k^2-2gd.$$

Questi valori posti nella equazione superiore danno

$$\frac{dv}{du}=\frac{\psi(d)\,k\cos\theta}{r\sqrt{[r^2(2g(x-d)+k^2)-\psi^2(d)\,k^2\cos^2\theta]}},$$

e siccome dalla equazione $x = \phi(r)$ si è dedotta la $r = \psi(x)$, sarà anche

$$(17) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{\psi(d)\, k \cos\theta \, \frac{du}{dx}}{\psi(x)\sqrt{[\psi^2(x)(2g(x-d)+k^2) - \psi^2(d)\, k^2 \cos^2\theta]}}.$$

Sia

$$\psi(x) = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$$

la superficie sarà un elissoide di rotazione, e si avrà

$$(18) \quad \frac{dv}{dx} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\sqrt{(a^2-d^2)}\, k \cos\theta \sqrt{(a^2+e^2 x^2)}}{(a^2-x^2)\sqrt{[(a^2-x^2)(2g(x-d)+k^2)-(a^2-d^2)k^2\cos^2\theta]}},$$

avendo posto $e^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2}$.

Nella Sezione VIII.ª della seconda parte della Meccanica Analitica, Lagrange ha dimostrato che allorquando un punto pesante si muove sopra una sfera, la curva che esso descrive presenta una serie di punti le di cui ordinate verticali sono alternativamente massime o minime. Questa proprietà la quale formò anche argomento ad una nota del Sig. Puiseux (*) può venire estesa ad un gran numero di casi mercè delle formole trovate.

Considerando la equazione (18) è facile il concepire che i valori della x i quali annulleranno il denominatore nel secondo membro della medesima senza annullare il numeratore corrisponderanno alle ordinate massime o minime dei punti della linea descritta dal mobile. Ora questi valori della x esistono effettivamente, giacchè facendo nel polinomio sotto il segno radicale, $x = -\infty$, $x = -a$, $x = d$, $x = a$ i risultati sono positivo, negativo, positivo e negativo; talchè la equazione risultante dall'eguagliare a zero quel polinomio ammette tre radici reali. Anzi se indicansi con m, ed n i valori, ordinatamente compresi fra $x = a$, $x = d$; $x = d$, $x = -a$, che

(*) Sur le mouvement d' un point matériél pesant sur une sphère. Journal de Liouville; T. 7.

soddisfanno alla detta equazione, sarà m il valore massimo di x, n il valore minimo.

Quanto si è detto partendo dall' equazione (18) intorno alla linea descritta da un grave sopra l' Elissoide di rotazione, evidentemente osservando alla forma della (17) potrà valere per un grandissimo numero di altri casi; ed inoltre la proprietà può verificarsi anco in altre ipotesi sulla natura della forza agente, il che facilmente provasi in molti casi particolari usando della seconda delle equazioni (16).

SULLA INOCULAZIONE DE' MORBI IN GENERALE
ED IN PARTICOLARE SU QUELLA ORA PROPOSTA PER LA POLMONEA BOVINA

MEMORIA

DI GIULIO SANDRI

SOCIO ATTUALE

Ricevuta il 15 *Marzo* 1853.

1. Fra i molti ritrovamenti, onde si gloriano i tempi nostri, da giornali, gazzette ed altri pubblici scritti or ponesi anche la guisa facile di preservare la specie bovina dalla sua Polmonea. Di qual vantaggio sarebbe per essere un tale preservamento io non intendo qui di mostrare, conoscendo ben tutti qualmente siffatta malattia, benchè non usi infierire con devastatrici invasioni, pure insorgendo qua o colà pressochè in ogni tempo, all' agricoltura, al commercio e alle mense rapisce alla fin fine un grandissimo numero de' preziosi individui. Mio intendimento si è quello di venir facendo su questo ritrovato alcune considerazioni che pajonmi necessarie, toccando prima in generale l' importante argomento dell' inoculazione de' morbi.

2. Questa inoculazione, che dimora nel trasportar sopra sano individuo materia capace di sviluppare un morbo simile a quello, dal quale essa venne prodotta, può avere due scopi; cioè quel di conoscere se un tal morbo sia contagioso o in qual guisa trasmettasi; e quello di preservar da esso morbo.

3. Quanto al primo scopo vuolsi avvertire principalmente, che il comunicarsi del male coll' inoculazione mostra ch' egli è appiccaticcio; ma il non comunicarsi punto non mostra che tale non sia; vale a dire provano solo i casi positivi, e i negativi non provan nulla per numerosi che sieno: perciocchè

assai circostanze ponno contribuire al non comunicarsi del male che nondimeno sia contagioso. E primamente può contribuirvi l' esser il morbo tale da non potersi per innesto comunicare, o perchè di natura sua il germe sia volatilissimo e non soggetto ad umana manipolazione, come quello della pertosse; od anche fisso, ma da non si poter introdurre integro con questo mezzo nell' organismo, come addivien della scabbia. E in secondo luogo si vuol sapere scegliere la materia che sia veramente infettiva; il tempo in cui si trovi matura, nè prima nè dopo; imperciocchè in entrambi questi casi suol tornare inefficace; e trasceglier eziandio il modo acconcio agli speciali contagi, poichè parecchi aver ponno una peculiare via d' introduzione, fuor della quale non s' introducono, come noi abbiam dimostrato succeder anche nella Golpe del frumento. E la parte pure si vuol conoscere accomodata all' inoculazione: ed altri requisiti altresì fanno d' uopo noti spesso alla sola Natura, la mancanza d' un solo de' quali può render vana l' operazione. Di che avvien che alle volte il solo accidente renda proficuo l' innesto, e tanti per assai tempo lo tentino indarno; ed alcuno soltanto alla fine riesca, siccome videsi dell' idrofobia: la quale da replicatissime sperienze tornate infruttuose sembrava che non fosse comunicabile dagli erbivori ad altri animali, e finalmente anche da essi fu poi comunicata.

4. E vuolsi anche por mente, che alcun male può di qualche guisa trasmettersi ad una specie, benchè di essa proprio non sia, vale a dire ad essa non si comunichi senza un deciso apposito innestamento. Nel che poi due casi si ponno dare: cioè o che alla specie non propria il male per inoculazione trasmettasi di leggeri, come il vaccino all' uomo e alla pecora; o che si trasmetta assai difficilmente, come il moccio del cavallo all' uomo. Può in oltre addivenire che il trasmesso più suscettivo non sia di trasmettersi, perchè il germe non possa giungere a maturazione, come il vaccino che si appigli al cane, al porco, al cavallo, all' asina ec.; e parecchi altri esterni malori, come certi erpetici, diversi carbonchiosi, che

da varie specie d'animali passino all'uomo. E per contrario può succeder eziandio, che il germe trasfuso nell'altra specie vi provi bene, giunga a maturazione e possa di nuovo trasfondersi, come il vaccino, che dalla vacca passato all'uomo o alla pecora, può far quinci novelli passaggi (N. 14.): e come narrasi pure del moccio cavallino, che dal cavallo passato all'uomo, da questo al cavallo far possa ritorno.

5. Dal detto per tanto due cose principalmente ne vengono: l'una, che se l'inoculazione con effetto prova esser il mal contagioso, dalla non effettiva non può dedursi che contagioso non sia: l'altra, che coll'inoculazione si ponno trasmetter de' morbi che altrimenti non si trasmetterebbono mai, morbi che per quella specie cui trasmettonsi, contagiosi propriamente non sono.

6. Ma l'inoculazione che dir potrebbesi di scopo scientifico, noi l'abbiam qui toccata quasi soltanto per incidenza, essendo nostro principale intendimento vedere ove sia indicata ovver convenevole quella di scopo pratico, la qual fassi colla mira di preservare. Or siccome con essa tendesi ad avere, comunicandol coll'arte, più mite un male che venuto naturalmente da sè tornerebbe assai periglioso, per la sua convenienza tre cose sopratutto richieggonsi: vale a dire che il male sia inevitabile, che avuto una volta più non ritorni, e che si possa moderarne il corso, limitandolo anche a parti manco importanti alla vita. Richiedesi la prima condizione, perchè se il male sia di leggeri evitabile, non è da procurarselo certo a bello studio. Si richiede la seconda, perchè se avuto può ritornare, non è ragionevole che si tenti di soffrirlo come che sia una volta di più. E la terza è richiesto, perchè se il mal non sia tale da poterne domar la violenza, o dirigerla dove men nuoce, non giova chiamarci adosso più presto quello che ci avrebbe incolto più tardi o non mai.

7. E quali sono i morbi inevitabili? Un tempo si credeva il vajuolo: ma poi s'è conosciuto che il germe non era insito nell'umano organismo, poichè si poteva comunicar coll'innesto, ed era straniero ai paesi ove la contagione ancora non l'aveva introdotto.

E i morbi che avuti più non ritornano quali sono? Prima si pensava essere tutti i contagiosi, conciossiachè si mettesse per carattere de' contagi quello di non ritornare: ma come dimostrammo altrove (1), falso è un tal carattere; e tanto, che anzi alcuni avuti una volta sembrano allignare più agevolmente, come la sifilide e la migliare. Non v' ha contagioso morbo il quale dir si possa che non ritorni. V' ebbe de' carbonchiosi che rinnovaron l' assalto fino a tre fiate agli stessi individui nella medesima invasione (2). E per citar altri esempi, il Prof. Rinaldini dice che nella febbre ungarica de' buoi da lui trattata il 1800, alcuni ricuperati perivano per recidiva: e il Leroi in quella ch' ebbe a trattare nel 1798 vide la recidiva in 9 capi dopo sette mesi, e in 5 dopo dieci da che n' erano stati guariti. Frequentissimi ritorni ha il colera; il medico inglese Gearle vuolsi il provasse per ben tre volte: nè sono essi tanto estranei al morbillo, al vajuolo, alla petecchiale, come ricordan chiarissimi attenti medici (3).

E da potersene moderare la forza coll' inoculazione, o rivolgerla a parte meno vitale, sembra soltanto esservi qualche mal cutaneo, la cui eruzione sia dato determinare più verso un luogo che un altro, inserendo in quello il relativo germe, e incontrando che questo poi non si assorbisca in guisa da recarsi colla circolazione a nuocer altrove.

8. Non trovandosi pienamente le tre condizioni prefate in verun morbo, ne viene pur che in nissuno si possa della inoculazione aver pieno il buon successo. In parte però esse trovaronsi nel vajuolo umano, e perchè terribili n' erano le invasioni, e non grande la probabilità di andarne sempre immune; e perchè avuto una volta non suole, almeno per qualche tempo, ripeter l' assalto; e perchè essendo morbo della cute, se ne

---

(1) *Sull' idea generale di Contagio.* Atti del Veneto Istituto di Scienze Lettere ed Arti. Tom. VI, Puntata 1ª, pag. 111; e Volume IV di sue Memorie.

(2) *Institutions Vétérinaires.* Tom. VI, pag. 243.

(3) Penolazzi. *Del Morbo migliare*; pag. 162.

poteva in certo modo richiamare lo sfogo principale a situazioni, ove tornasse men periglioso, meno offendesse gli organi de' sensi, e in generale men deformasse l' esterno aspetto. E quinci benchè non di rado l'inoculazione fosse poco fortunata, propagando anche alle volte l' infezion naturale, pure in complesso riusciva assai vantaggiosa, e meritava che si praticasse non senza fiducia anche generalmente prima (1) che s' introducesse il vaccino.

---

(1) L'inoculazion del vajuolo umano, cognita come pare da gran tempo ai Chinesi, si eseguiva pure appo gli Arabi, da cui l' appresero i popoli della Circassia e della Giorgia; dai mercatanti de' quali (che sui Negri, onde faceau vergognoso traffico, la praticavano affinchè dal morbo non morissero o non restassero sfigurati) appararonla poi gli Europei. Usavasi specialmente in Tessaglia e sulle coste del Bosforo, quando Miledy Wortley moglie dell' Ambasciatore a Costantinopoli, vi fece inoculare la prole che unica aveva. Tornata essendo in Inghilterra, ne imitò l' esempio la Regina Sposa di Giorgio primo. Dietro queste coraggiose donne, e a fidanza di quanto aveano scritto i due Medici Italiani Timoni e Pilarini, l' uno al servigio del Sultano, l' altro alla Corte di Russia, l' uso di tale innesto si diffuse in varie parti, come in Inghilterra, ove il Collegio di Londra nel 1755 ne dimostrò con moltiplicate sperienze l' utilità: ed in Francia, dove se ne proclamarono molto i vantaggi dal celebre Condamine; e quantunque proscritto dal 1729 al 1738, per una gravissima invasion di vajuolo ne tornò indi a poco in favore la pratica. La quale ebbe poscia in questi luoghi, od in quelli, molti seguaci finchè sottentrò la vaccinazione.

La patria del vajuolo vaccino vuolsi Glocester in Inghilterra, sebbene altri asserisca di averlo veduto anche altrove. Fino dal 1768 Sutton e Fowster s' accorsero che andava immune dal vajuolo umano chi avesse preso quel delle vacche trattandone d' infette: ma solo nel Giugno 1798 Jenner pubblicò le sue Osservazioni che poser in chiaro la tanto preziosa facoltà preservatrice. I primi che annunciàronne all' Europa i felici successi furono i Compilatori della Biblioteca Britannica. La vaccinazione dove più e dove men presto fu poi propagata quasi generalmente: in Italia sopratutto per le cure indefesse del benemerito Sig. Dott. Luigi Sacco. In Verona cominciò verso la metà del 1801, avendola praticata il Prof. in Chirurgia Sig. Antonio Manzoni il 25 Maggio sopra un nobile Salerno; e il 2 Giugno sopra una marchesa Maffei il Medico Signor Matteo Barbieri, che si adoperò assai caldamente collo scritto, colla voce e coll' opera a diffonderla e vincer gli ostacoli che per varie guise gli si opponevano.

L' innesto del vajuolo pecorino conosciuto in Levante da più d' un secolo, in Europa si usò massimamente dopo introdottavi la vaccinazione. Per questo Cenno Storico

9. E per somiglianti motivi si trovò utile cotale operazione anche nel vajuolo pecorino; che sviluppatosi naturalmente deserta quasi affatto l'ovile nel quale s' insinua: e inoculato opportunamente suol tener un corso regolare, far poche vittime e preservare da un' imminente naturale invasione. Ma perchè opportuno e proficuo tale innesto riesca due cose domandansi. L'uno che il vajuolo sia per poco inevitabile, cioè serpeggi in armenti vicini; perciocchè dove questo male non regna, sarebbe fuor di ragione il farlo soffrire col mezzo dell' arte: e l' altra che si pratichi al tempo stesso l' operazione a tutte le pecore; poichè altrimenti l' inoculato in alcune potrebbe comunicar ad altre il naturale e cagionar molto guasto.

10. In questi due morbi l' innesto riuscì di vantaggio in quanto vi si rinvennero le tre condizioni soprammentovate (N. 6.); ma non è palese che tornasse generalmente utile in altri, e meritasse che se ne rendesse comune la pratica. Si sa quale ne fosse il successo de' tentativi fatti da qualche tempo nell' umana peste. Si conoscono i recenti sulla *sifilizzazione* (1). Ed è noto eziandio quali fossero gli esiti di altre consimili inoculazioni tentate negli animali, delle aste, per esempio, e massimamente della peste bovina; i quali in fine si riconobbero inutili o perniciosi, malgrado i vantaggi che prima se ne decantarono da parecchi.

11. I vantaggi che alle volte sembra in sulle prime ottenersi, anzichè all' inoculazione in sè medesima, si debbono ad altro: alle cure, esempigrazia, usate avanti o dopo l' operazione; al praticarsi questa allorchè l' invasione sta in sul declinare e il male volge da sè stesso a buon termine; e massime al caso, il quale in materia di contagi ha tanta parte, risparmiando anche individui, che maggiormente si espongono ad esserne colti.

Vedi Barbieri *La Vaccina alla prova*; Verona 1802. Luigi Sacco: *Trattato di Vaccinazione*; Milano 1809. Laurin: *Epizoozie*; Milano 1829. Alibert: *Malattie della pelle*, traduzione; Venezia 1835.

(1) Giornale Veneto di Scienze mediche, Fasc. di Luglio 1852.

12. A tentare inoculazioni de' morbi col fine di preservare, non può troppo valere l'esempio della vaccinazione, che doma sì felicemente il vajuolo umano. Fra l' altre e questa v' ha gran divario. Questa per faustissima ventura eccita nella nostra macchina un' affezione sempre mite e benigna, la quale suole per certo tempo, se non preservare al tutto, almeno render difficilissimo l' attacco d' un mal affine d' indole assai perniciosa. Ed oltre tale mitezza e benignità, questo contagio essendo estraneo all' umana specie, non si diffonde nè anche naturalmente fra essa (N. 5.). Laddove nelle altre inoculazioni è lo stesso contagio de' singoli morbi che innestasi; il quale può alle volte spiegare la natural sua malizia, e da sè propagarsi anche ad altri individui (N. 8. 9.).

13. Il vedere che il vaccino valeva contro il vajuolo umano, fe' da principio nascer l' idea che potesse preservar eziandio da altri contagi, come, verbigrazia, dal vajuolo pecorino e dal rantolo de' cani: ma quantunque esso prenda ben nella pecora, e in qualche guisa anche nel cane, non li preserva propriamente da questi lor mali; non preserva punto il cane, e solo imperfettamente o in alcuni casi la pecora, il cui vajuolo è similissimo a quello dell' uomo.

14. E qui si dee ricordare che nella pecora, benchè non v' abbia sicuro preservamento, il vaccino ottiene, come si disse (N. 4.), pieno sviluppo e maturazione, e può trasportarsi poi con effetto all' uomo e alla vacca. Sicchè agevolmente passa per innesto dall' una all' altra di queste tre specie: e quantunque nella pecora indeboliscasi alquanto, riprende energia ripassando all' uomo od alla giovenca. E quinci si ha pur il mezzo di mitigare, ove sembri soverchia, la forza di quel di quest' ultima, facendolo passar per la pecora pria di giungere all' uomo.

15. Siccome poi si dice passar il vaccino senza perder sua efficacia, dall' una all' altra delle tre specie sopraccennate (N. 14.), e siccome presso di noi il vajuolo delle vacche non suol apparire naturalmente, sembrerebbe mezzo acconcio di

procacciarci materia per le vaccinazioni quello d'innestar della presa dall'uomo, sulle lor poppe vicino ai capezzoli, ove usano insorgere le pustole del naturale vaccino. Ciò francherebbe i nostri Governi dal tributo che pagano ogni anno all' Inghilterra facendone venire dall' Istituto Jenneriano, e darebbe di buona qualità quel *virus*, il quale ora o per la sua trista natura, o per mala conservazione, manca sì spesso d' effetto (1).

(1) Perchè il *virus* sia di lodevol natura, la pustola della giovenca, onde si piglia, dee presentar tutti gl' indicj del vero e regolare vaccino, essere depressa nel mezzo co' lembi assai rialzati di tinta plumbea, con intorno un disco rosseggiante che tira poscia al violaceo. Ne' primi giorni dopo la comparsa, allorchè matura, traforasi a un lato, e l' umor linfatico estrattone riparasi dall' umido e dal caldo, e specialmente dall'aria e dalla luce ponendolo fra lamine di vetro o tubi chiusi ermeticamente, di color nero od avvolti in neri oggetti. Si considera poco efficace la marcia susseguente alla maturazione, e la crosta polverizzata, e l' umor tolto dal centro; a paro di quello che prendesi nell'innestato sull'uomo da pustola che siasi aperta collo stromento o per accidente.

Il *virus* per l' innesto del vajuolo pecorino, vuolsi prender anch' esso da pustola del vero vajuolo regolare e benigno allo stato di maturità, mentre si trova piena di linfa sierosa e limpida, valendo poco la torbida od inspessita. Ad aver effetto più mite si consiglia di farla prima passar varie volte successivamente per alcune pecore sanissime, trascegliendo sempre di queste pel nuovo passaggio la pustola più bella, e così seguitando finchè si giunga ad averne sol una, la pustola madre nel punto d' innesto senz' accessorie: dalla quale si piglia onde inoculare l' armento (una pustola bastando per 500 pecore). A differenza del vaccino che può serbar intera la sua attività anche dopo innumerevoli inoculazioni successive, il *virus* pecorino pe' transiti scema di forze; e dicesi che dopo il decimosecondo, o il decimoquinto torni affatto inefficace. Anche pare ch'esso duri attivo minor tempo, benchè tenuto egualmente che l'altro con ogni cautela.

Al buon effetto dell' innesto può contribuir anche la scelta della parte in cui fassi, la stagione, lo stato dell' individuo, e il modo di praticarlo. Il pecorino si fa in siti privi di lana e non soggetti a sfregamento, come alla faccia inferior della coda tre pollici distante dall' ano, e meglio sotto il ventre; scegliendo, se sta in nostro arbitrio, la primavera, l'autunno o il mite verno, e sfuggendo il troppo caldo: e risparmiansene le pecore mal sane, in cui di leggeri il vajuolo si sviluppa maligno. Impieganvisi o filetti di lana carichi di *virus* applicati a foggia di setoncini, o l' ago scanalato, o la lancetta. Questa sembra più conveniente potendosi meglio schivar con essa di andar troppo fondo (oltre la rete malpighiana), e l' uscita del sangue: vuole poi esser nettissima, e non punto arrugginita, poichè l' irritazione di qualsiasi altro corpo turbar potrebbe lo specifico lavoro del *virus*.

16. E quanto all' ora detta conservazione è palese, che sebbene l' effetto soglia tornar più sicuro usando recente materia, innestando cioè da individuo a individuo, o, come suol dirsi per gli uomini, da braccio a braccio; tuttavia siccome non è dato averla sempre sì fresca, o per averla necessitando aver eziandio il male sviluppato naturalmente, non senza pericolo che operi naturali devastatrici invasioni: così alla maggior convenevolezza dell' inoculazione d' un morbo in generale pur comple che l' acconcia relativa materia si possa conservare più o men lungamente anche secca.

17. E soprattutto ove trattasi d' animali, per la mentovata convenienza è pur necessario che il male sia di tal indole da prender agevolmente inoculandolo, come appunto occorreva nel vajuolo umano, ed occorre nel pecorino e nella vaccinazione; poichè dove non prendesse che a stento, dei molti inoculati solo in alcuni, l' incomodo tornar potrebbe assai maggior del vantaggio che se ne avesse per altro rispetto. E il pien successo dell' inoculazione per ciò medesimo dovrebbe pur compiersi in congruo tempo determinato; conciossiachè il troppo lungo o indefinito, darebbe noja, e fors' anche spesa non lieve.

18. Imperocchè ad ottenere il bramato scopo dall' inoculazione è sempre mestieri ch' essa prenda, e il morbo faccia il regolare suo corso imitante quello del morbo che fosse venuto naturalmente. Ed è per ciò che nella vaccinazione se questo corso poi non appare, ella tiensi per non avvenuta, e a conseguire l' effetto vuolsi ripetere. Nè basta che del morbo naturale s' imiti il corso come che sia: ma i conseguitanti morbosi sintomi deon essere propriamente gli speciali caratteristici di esso morbo. Ond' è che pur distinguesi nel vajuolo e nel vaccino il vero dallo spurio; e il corso dello spurio non gode punto della facoltà preservatrice, sebbene affine alquanto a quello del vero, o in apparenza non guari dissimile. Essendo il preservamento dovuto ad una modificazione che soffre l' organo o l' organismo da quella cotal azione specifica (sia che essa tutto consumi l' alimento che potrebbe dare sviluppo a

quel germe, o renda il tessuto della parte incapace di poterlo ancor assorbire, ovvero altra impressione vi faccia atta a respingerlo) è necessario che quel corso peculiare si compia, affinchè s' abbia da preservare (1).

19. Toccato così alla sfuggita le cose occorrenti per render opportuna l' inoculazione preservatrice; le quali sono principalmente che il male sia più o meno in sè stesso inevitabile; che avuto una volta più non ritorni, almanco per un cotal tempo, o assai difficilmente; che se ne possa mitigare la forza, o maggiormente rivolgerla a parti non troppo importanti alla vita; che, massime negli animali, sia coll' arte facilmente comunicabile; e che poi sempre compia regolarmente nell' innestato quel preciso corso ch' è proprio del male insorto naturalmente: noi passiam tosto a ciò che forma il precipuo scopo del presente ragionamento, vale a dire all' inoculazion proclamata quale preservativo della Polmonea bovina. E a chiarir meglio l' assunto pria diamo un cenno di essa malattia.

Cenno della Polmonea.

20. La Polmonea de' buoi è malattia peculiare, che non vuolsi punto confondere coll' altra infiammazion di polmone che questi animali possono avere in comune cogli altri, e che viene da cose già conosciute. Sulla causa della Polmonea diverso molto è il pensamento. Chi la dice generata da circostanze locali, da malo nutrimento, cattivo alloggio, disagio, malignità di stagione ec.; imputandone tante cose, quante son quelle ond' ella si trova preceduta od accompagnata, e punto non la vuol contagiosa. Chi ammette che, generatasi prima da queste o somiglianti cagioni, possa quinci comunicarsi eziandio per contagio. E chi, collo scrivente, da solo contagio crede che

---

(1) Egli è ben vero che alle volte non appare la relativa esterna eruzione, come quando si dice vajuolo senza vajuolo; ma il male del resto fa sempre il caratteristico speciale suo corso, colla durazione, co' moti febbrili e gli altri sintomi che gli son proprj.

sempre sia generata; il quale anche possa rimanere latente più o meno tempo o per entro l' animale medesimo, o fuori di esso in luoghi che alloggiarono infetti e poi non furon purgati. E crede pure che la trascuranza o non esatta esecuzione de' convenevoli spurghi, e più ancora la malaugurata costumanza di vendere di soppiatto gli animali ammorbati, o quelli che con essi stettero in comunicazione (i quali poscia vanno a contaminare gli altri, cui si tramischiano), sieno le principali cause, per le quali siffatto morbo occulto o palese, qua o colà regna quasi costantemente.

21. Il sì diverso opinare sull'indole di questa malattia par che massimamente da due cose derivi. L' una si è la grande incostanza e quasi direbbesi bizzarria di suo procedere quanto al comunicarsi naturalmente; onde tal fiata uno, due, o pochi individui soltanto in un armento, eziandio numeroso, la prendono; o alcuno pure s' infetta che più si trova distante dall' ammorbato. Il Signor Dott. Facen che tante volte e sì da presso osservò la malattia, le niega assolutamente il contagio adducendo che stalle infette non comunicarono il male a stalle vicine, nè ad animali che, senza purificarle, vi si collocarono poi; che ammorbati si mischiarono a sani, senza che a questi si trasmettesse il male; che non si trasmise nè anche dallo stromento che avendo in pria salassato infetti, salassò poscia de' sani senz' esser nettato; nè tampoco dal vaccaro, il quale tratta infetti e sani, e senza lavarsi le mani, con esse contaminate della bava e della mucosità degli ammorbati, pone in bocca il sale a quelli e questi. L' altra cosa che fece rifiutare alla Polmonea la contagione, si fu il non essersi potuta comunicare per via d' innesto. Il Sig. Brugnolo Professore di Veterinaria nella Università di Padova, in una Memoria letta alla Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di quella città, riferisce in proposito « gl' innesti colla materia icorosa di animali pe-
« riti di Polmonea, tentati inutilmente nelle scuole di Lione,
« di Berlino, di Vienna, e le sue proprie sperienze variamente
« ripetute in Moravia, in Islesia, a Vienna e nella Lombar-

« dia » (1). Ma per quanto peso dar vogliasi a queste ragioni, la prima sol proverebbe che l' accidente, il quale suol avere molta possanza sull' andamento de' contagi, moltissima n' ha sopra questo. E la seconda proverebbe soltanto che la Polmonea non è comunicabile per inoculazione, essendo piuttosto l' ordinaria e propria sua via di trasfondersi quella dell' inspirazione o del leccamento che mette direttamente ai polmoni; per la qual sola diretta via sembra pur trasfondibile nell' uom la pertosse (N. 3.): ma esse ragioni punto non proverebbero ch' ella non sia contagiosa, quando tale appien si dimostra dall' altro suo procedimento.

22. Omettendo parecchi sintomi comuni ad altre infermità, i principali di questa sono: in sul principio una tosse rara e secca, anche d' un colpo solo, che a motivo di sua tenuità d' ordinario passa inconsiderata per alcuni giorni. Indi si fa più frequente; sceman le urine, e con esse le feccie che divengon anche più consistenti; scema pur il ruminare, e quindi eziandio la voglia di prender cibo. S' aggiunge la febbre; l' animale stassene malinconioso tenendo teso il collo e la testa, e le spalle tra loro discoste. Suol rimanere in piedi; e se si corica, subito s' alza. Il respiro diventa alquanto breve ed affannoso, e sensibilissima la spina dorsale sotto la man che la prema. La femina dà latte più sciolto, di colore tirante al ceruleo; il diminuisce, ed anche il cessa interamente. Progredendo il male si manda bava dalla bocca, e mucosità dalle narici; sentesi un cotale scroscio di denti, e per consueto sopravvien la diarrea di materie nere e fetenti. Da ultimo l' animale sen giace quasi sempre sdrajato, e indi a non molto spira. La malattia dopo essersi spiegata dura dai sei fino ai trenta giorni in quegl' individui che muojono; ed anche oltre i quaranta in quelli che guariscono. Il ristabilimento però in questi non è sempre compito; perciocchè restan sovente degl' interni guasti

(1) Relazione delle Memorie lette all' I. R. Accad. di Scienze Lettere ed Arti in Padova negli anni 1841-2. Padova 1842.

che, se non mostransi prima, vengono in vista qualora dopo alcun tempo l' animale diasi al macello.

23. L' ispezion cadaverica negli animali che muojono fa vedere costante l' alterazione de' polmoni, ove il male tien la sua sede. Alle fiate si trova alterato, o di preferenza, un lobo solo, che più sovente è il sinistro; il cui tessuto si trasforma in una massa consistente assai voluminosa e pesante, screziata pur nell' interno a varie tinte, quasi fosse intarsiata. La cavità del petto rinviensi talor asciutta, presentando così la volgarmente detta *Polmonea secca*: ma d' ordinario avvi raccolta più o meno abbondante di materia sierosa mista a marcia, di special odore, con pezzi giallicci, e come lardosi, di linfa coagulata; membrane ingrossate formanti attacchi preternaturali colle parti vicine. E i segni d' infiammazione, e le infiltrazioni linfatiche, oltre a ciò che sta nel torace, estendendosi anche agli stomachi e ad altri visceri dell' addomine.

24. Chi divide il corso della malattia in periodi o sia stadj; e chi no, come qui sopra (N. 22.) abbiam fatto pur noi, tra perch' essi sovente non sono bene determinati, e perchè avviene anche la morte pochi giorni dopo che il male s' è palesato: conciossiachè ne' bovi, che son di natura poco sensibile, esso possa eziandio covare inosservato, e a poco a poco alterando il polmone crescer in guisa da non essere più rimediabile quando con indicj evidenti si manifesta. Quelli che segnan periodi soglion distinguer i tre: *febbrile-infiammatorio*, *blennorroico*, e *colliquativo*. Ma v' ha pure chi, col Sig. Dott. Tubbi, crederebbe opportuno aggiugnerne un quarto, chiamandolo *d' invasione* o *d' infezione*, abbracciante i fenomeni che insorgono pria ch' entri la febbre.

25. Il più sicuro generale preservativo è l' esatta osservanza delle prescrizioni di sanità, il cansare qualsiasi comunicazione sospetta, il non dar punto luogo alle due cause che dicemmo specialmente mantenere continua quinci o quindi la malattia (N. 20.). E il preservativo particolare per gli animali sospetti, cioè che furono in circostanze d' infettarsi, è, dopo

averli separati dagl' infermi, il lavarli ben anche dentro la bocca e le narici con soluzion di cloruro di calce, il mutar loro potendo a quando a quando la dimora, e il tenerli in aria libera, strofinandoli più volte il giorno con fascetti di paglia asciutta, dopo averli bene stregghiati e ripuliti la mattina; il somministrar ottimo cibo secco e piuttosto scarso, in guisa che se ne stieno a mezzana dieta, sedando la sete con beveroni od acqua leggermente acetata, col trarre pur sangue se la durezza del polso il richiegga. È anche indicata l' operazione solita a praticarsi eziandio nella cura, inserendo radice di elleboro, ovver trocisco di solimato in fondo alla giogaja, traforando poscia il tumore, che ne risulta, con setone spalmato di sostanza vescicatoria, nettando esso ogni giorno con acqua tepida, e conservandolo in azione finch' è passata l' epizoozia (1). Quest' è ciò che di più vantaggioso si riconobbe finora: ma viene adesso proposta altra cosa, che noi tosto vedremo.

Inoculazione della Polmonea.

26. Vuolsi che il Sig. Dott. Willelms di Hasselt nel Belgio, non solo riuscisse a comunicare per inoculazione la Polmonea de' bovi, che per tal mezzo stimavasi incomunicabile (N. 21.); ma eziandio che ne discoprisse nella inoculazione il preservativo. La qual cosa ci si manifesta, oltrecchè da parecchi periodici scritti (N. 1.), più particolarmente dall' Estratto a stampa del Metodo usato dall' Autore, che ci si offerse a intendimento che introducasi eziandio nelle nostre provincie (2); sul quale noi crediam fare le seguenti osservazioni.

27. Nella prima faccia di esso Estratto si legge, che « anche gli animali risanati spesso nuovamente si ammalano, e

(1) A maggiore schiarimento di quanto abbiamo qui ricordato intorno a questa malattia, si veggano i *Cenni sulla Polmonea bovina* del Veterinario Signor Alessandro Andreis. Piacenza 1851.

(2) *Sull' inoculazione come preservativo contro la Polmonea.* Tipi di G. Antonelli. Venezia 1852.

« solo difficilmente e lentamente guariscono ». E più sotto si dice, che un animal risanato non viene una seconda volta attaccato dalla malattia. Nelle quali due proposizioni non si può a meno di ravvisare contraddizione: e si scorge eziandio che, se vera è la prima, l'innesto non può valere allo scopo (N. 6.).

28. Viensi poscia dicendo, che dal non ritornare del male il Sig. Willelms concepì il sospetto che fosse contagioso. Nel che si mette in campo l'idea che carattere de' contagi sia quello di non più ripeter l'attacco, avuti una volta; la quale abbiam dimostrato precedentemente esser falsa (N. 7.).

29. A sperar bene dall' innesto della Polmonea quindi si allega che « anche nella medicina umana le malattie epidemi-« che e contagiose vengono innestate col miglior effetto. » Dalla qual cosa annunciata così generalmente parrebbe credersi che tutte le umane contagiose epidemie si trovassero in questo per noi fortunatissimo caso: mentre di tanti contagi che ponno regnare eziandio epidemici in tal caso si trova il solo vajuolo; ed anche precipuamente per la felice singolare ventura di potersi usare per esso il vaccino (N. 12.).

30. Non conforta molto all'operazione il sapere che a vederne il pien successo deesi alle volte aspettare fino a tre mesi, rimanendo frattanto sempre in riguardo (N. 17.). Nè vi conforta l'incostanza di effetto; imperciocchè scorgesi alcuni individui perire; alcuni aver sintomi gravi che mettono a rischio la vita; alcuni averli leggeri; ed altri non averne punto.

31. E reca pur imbarazzo il non si dire, se per questo si possa conservar la materia disseccata, com'è dato di fare per altri innesti (N. 16.): imperciocchè non parlasi che di fluida, usata o immediatamente o al più otto giorni dopo che fu tolta dall' ammorbato. Che se aver si dovesse ognor fresca, farebbe d'uopo aver sempre anche in atto la malattia naturale: il che può non essere senza gravi inconvenienti (N. 16.).

32. Siccome poi raccomandasi di prendere la detta materia da un animale che trovasi nel primo, od al più in principio del secondo stadio della malattia; e siccome dessa è il sangue

ed il siero che spremesi dal polmone dell' ammorbato, per averla questo debbesi uccidere. Nel che oltre la perdita sicura dell' animale, avvi pure la difficoltà di conoscere quale sia il vero punto acconcio pel suo ammazzamento, non essendo i periodi sempre bene distinti (N. 24.).

33. La ragione per cui raccomandasi un tal punto a prendere la materia per l' innesto è perchè presa di poi tornerebbe troppo veemente, cagionando cangrene e morte. Ma l' esclusiva malizia di questa non pare ben provata, poichè e si notano cangrene e morti anche prodotte dall' altra innestata alla radice della coda; e questa lungi dal porger ognora i gravosi effetti, si vede spesso cagionarne di miti, o non cagionarne veruno.

34. La manuale operazione, come prescrivesi dal Willelms, dimora nel prender materia d' infetto da Polmonea ed inserirla in un sano mediante lancetta piuttosto grande che se ne intinge, facendo due o tre incisioni, e bastando una goccia perchè l' inoculazion sia efficace. Oltre raccomandarsi che la materia si prenda al punto detto di sopra (N. 32.) e non dopo, si consiglia di scegliere a luogo di sua inserzione l' estremità della coda; perciocchè potendo la materia, anche presa nel miglior istante soprammentovato, apportar piaghe estese eziandio con cangrena, vuolsi tener lungi da parti che importano maggiormente alla vita, e l' estremità della coda è la più distante dagli organi essenziali; e se anche si perda, non rileva gran fatto.

35. I sintomi che ne conseguitano sono d' ordinario semplicemente locali d' infiammazione, gonfiezza con talor piaga accompagnata alle fiate, come s' è tocco dianzi, pur da cangrena. Varia n' è l' intensità, ma generalmente mostransi piuttosto lievi. N' è varia eziandio la durata, scomparendo anche alcune volte in pochissimi giorni, e talor quasi appena comparsi. E avviene pur non di rado che sintomi non ne appajano punto. L' Estratto dice in questo proposito, che di 108 animali sperimentati tre soli perirono, e « negli altri 105 capi « o non si spiegarono sintomi, o furono così leggeri che in

« pochi giorni cessarono; soltanto 13 capi perderono l' estre-
« mità della coda: in complesso dunque l' inoculazione produsse
« un' affezione locale, e in generale d' indole assai benigna. »

36. Da ciò sembra dedursi che il preservativo della Polmonea secondo il Sig. Dott. Willelms, consista semplicemente nell' inserire a sano individuo la materia proveniente da infetto, ne succedano poscia, o pur no, morbosi sintomi; e quando questi succedono sono d' ordinario meramente locali alla parte operata, e in generale anche di poco rilievo. Su di che varie cose dansi a considerare.

37. E quella imprima che la Polmonea propriamente non si comunichi. E per fermo non la si può dire comunicata quando non hassi verun segno morboso. Nè si può dire che comunicata sia questa specifica infiammazion del polmone quando avvi soltanto segni di affezione locale all' estremità della coda; i quali pajono mero effetto di sostanza irritante, a un di presso come succede nell' applicazione della radice di elleboro volgarmente detta *veggiatura* (N. 25.). E che non v' abbia che un simile irritamento s' inferisce eziandio dal dirsi valevole l' operazione anche praticandola a malattia cominciata; poichè ove si trattasse di comunicarla, mentr' ella è già principiata, mentre si trova in corso naturalmente, non si vedrebbe che avesse da fare una comunicazione artificiale.

38. Oltre non esservi comunicazione di vera Polmonea, pare non siavi nè anche di vero contagio nè pur localmente al sito operato; poichè non ci si dice che la materia che vi si forma sia atta all' innesto: e se almeno ivi il contagio si trasmettesse, dovrebbe prodursi materia identica a quella onde provenne, e capace di cagionare novellamente il male innestandola in altri individui.

39. E non comunicandosi al polmone il morbo, onde tentasi di garantirlo in futuro, non soffrendo esso organo quel morboso processo preservatore, quell' azione specifica alla quale sta legato il benefico effetto (N. 18.), non s' intende come questo acquistar possa ragione di preservamento. Non generandosi

poi coll'inoculazione materia acconcia ad innestar nuovamente, abbisogna che per eseguir quest' operazione siavi sempre anche in attività la malattia spiegatasi naturalmente, la vera Polmonea, e si cominci dall' uccider animali e dal perderli, come più sopra (N. 32.) s' è pur mentovato.

40. In fine poi viensi a questo dilemma: o la Polmonea colla proposta inoculazione si comunica, o no. Se si comunica veramente come comunicasi, per esempio, il vajuolo, mancherebbe per l' inoculazione ciò che può renderla utile e convenevole; principalmente perchè la Polmonea non è malattia inevitabile; perchè l' averla avuta una volta non si sa se ne preservi nè anche per certo tempo; e perchè non si può limitarne l' effetto a parte meno importante, dovendo fare di necessità il suo corso nel polmone del quale soltanto è propria: e non che esservi di che sperare utilità da tale operazione vi sarebbe di che temer danno per diversi riguardi (N. 30-3. ec.). Se poi la malattia propriamente non si comunica, siccome pare che avvenga coll' accennato metodo del Dott. Willelms, secondo le idee che della inoculazione si hanno, non c' è luogo a sperare preservamento. Sicchè la pratica di essa operazione al detto scopo di preservar dalla Polmonea de' buoi non converrebbe in verun caso: e i buoni successi che dai tentati sperimenti diconsi ottenuti, dovrebbonsi ascrivere all' accidente che nel procedimento di questo contagio ha tanta parte (N. 21.).

41. Che se non a capriccio di ventura i proclamati buoni effetti si dovessero, ma proprio a virtù speciale dell' infetta materia semplicemente inserita nell' infima estremità della coda; sarebbe questa una cosa assai singolare, e quanto singolare altrettanto da esaminar con accuratezza. Nè si potrebbe, come sembra facciasi nell' Estratto, per tale inoculazione istituir analogia con ciò che avvien delle altre; imperciocchè tutt' al contrario qui preserverebbesi un organo senza ch' ei ne patisse il rispettivo morboso processo; un organismo senza che del male porgesse i veri sintomi, si preserverebbe da un contagio, senza che propriamente questo od un somiglievole si trasmettesse;

e tornerebbe effettiva l'inoculazione anche a malattia sviluppata naturalmente. Il che ove da fatti ripetuti e concordi, e dal tempo, che a ben decidere è ancor troppo scarso, venisse appieno avverato e statuito, potrebbe anzi introdur nella medicina comparata novelle idee, principj nuovi in questo proposito.

42. Il vedere come non sieno comunemente troppo giuste ed esatte le idee che si hanno sulla prova che della natura de' morbi si può trar dal successo di loro inoculazione, e specialmente sulla convenevolezza di essa inoculazione qual mezzo preservativo; e come non troppo chiaro e coerente a sè stesso o colla dottrina finor ricevuta, sia ciò che si dice nel metodo del Sig. Dott. Willelms intorno a quella proposta per la Polmonea degli animali bovini, m' indusse a queste brevi considerazioni, affinchè da tale operazione tentata coll' uno scopo o coll' altro, sempre vantaggio, o almanco non mai danno, alla scienza ne venisse e alla pratica.

SOPRA ALCUNE SPECIE DI CIPRESSI

OSSERVAZIONI

DEL CAV. PROF. MICHELE TENORE

SOCIO ATTUALE

Ricevuta il 30 *Aprile* 1853.

Fin dalle prime piantagioni del Real Orto Botanico di Napoli ci veniva dagli Orticoltori francesi provveduto un *Cupressus pendula* che, collocato in apposito luogo della famiglia delle Conifere, non tardava a farvi sfoggio della più rigogliosa vegetazione, talchè elevatosi in pochi anni a considerevole altezza collo spanderne tutto in giro i suoi pendevoli rami un verdeggiante padiglione ne offriva, alla cui ombra i curiosi avventori ne riparavano. Più invaghiti n' erano i Botanici che con maggiore interesse venivano a considerarne le speciose forme, e vi era fra essi il Professore Morren che, fattolo ritrarre da valente artista, seco nel Belgio se ne portava l' effigie. Ritenuto generalmente coll' antico nome di *Cupressus pendula*, ricercandone il Willdenow, due specie di cipressi vi si trovavano descritti, alle quali la stessa qualità de' rami pendevoli ne veniva deferita, una di esse nativa di Goa ed ospitata nel Portogallo vi riteneva il nome di *Cupressus lusitanica* fatto sinonimo del *Cupressus pendula* dall' Heritier, mentre all' altra, che nel Giappone raccolta avevano Kaempfer e Thunberg, il preciso nome di *Cupressus pendula* veniva dal Willdenow conservato. La nostra pianta non potendo riferirsi a quest' ultima, perchè di carattere affatto diversa, al *Cupressus lusitanica* del Willdenow ne rimaneva naturalmente riportata. Quindi avveniva che ricercandone gli altri autori ci si offrisse il Lamarck, il quale

volendo alla sua volta con diversi nomi definire le due su espresse distinte specie di *Cupressus pendula*, alla stessa pianta dell' Heritier e del Willdenow imposto ne aveva il nuovo nome di *Cupressus glauca*: desumendolo dalla speciale tinta azzurrognola del suo fogliame. Or comunque tal carattere ben si affacesse alla nostra pianta, tuttavia per la priorità della data, col primo nome di *Cupressus lusitanica* ne veniva da noi definita. Molti anni scorrevano senza occuparcene altrimenti, e noi intenti soltanto a moltiplicarne gl' individui, col favore de' copiosi semi che ne forniva la pianta madre, ne abbiamo accresciuto gli articoli della nostra corrispondenza, ed abbiamo potuto benanco largamente riparare la perdita della pianta madre da violentissimo turbine travolta. Avveniva frattanto che un nostro venerato collega, per la cui perdita è tuttora in lutto la scienza, il celebratissimo Professore Link di Berlino, in una sua visita al nostro Orto botanico, fattosi dappresso a quel cipresso cui leggevasi apposta l' etichetta di *Cupressus lusitanica*, col suo connaturale gradevole sorriso ne venisse osservando che, comunque così generalmente definito si trovasse il *Cupressus glauca* del Lamarck, tuttavia da esso ben diverso ne fosse il vero *Cupressus lusitanica*; quindi soggiungeva, più a noi vicino averne osservato un bellissimo albero nel giardino de' PP. Cappuccini in Siracusa; e noi facendo tesoro dell' importante avviso dell' insigne autore della *Flora portoghese*, tosto ci facevamo a richiederne, così i nostri corrispondenti nella Sicilia, che ovunque ne' cataloghi di piante e semi si trovasse registrato un *Cupressus lusitanica*. Dopo numerose seminagioni, da una di esse ci riusciva, alla perfine, di vederne germogliare tenere piantine, che dal primo apparir loro, di un bel verde, non dell' azzurrognolo vedendole colorite, ben ci si mostravano diverse da quelle che mai sempre per lo innanzi ne avevamo ottenuto. Sono queste le piante, che con ogni cura educate, ci han provveduti del vero *Cupressus lusitanica* del Tournefort, del quale abbiamo arricchito le nostre corrispondenze, mentre diversi individui ne abbiamo piantati nelle serie del Real Orto,

ed altri ne abbiamo disposti in fila lungo il muro che lo ricinge dal lato di S. M.ª degli Angeli, dove col loro bel verde e colle spaziose chiome, il più vivo contrasto ne porgono con i due cipressi comuni, maschio e femmina che vi sono piantati dappresso. Egli è da questi alberi, che in men di tre lustri han raggiunto da 15 a 20 piedi di altezza, che noi in ogni anno facciamo ampia raccolta di semi, ed egli è dopo di averne seguito l' andamento, e studiato i caratteri in tutt' i suoi periodi, che ci siamo avvisati di meglio precisare le differenze tra il *Cupressus glauca*, ed il vero *Cupressus lusitanica*. Noi ne abbiamo tolto il destro dalla propizia occasione del dottissimo lavoro sulla famiglia delle Conifere, pubblicato dall' insigne e sventurato Endlicher, che ha contribuito a toglier diffinitivamente di mezzo gli altri due *cipressi pendenti*: quello del Thunberg e Willdenow riferito alla *Thuya pendula*, nonchè quello dello Staunton e del Lambert cui egli apponeva il nuovo nome di *Cupressus funebris*, tolto dall' uso, cui presso i Cinesi vien destinato nel piantarlo presso le tombe. Noi non mancheremo di farne cenno più appresso; frattanto, prima di fermarci appositamente sul nostro vero *Cupressus lusitanica*, crediamo doverne preliminarmente sceverare le frasi diagnostiche, e le sinonimie che ne restano attribuite al *Cupressus glauca* del Lamarck, e che in pari tempo gioveranno a farne risaltare il confronto con gli opposti caratteri del *Cupressus lusitanica*.

Esse sono le seguenti:

1. *Cupressus glauca*; foliis imbricatis *acutis*, ramis patentissimis, infimis subdependentibus. *Brotero Flora lusitan.ª p.* 216.

2. *Cupressus glauca*; foliis *acutis glaucis glandulosis*, quadrifariam imbricatis, ramis dependentibus. *Lamarck Dict.* 2, *p.* 243.

3. *Cupressus lusitanica*; ramulis quadrangulis quadrifariam imbricatis; strobilis subglobosis, *squamis mucronatis*, ramis pendulis. *Willd. sp. iv.* 511.

4. *Cupressus pendula*. Loisleur. *Nouveau Duhamel* 3*p.* 7. *tab.* 3.

5. *Cupressus lusitanica*; ramis flexuosis patentibus, ramulis quadrangulis, foliis quadrifariam imbricatis, *acutis carinatis*, *glaucis* adpressis. *Lambert. Genus Pinus*; *Edit.* 1, *p.* 95, *t.* 42; *Edit.* 2, *p.* 118, *t.* 65. London. *Arbor Brit. IV.* 2477. *f.* 2328. *Encycolop. of trees* 1073, *fig.* 1998.

6. *Cupressus pendula*; foliis imbricatis, *glandulosis*, frondibus quadrangulis *glaucis*, ramis dependentibus. *L'Heritier. Stirpes novae p.* 15, *t.* 8. *Hort. Kew.* 3. *p.* 373.

7. *Cupressus glauca.* Cupressus coma effusa, ramis flexuosis patentibus, infimis subdependentibus, ramulis tetragonis, *foliis acutis* adpressis *apice patulis glaucescentibus*, strobili globosi *squamis mucronatis.* Endlicher. *Sinopsis Coniferarum p.* 58.

8. *Juniperus ex Goa.* Hujus propaginem, hoc ipso mense transmisit ad me ex Anglia, Dominus Weitzius, nomine *Cedri ex Goa.* Ramis est magis expansis, gracilibus, foliis *glaucis tenuissimis* et brevissimis; caeteroquin superiori (Junipero Virginianae) videtur simili. *Hermanni (Pauli) Horti Academici Lugduno Batavi Catalogus. Lugduni. — Batavorum* 1687.

Giova avvertire come da tutti questi autori dovranno sempre escludersi i due seguenti presunti sinonimi, e che tutte le parole segnate in corsivo si riferiscono ai caratteri opposti a quelli che si trovano nel nostro *vero cipresso lusitanico* del Tournefort.

Sono questi i sinonimi che vanno esclusi dal *Cupressus glauca.*

1. *Cupressus lusitanica patula fructu minori.* Tournefort, Instit. 587 (an. 1700).

2. *Cyprés de Portugal à petit fruit.* Duhamel, Traité des Arbres 1ª edit. pag. 198 (an. 1755).

Dal confronto che si potrà istituire tra la pianta cui queste due frasi si riferiscono, e quelle che riteniamo col nome di *Cupressus glauca* si potrà di leggieri convenire della confusione che fin oggi ha regnato tra queste due distinte specie. Per meglio chiarirle ci fermeremo a farvi le seguenti considerazioni.

Tre sole specie di Cipressi registra Tournefort nel sopracitato luogo colle seguenti parole.

Cupressi species sunt

1. Cupressus meta in fastigium convoluta; quae foemina Plinii. *Cupressus Dod. Pempt.* 856, *Cyprês femelle.*

2. Cupressus ramos extra se spargens, quae mas. Plinii. *Cupressus Mattinioli* 119, *Cyprês mâle.*

3. Cupressus lusitanica patula fructu minori.

Nel Duhamel (Traité des Arbres edit. 1ª, pag. 198) sono riferite le stesse tre specie del Tournefort, ed alla specie terza sono aggiunte le seguenti parole:

« L' espèce n. 3 est d' un plus beau verd, et l' odeur de ses feuilles est plus agreable; mais il craint les grandes gelées, etc. »

Queste qualità della composizione dell' albero e del color verde del fogliame, per le quali la terza specie di cipresso del Tournefort e del Duhamel si distingue dalle altre due generalmente note, convengono perfettamente al nostro vero *Cupressus lusitanica.* Certamente il Duhamel che ha fatto tanto caso del bel verde colore del fogliame di esso, e perciò diverso dalla tinta bruna delle altre due, non avrebbe mancato di dirla *glauca*, ossia azzurrognola, che, senza essere bella, sempre più si allontana dal verde dei cipressi ordinari, e ne avrebbe perciò fatta vieppiù spiccare la diversità. Il Tournefort, d' altra parte, volendo distinguerlo con caratteri più positivi, ne dichiara i rami non raccolti in mucchio (*meta in fastigium convoluta*), nè orizzontali (*ramos extra se spargens*), ma li dice soltanto *patuli*, cioè *aperti*, *slargati.* Or se questa terza specie avesse avuto i suoi rami pendenti come quelli del *Cupressus glauca*, invece di dirla *patula*, l' avrebbe detta *pendula*, ossia con rami pendenti; voce chiarissima e generalmente usata dai botanici, laddove dicono *patuli* e *patenti* que' rami, che si spandono in una direzione quasi intermedia tra l' orizzontale e la verticale. Anche di maggior peso dobbiamo ritenere

la distinzione che lo stesso Tournefort deduce dalla grandezza degli strobili, chiamando la sua pianta *Cupressus lusitanica fructu minori*, che più precisamente il Duhamel ha espresso colle voci francesi *à petit fruit*. Del qual carattere, comunque limitato alla semplice dimensione de' frutti, avremo occasione di tener conto più appresso.

A queste generali considerazioni della composizione e del colore delle due specie di *Cupressus*, il *C. glauca* cioè ed il *C. lusitanica vera*, tengon dietro i caratteri delle fogliuzze e degli strobili ben diversi nelle due specie.

Nel *Cupressus glauca* le fogliuzze sono evidentemente munite di una rilevata linea longitudinale, o glandula che voglia dirsi, solita ad osservarsi in molte piante di tal famiglia (*foliis carinatis, seu glandulosis*); esse sono aguzze, mucronate, e più o meno rialzate specialmente nella estremità. Nell'altra specie al contrario le fogliuzze sono affatto prive di carena, ossia dorso rilevato glanduloso, sono ottuse, lisce egualmente convesse ed affatto adese. Non meno rilevante è la diversità degli strobili; perchè nel *Cupressus glauca* essi hanno le squame armate di uncino, e nell'altro le squame sono inermi. Giova fare avvertire come le surriferite qualità delle fogliuzze e degli strobili del *Cupressus lusitanica vera* si trovano benanco ne' due cipressi antichi, maschio e femmina, coi quali il Tournefort per la loro naturale affinità quella sua terza specie associava; siccome per i surriferiti opposti caratteri il *Cupressus glauca* non ai cipressi, ma bensì al genere *Juniperus* Paolo Hermanno riportava, dichiarandolo simile al Ginepro di Virginia.

Noi ci asterremo dal dilungarci altrimenti per produrre congetture onde rintracciar l' origine della promiscuità delle due specie di cipresso dianzi dichiarate; nè sapremo con precisione additare la vera patria del *Cupressus lusitanica* del Tournefort; non taceremo però trovarsi il semplice nome di un *Cupressus Tournefortii* in alcuni cataloghi di Orticoltori francesi, come fin dal 1825 leggesi in quello de' fratelli Audibert. Questo stesso nome, come di pianta poco nota, cinque lustri

più tardi ricordava il London (*Encyclopaedia of Trees and Shrubs. London* 1842. *pag.* 1077); e da ultimo qual sinonimo del *Cupressus horizontalis* lo leggiamo nella *Synopsis* dell' Endlicher. Noi ignoriamo sopra qual fondamento questo sommo botanico lo abbia così definito; ma non possiamo astenerci dall' osservare che giammai il *Cupressus lusitanica* del Tournefort riferir potrebbesi al *Cipresso orizzontale*, nè come sinonimo, nè tampoco qual varietà di esso, anche ommetter volendone la varietà 3 degli Orticoltori, che lo stesso sullodato Endlicher riferisce colla frase *Cupressus pendula, ramis horizontalibus, ramulis pendulis*; perocchè senza parlare della diversa tinta delle foglie, vi osta essenzialmente il difetto de' rami orizzontali e la picciolezza degli strobili, non più grossi di una palla di moschetto, mentre quelli del *Cipresso comune* aggiungono la grossezza di una noce. Or siccome il Tournefort non ha descritto che le sole tre surriferite specie di cipressi; da ciò ne consegue che la pianta degli Orticoltori ne resta tuttora mal definita, ovvero rientra ne' sinonimi del vero cipresso orizzontale (1). In entrambi i casi il nome del Tournefort essendole impropriamente attribuito, noi lo impronteremo per farne omaggio al celebre autore delle *Institutiones rei herbariae*; ed il suo *Cupressus lusitanica patula fructu minori* adotteremo per specie distinta sotto il nome di *Cupressus Tournefortii*.

---

(1) Nella serie delle Conifere coltivate nel Real Orto botanico, potrà osservarsi un cipresso, che può dirsi intermedio tra il *fastigiato*, ossia *piramidale* e l' *orizzontale*. Esso non ha i rami affatto divaricati di questo secondo, nè rigorosamente ammucchiati e raccolti in piramide del primo. Basta guardarlo per riconoscervi una composizione ed una forma notabilmente distinta; talchè ben si potrebbe riferir questa ad un ellissoide, ovvero ad un ovale, ma giammai ad una piramide. I suoi rami si dilatano e si discostano lasciando spazi affatto vuoti tra loro, nè si assottigliano e stringono in cima come nel vertice del vero cipresso piramidale, essi presentano un' estremità tondeggiante. Quante volte a quest' individuo riferirsi volesse il cipresso di Tournefort, de' fratelli Audibert, ben si sarebbe avvisato l' Endlicher di ritenerlo se non affatto identico, almeno qual altra forma o varietà del cipresso comune, cui ben si addirebbe il nome di *intermedia*.

Altro individuo a rami anche più divergenti del nostro ebbi occasione di riconoscere nella villa del fu Sig. Craven in Penta presso Sanseverino.

Poche parole soggiungeremo per allontanare il sospetto che questo nostro cipresso riferir si possa al *Cupressus pendula* Cinese. Il Sig. Lambert ne riproduce la descrizione e la figura datane dallo Staunton nell'opera intitolata: *Authentic Account of an Embassy from the King of Great Britain to the Emperor of China. Vol.* 2. *pag.* 525 *o p.* 445, *tab.* 41. Egli ne fa certi che quella specie di cipresso fino a quel tempo non si trovava introdotta in verun giardino d'Inghilterra. La stessa cosa ripete il Loudon, e da ultimo l' Endlicher che, dopo di averne ripetute le parole del Lambert, senza dirne altro, si limita a mutarne il nome di *Cupressus pendula* in quello di *Cupressus funebris.* Sembra da ciò potersene inferire che quel cipresso ne rimanga tuttora confinato nella Cina e nel Giappone. Chi amasse frattanto consultarne le descrizioni testè citate, non che le figure del Lambert si convincerebbe bentosto esser desso ben diverso dalle due specie testè discorse.

Ecco la diagnosi ed i sinonimi del *Cipresso di Tournefort*:

Cupressus Tournefortii. — Arbor stricta procera; ramis patulis pyramidatim assurgentibus; ramulis quadrangulis debilibus subdependentibus; foliis quadrifariam imbricatis laete viridibus persistentibus minutis ovatis obtusis convexis, laevissimis, arcte adpressis, facialibus lateralibus conformibus, carina, seu glandula, omnino destitutis; strobilis subovalibus (lin. 5 - 6 in majori diametro); squamis umbonatis muticis; seminibus lentiformibus alatis. *Ten.*

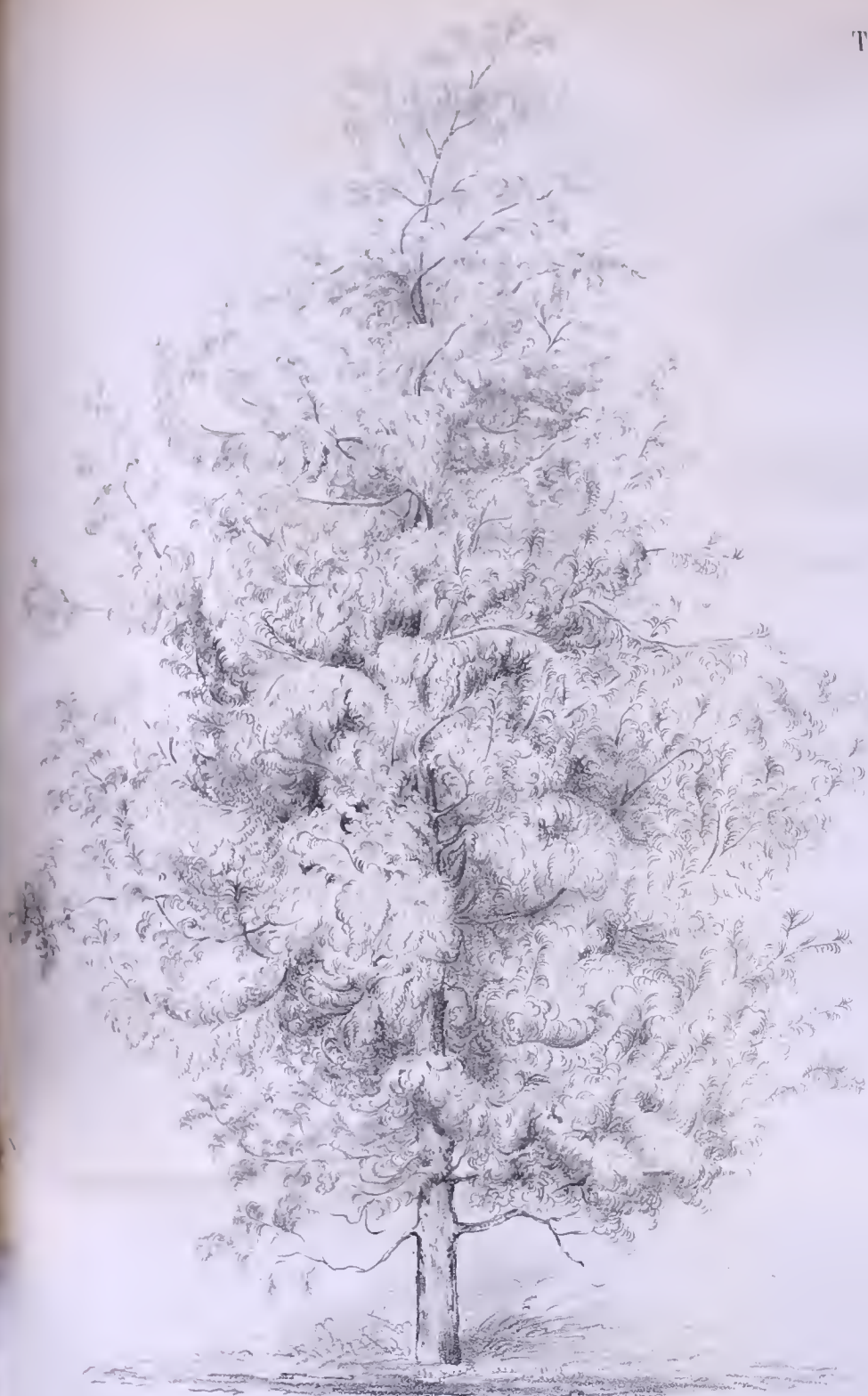
Cupressus lusitanica patula fructu minori.
Tournefort. Instit. 1. *pag.* 587.

Cupressus lusitanica. *Duhamel. Traité des Arbres* 1.^e^ *edit. Paris* 1755. *Tom.* 1, *pag.* 195.

Cupressus lușitanica vera. *Ten. in literis, et in indicibus seminum et in Catalogis Horti Regii Neapolitani.*

Obs. A *C. funebri* Endl. differt imprimis, ramis primariis in pyramidem assurgentibus, non divaricatis ad angulum obtusum; secundariis patulis brevibus, nec pendulis longissimis;

CUPRESSUS TOURNEFORTII. TEN:

Modena lit. Goldoni

CUPRESSUS TOURNEFORTII. TEN:

foliis arcte adpressis obtusis, dorso convexo ecarinatis, nec subtriquetris carinatis; amentis masculis trilinearibus; strobili squamis umbonatis muticis.

Tabularum explicatio

Tab. I. *A. b.* Ramulus *Cupressi Tournefortii*, amentis masculis et foemineis onustus.

c. c. c. Amenta staminigera.

d. Amentum staminigerum, magnitudine auctum.

e. Squama ejusdem cum staminibus.

f. f. Amenta foeminea, seu gemmulifera.

g. Amentum foemineum, magnitudine auctum

h. Strobilus virescens.

i. Idem exsiccatus.

k. Semen auctum.

Tab. II. *B.* Cupressi Tournefortii arbor.

SU DI UNA PIANTA CONIFERA DEL GENERE TAXODIUM

OSSERVAZIONI

DEL CAV. PROF. MICHELE TENORE

SOCIO ATTUALE

Ricevuta il 30 *Aprile* 1853.

Per quanto sia increscevole il venir confessando come la precisa diagnosi di un albero di vistose forme abbia potuto per lunghi anni mascherarsi sotto diverse false definizioni, tuttavia ad attenuarne il rimprovero concorrer ne potrebbero i non rari esempi che se ne ripetono in questa scienza immensa; non che il ricordarne le difficoltà maggiori della famiglia, cui quell' albero si appartiene; cosicchè intorno ad essa nuove illustrazioni e nuove ricerche tuttogiorno ne vengon fuora. Trattasi in somma di una novella specie del genere *Taxodium*, della cui storia ci faremo a dare la seguente succinta notizia.

Allorquando sullo scorcio del passato secolo nel Real Parco annesso alla Reggia di Caserta, davasi opera alla piantagione di un grandioso giardino disegnato sul così detto stile inglese, numerosi carichi di piante rare e preziose vi arrivavano specialmente dall' Inghilterra, non poche delle quali per esservi in quello stesso paese di fresco pervenute dall' America, dalla Nuova Olanda e da altre lontane terre, n'erano rimase tuttora indefinite. Un distinto botanico inglese il Sig. Giovanni Andrea Graëfer riceveva quelle piante, ed in quel novello tempio che, con magnificenza tutta regale andavasi elevando al culto di Flora, dal lodato orticoltore con insigne perizia e singolar maestria disegnato e diretto, quelle istesse peregrine piante con ispezial cura e sommo accorgimento andava distribuendo.

Scorsi appena pochi anni, il di lui figlio Giovanni si avvisava darne fuori una breve scrittura dal titolo di *Synopsis plantarum Regii viridarii Casertani*, cui apponeva la semplice data del 1803; nella quale, comunque i soli nomi di esse piante in ordine alfabetico disposti si trovassero registrati, purnondimeno se ne raccoglieva di leggieri come in quel nascente giardino, di già molti rari e pregevoli alberi vegetassero, che con nomi affatto nuovi nella scienza per la prima volta vi figuravano.

Or siccome molte di quelle piante dal cennato Real Giardino venivano comunicate a coloro che intendevano allo studio della Botanica e della Orticoltura, così ne venivano esse ritenute cogli stessi nomi che n'erano divulgati. Avveniva in quel tempo che mancando presso noi un Orto botanico pubblico, due illustri personaggi si adoperassero a supplirne il difetto colle loro private analoghe istituzioni. Questi erano il Principe di Bisignano che una speciosa collezione di piante aveva introdotta nella sua amenissima e cospicua villa alla Barra, e l'altro il Commendatore Giuseppe Saverio Poli, che in un piccol giardino annesso alla sua abitazione alla salita di Tarsia altra pregevole serie ne coltivava. In questi due giardini figurar si videro molte piante del Giardino inglese di Caserta; talchè trovandosi a noi commessa la direzione dell' Orto botanico del Principe di Bisignano, così nel darne fuori il catalogo, diverse di quelle piante vi furono comprese (1). Noi ci limitiamo a citarne una *Casuarina suberosa*, della quale fu ritenuto lo stesso preciso nome, desiderato financo nelle più moderne pubblicazioni (2); ed un *Metrosideros metrum vacuum*, al cui inesatto nome fu da noi sostituito quello di *Eucalyptus capitellata*, e più tardi riferito all' *Eucalyptus robusta* (3).

---

(1) Catalogo delle piante che si coltivano nel Giardino botanico della Villa del Sig. Principe di Bisignano alla Barra. 1805. pag. 9 e p. 13.

(2) Trovasi descritta nelle note al Catalogo del Real Orto botanico di Napoli del 1845. pag. 81.

(3) Detto Catalogo. pag. 30.

Allorchè nel 1802 a premura dello stesso Commendatore Poli e del chiarissimo Professore di Botanica Signor Cav. Vincenzo Petagna, mio benemerito antecessore, un Orticino botanico veniva piantato nel giardino del dismesso convento di Monteoliveto, a gara concorrevano entrambi i succennati giardini del Principe di Bisignano e del Poli ad arricchirlo di belle e pregevoli piante. Tra quelle di quest' ultimo veniva compreso un *Cupressus disticha* del viridario Casertano, che colla stessa definizione veniva inserito nel Catalogo di quel nostro piccolo Orto botanico di Monteoliveto di cui fin dalla prima sua istituzione, a noi veniva deferita la cura (1).

Dismesso il cennato piccolo giardino, tutte le piante ne furono trapiantate nell' attuale, dove vennero ad occuparne il primo pezzo del superiore terreno che vi fu assegnato. Ivi trovansi tuttora collocati quei pochi alberi, i cui superstiti dir si possono i decani del nostro Orto botanico. Tali sono il Laurus canfora, la Firmiana platanifolia, il Pinus brutia, il Taxus baccata, la Prosopis torquata, e tra questi il magnifico individuo del presunto *Cupressus disticha*. Così definito vi rimaneva finchè non venissero più accuratamente illustrati dagli autori che se ne sono occupati di proposito. Allora avveniva che il *Cupressus disticha* fosse quasi in pari tempo riferito al genere *Taxodium* fondato dal Richard (2), ed al genere *Schubertia* fondato dal Mirbel; e così ne' nostri successivi cataloghi e nelle liste de' semi che annualmente ne mettiamo in commercio, or coll' uno or coll' altro nome, l' albero del viridario Casertano ne veniva annunziato. Egli fu soltanto dopo che colla scorta del Lambert (3) potemmo meglio consultarne i succennati autori; non che le minute descrizioni e giunte del London (4),

(1) Catalogo delle piante del regal Giardino botanico di Napoli. Nella Stamperia Reale, 1807. pag. 13.

(2) Mémoires sur les Coniferes et les Cycadies. Stuttgard 1826. pag. 143.

(3) A description of the Genus Pinus. London 1832.

(4) Encyclopaedia of Trees and Shrubs. London 1842. pag. 1076.

che trovando grande discrepanza tra le descrizioni del *Taxodium distichum* ed i caratteri della nostra pianta, venimmo nella certezza che il nostro *Taxodium*, mentre conveniva perfettamente col genere ne differiva nella specie, se non che riserbandoci sottoporlo a più maturo esame, lo avevamo ritenuto per la varietà *Sinense* del Noisette o del *Sinense pendulum* degli ortolani (1).

Ci arrivavano quasi al tempo stesso la *Synopsis coniferarum* dell' Endlicher (1847) e gl' individui vegetanti di due specie di conifere, l' una col nome di *Cupressus nucifera*, e l' altra col nome di *Taxodium japonicum*. Noi potevamo allora studiare queste ultime, che trovammo riferirsi al nuovo genere *Glyptostrobus* dell' Endlicher, cioè, il *Cupressus nucifera* Hortul. da riferirsi al *Glyptostrobus heterophyllus*; ed il presente *Taxodium japonicum* (diverso dal vero riferito oggi al genere *Cryptomeria*); da riferirsi al *Glyptostrobus pendulus*, sotto del quale l' Endlicher riporta il sinonimo di *Taxodium sinense pendulum*.

Eliminate in tal modo tutte le antiche definizioni, che al nostro Taxodium eransi per lo innanzi erroneamente appropriate, e ristretto questo ad una delle sole tre specie di veri Tassodii descritte dal sullodato monografo, cioè il *Taxodium distichum*, il *Taxodium microcarpum*, ed il *Taxodium adscendens*, e non potendosi riferire ad alcuna di esse, ne rimane pienamente dimostrato che la Conifera del viridario Casertano, che trovasi immensamente moltiplicata in grazia de' copiosi semi che in ogni anno se ne maturano; e che perciò da mezzo secolo circola pei giardini nostri e probabilmente per altri molti di Europa, ritener debbasi quale specie non descritta cui diamo il nome di *Taxodium mucronatum*, togliendolo dal singolar carattere delle squame de' suoi strobili munite di acuto pungolo ricurvo.

---

(1) London loc. cit.

Descrizione.

L' albero che imprendiamo a descrivere non pare che aggiunger possa le dimensioni del vero *Taxodium distichum*, cui gli autori assegnano fino a 120 piedi di altezza, ed un diametro che va dagli 8 a 15 piedi. L' individuo che facciamo servir di tipo alla nostra specie, comunque vantar possa circa 60 anni di età, non è più alto di 50 piedi, ed il suo tronco a fior di terra non ha più che 2 piedi di diametro: esso è coverto di corteccia di color baio, coll' epidermide liscia e squarciata per lungo in sottili sfogli. Questo tronco si divide gradualmente e senza ordine simmetrico in più branche quasi orizzontali, che si suddividono in rami tortuosi ed anche irregolarmente disposti; le cui divisioni gracili e sottili mal reggono al peso di ramoscelli proliferi che s' incurvano e si piegano per ogni verso. Alcuni di questi rimangono a figurare da foglie pinnate, del doppio più lunghe di quelle del Tassodio distico, che si compongono di 60 a 70 coppie di foglioline di un bel verde, lineari, piane, acute, lunghe 6 linee e larghe mezza linea, disposte in due serie, ossiano distiche, come nella antica specie che ne ha tolto il nome. Alcuni di essi ramoscelli accennano alla loro riproduzione trovandosi suddivisi in altri minori, e provvisti di piccolissime gemme nude, composte di rudimenti di foglioline. Dal progressivo sviluppo di tali gemme l' albero si conserva verdeggiante, nè si spoglia completamente come ha luogo nel vero *Taxodium distichum*. In cima di altri teneri ramoscelli nascono i fiori maschi raccolti in amenti globosi quasi sessili di 1 a 2 linee di diametro, disposti in lunghi grappoli pendenti e ramosi a foggia di discipline. Ogni amento è composto di 8 a 10 squame, che nel momento della fioritura si allungano alquanto, e ne restano le prime sterili intorno alla base del peduncoletto, e le altre obbliquamente peltate e disposte in giro intorno al prolungamento dello stesso peduncolo; ciascuna di esse di figura deltoidea sostiene nella faccia inferiore 8 a 9 antere globose, gialle, disposte in due serie,

ossiano piani, cioè, uno inferiore di 5 e l' altro superiore di altre 3 antere, mentre quelle del *Taxodium distichum* sono al numero di 5 disposte tutte nello stesso piano (1).

I fiori femminei nascono anch'essi in piccoli amenti ovato-globosi dello stesso color verde delle foglie, sessili e solitari, composti di 6 ad 8 squame peltate specialmente attaccate ad un asse comune; ogni squama contiene due ovicini privi di stimma e muniti del micropilo dilatato, pel quale ricevono il polviscolo fecondante (2).

Così gli amenti maschi che i femminei compariscono fin dal novembre, ma non giungono a perfezione che sul cader di Gennajo. Ad essi succedono gli strobili, che maturano sul cader dell' anno. Questi strobili che nel *Tassodio distico* sono della grossezza di un uovo di colombo, ossia di quelli del Cipresso comune, e perciò di circa un pollice di diametro, e sono composti di larghe squame crestate col disco alquanto convesso ed inerme; in questo nostro sono piccoli quanto quelli del Cipresso glauco, e perciò di figura ovoidale, di 5 a 6 linee nel maggior diametro, e composti di squame quasi orbicolari colla faccia leggermente convessa segnata di una linea trasversale, dal cui mezzo si eleva una piccola protuberanza munita di un uncinetto ricurvo; ed hanno l' arto rilevato, turgido segnato di linee trasversali: nella faccia interna di ogni squama

(1) I moderni considerano queste antere come altrettanti loculamenti bivalvi di una sola antera, e tutta la squama cui sono attaccate la ritengono come il connettivo di tutt' i suddetti loculamenti. L' insieme di queste parti coll' attacco all' asse comune vien da essi considerato come tutto uno stame.

(2) Non sappiamo intendere sopra qual fondamento alcuni moderni considerano i detti *ovicini* quali *piccole gemme* (*Gemmulae* — Endlicher, *Synopsis coniferarum*). Che i detti ovicini siano affatto nudi e privi di stimma, o forniti di tegumento e di stimma, essi mai sempre esercitano le funzioni di organi destinati alla propagazione sessuale; sono perciò ben diversi dagli organi che moltiplicano le piante senza il concorso degli organi maschili, come ha luogo nelle vere gemme. Così dalla confusione de' nomi ne seguirebbe quella de' due diversi mezzi di moltiplicazione de' vegetali, che darebbe luogo a gravissimo errore.

si trovano nicchiate due semenze. Tutte le anzidette squame stanno inserite ad uno stipite centrale legnoso, e vi restano attaccate fino alla maturità; esse aderiscono tra loro strettamente dapprima, indi si fendono, si sgretolano e si distaccano dallo stipite anzidetto. I semi hanno un integumento legnoso irregolarmente triedro ad angoli acuti.

Quest' albero che si è moltiplicato per le sementi che ne abbiamo ottenuto da quella prima pianta madre prova benissimo nell' arido e sabbionoso terreno dell' Orto botanico, dove non è stato possibile fare allignare il *Taxodium distichum*, che vegeta lungo le sponde de' fiumi della Virginia e della Carolina ne' terreni fangosi ed inondati. Tuttora oscura ne rimane per noi la patria di questo Tassodio, ma per l' analogia delle piante affini, siam di credere che possa anch' egli appartenere all' America settentrionale.

Dalla riferita descrizione è chiaro raccogliere come egli per molti caratteri conviene col *Tassodio distico*; ma ne differisce principalmente per lo numero maggiore delle antere in ogni squama degli amenti maschi, per la picciolezza degli strobili e per gli speciali caratteri delle squame di essi, nonchè per la maggior lunghezza delle foglie, pel numero maggiore delle coppie delle fogliolìne, per la qualità quasi sempre verde dell' albero e per la particolar natura del terreno in cui alligna.

Taxodii mucronati adumbratio.

Arbor semisecularis (in Horto regio neapolitano cultus); coma ampla, expansa fere semper virenti, eximia.

Truncus. — Ad basim 2 ped. crassus; altitudo 50 ped. Rami horizontales tortuosi divaricati, valde ramulosi, ramuli longi dependentes, iterum divisi, ultimis brevibus, graciles. Ramuli foliiferi proliferi. Folia pinnata 60-70 jugis, foliola disticha, linearia, plana, flaccida uninervia, acuta, laetevirentia, subperennia (6 lin. long. $\frac{1}{2}$ lin. lata). *Gemmae* perulatae, florales aphyllae, in foliorum axillis; *foeminae* solitariae ad basim ramulorum staminigerum; *masculae* plurimae in ramulis termi-

nalibus loriformibus, seriatim in spicas dispositae; gemmae foliiferae axillares, lateralesque floralibus multo minores. *Flores* monoici in amentis disposITI. Amenta mascula subglobosa, basi squamis sterilibus spiraliter insertis imbricatis. Caeterae squamae fertiles staminigerae, 6-8, versus apicem axeos, basi nudae, insertae, imbricatae, ovato-deltoideae facie interna (*connectivo Endlicher*) excentrice peltatae. Antherae globosae in duplici serie dispositae exteriores inferiores 5, interiores superiores 3, longitudinaliter dehiscentes. *Amenta* foeminea ovoideo-subglobosa. *Squamae* ovuliferae plures, axi abbreviato spiraliter peltatim insertae, imbricatae, dorso infra apicem recurvato-mucronatae. Ovula (*Gemmulae Endlicher*) ad basim squamarum duo; erecta micropyle tubulosa hiante. *Strobilus lignosus* ovalis (6-8 lin. long. 4-5 lat.) squamis peltatis, primum, marginibus arcte conniventibus, demum hiantibus, tandemque deciduis, compositus. Ipsae squamae disco convexo, centro umbonato, mucrone acuto uncinato persistenti, nec non margine superiore leviter toroso longitudinaliter levissime sulcato, gaudent. Semina sub quavis squama gemina erecta, basi attenuata squamarum stipiti inserta, integumento lignoso irregulariter triedro, angulis acutis. Embryo in axi albuminis carnosi subortothropus, ejusdem longitudine; cotyledonibus 5-8 linearibus, radicula cylindrica supera.

Diagnosis. — Taxodium mucronatum; ramis ramulisque patentibus, foliis pinnatis, 60-70 jugis; foliolis distichis linearibus flaccidis subsempervirentibus, strobilis ovalibus (6-8 lin. long.) squamarum umbone, mucrone subrecurvo, aucto. *Ten. Index sem. Hor. R. neapolitani pro anno* 1853.

Cupressus disticha, Graef. Cat. Regii Viridarii Casertani, *Schubertia disticha*, *Taxodium distichum*, *Taxiodium sinense var. pendulum*. Ten. Cat. et Ind. H. R. Neapolitani, non auctorum.

Floret autumno, strobilos maturos ad autumnum proximi anni profert.

TABULARUM EXPLICATIO

Tab. I. *A. b.* Ramulus *Taxodii mucronati*, amentis masculis et foemineis onustus.

c. c. c. Amenta staminigera in spicas terminales disposita.

d. Amentum staminigerum, magnitudine auctum.

e. Ejusdem squama unica, cum staminibus externa facie visa.

f. Ejusdem facies interna, cum staminum duplici serie.

g. g. g. Amenta foeminea, seu gemmulifera.

h. Strobilus.

i. Ejusdem squama, magnitudine aucta.

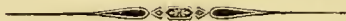
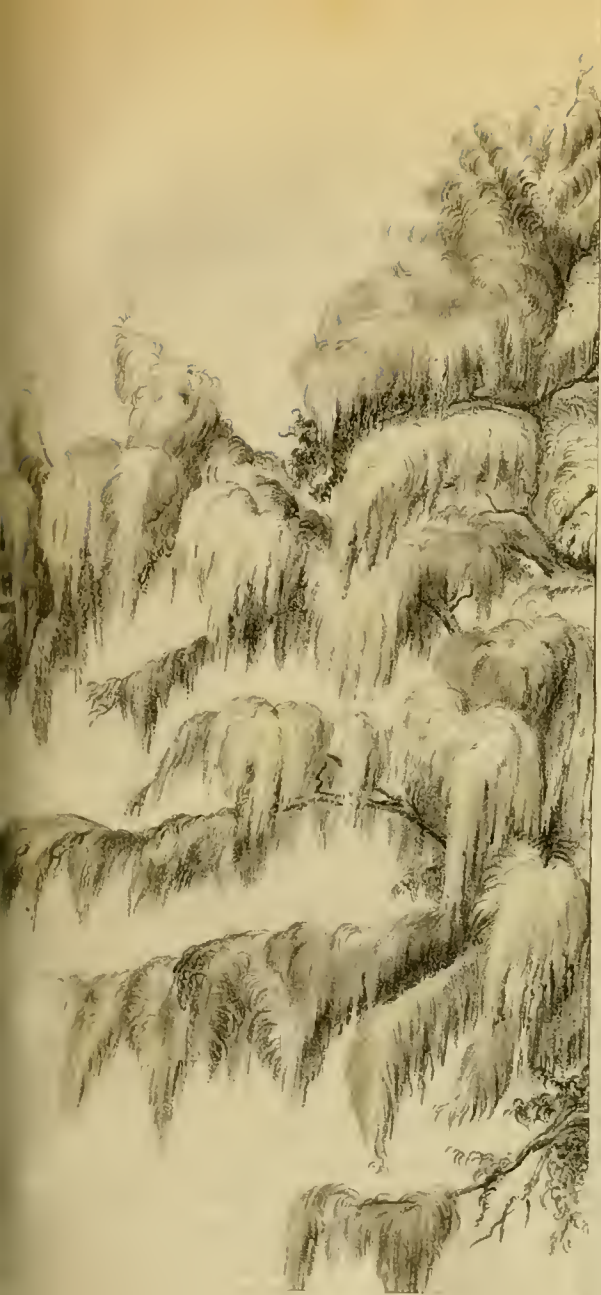
k. Semen auctum.

Tab. II. *B. Taxodii mucronati* arbor.

g
g
g

T.ª I=A.

TAXODIUM MUCRONATUM TEN:

Modena. Lit. Goldoni

TAXODIUM MUCRONATUM . TEN :

SUI CRITERJ DI INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI, E SULLE EQUAZIONI ISOPERIMETRICHE.

NOTA

DEL PROFESSORE FRANCESCO BRIOSCHI

Presentata dal Socio Cavaliere ANTONIO BORDONI,
Approvata dal Socio GIUSEPPE BIANCHI

Ricevuta il giorno 22 *Dicembre* 1853.

I caratteri generali dai quali si possa desumere se una funzione alle derivate dell' ennesimo ordine

$$V\,(t,\, x,\, x',\, x'',\, \ldots\ldots\, x^{(n)})$$

sia derivata esatta di una funzione alle derivate dell' ordine $(n-1)$ si hanno, come è noto, dalla equazione

$$(1)\qquad \frac{dV}{dx} - \left(\frac{dV}{dx'}\right)' + \left(\frac{dV}{dx''}\right)'' - \ldots\ldots + (-1)^n \left(\frac{dV}{dx^{(n)}}\right)^{(n)} = 0,$$

ed è anche noto come le equazioni isoperimetriche conducano ad equazioni di questa forma.

Lagrange nella ventunesima delle Lezioni sulle funzioni, dopo aver ritrovata la equazione superiore, dimostra come la equazione analoga pel caso in cui nella funzione proposta la derivata d' ordine più alto fosse la x'' decompongasi in due equazioni più semplici; ed aggiunge potersi provare come in generale la equazione (1) sia decomponibile in n equazioni, le quali devono tutte verificarsi identicamente allorquando la funzione sia una derivata esatta.

Questa importante decomposizione, indicata da Lagrange solamente come possibile, venne effettuata dal Ch. Professore

Bordoni in una delle sue Lezioni di calcolo sublime, nella quale si rinvengono trovate assai semplicemente le n equazioni da sostituirsi alla (1). Nella medesima lezione, l'Autore osserva che quelle n equazioni non saranno essenzialmente differenti fra loro, e considerando il caso in cui la funzione proposta sia alle derivate del terzo ordine dimostra che delle tre equazioni che si ottengono dalla (1), due sole sono essenzialmente differenti fra loro. In progresso di tempo i geometri Raabe e Joachimsthal giunsero per vie differenti a quella decomposizione, e dimostrarono che delle n equazioni che ne risultano, le essenzialmente differenti sarebbero $\frac{n}{2}+1$ od $\frac{n+1}{2}$ secondo che n è pari o dispari. (*)

In questa nota, partendo dalle formole del Prof. Bordoni, determiniamo quelle equazioni che essendo essenzialmente differenti fra loro, sono i veri criterj per l'integrabilità della funzione proposta, ed il metodo adoperato ci condurrà ad altre equazioni le quali si ponno assumere come criterj di integrabilità, e che in moltissimi casi particolari saranno più semplici delle prime. Dimostriamo in seguito come una analoga decomposizione eseguita sulle equazioni isoperimetriche conduca ad un interessante risultato ottenuto recentemente dal Sig. Ostrogradsky, pel quale risultato l'integrazione di quelle equazioni è ridotta a quella di equazioni alle derivate del primo ordine; affatto analogamente a quanto già fecero Hamilton e Jacobi per le equazioni della dinamica.

La funzione V supposta derivata esatta dovrà essere della forma

$$V = q + x^{(n)} p$$

essendo q, p funzioni delle sole $t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-1)}$. Questo valore di V riduce la (1) alla

$$(2) \quad p^{(n)} - \left[\frac{dq}{dx^{(n-1)}} + x^{(n)} \frac{dp}{dx^{(n-1)}}\right]^{(n-1)} + \ldots\ldots \pm \left[\frac{dq}{dx} + x^{(n)} \frac{dp}{dx}\right] = 0.$$

(*) Lezioni di Calcolo Sublime del Professore Antonio Bordoni. Milano. Anno 1831. Tomo I°, pag. 407. — Giornale del Sig. Crelle. T. 31, 33. Anno 1846.

Si pongano le seguenti denominazioni

$$
(3) \quad
\begin{aligned}
&\frac{dq}{dx^{(n-1)}} - p\,(t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-2)})' = p_1 \\
&\frac{dq}{dx^{(n-2)}} - p_1\,(t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-2)})' = p_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\frac{dq}{dx'} - p_{n-2}\,(t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-2)})' = p_{n-1} \\
&\frac{dq}{dx} - p_{n-1}\,(t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-2)})' = p_n,
\end{aligned}
$$

nelle quali col simbolo

$$p_r\,(t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-2)})'$$

intendesi rappresentare la derivata della funzione composta p_r rispetto alla t contenuta nelle componenti $t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-2)}$. Osservando essere

$$
(4) \quad
\begin{aligned}
&p' = p\,(t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-2)})' + x^{(n)} \frac{dp}{dx^{(n-1)}} \\
&p'_1 = p_1\,(t, x, x' \ldots\ldots x^{(n-2)})' + x^{(n)} \frac{dp_1}{dx^{(n-1)}} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

la equazione (2) si trasformerà nella

$$\left[\left\{\frac{dp}{dx^{(n-2)}} - \frac{dp_1}{dx^{(n-1)}}\right\} x^{(n)}\right]^{(n-2)} - \left[\left\{\frac{dp}{dx^{(n-3)}} - \frac{dp_2}{dx^{(n-1)}}\right\} x^{(n)}\right]^{(n-3)} + \ldots\ldots \pm \left\{\frac{dp}{dx} - \frac{dp_{n-1}}{dx^{(n-1)}}\right\} x^{(n)} \mp p_n = 0,$$

la quale dovendo essere identica allorquando la V sia derivata esatta, dà luogo alle

$$
(5) \quad
\frac{dp}{dx^{(n-2)}} - \frac{dp_1}{dx^{(n-1)}} = 0, \quad \frac{dp}{dx^{(n-3)}} - \frac{dp_2}{dx^{(n-1)}} = 0,
\ldots\ldots \frac{dp}{dx} - \frac{dp_{n-1}}{dx^{(n-1)}} = 0, \quad p_n = 0.
$$

Queste sono le n equazioni trovate dal Prof. Bordoni, le quali si ponno sostituire alla (1).

Le equazioni (3), osservate le (4), (5), si trasformano nelle

$$(6)\quad \begin{cases} p' + p_1 = \dfrac{dV}{dx^{(n-1)}} \\ p'_1 + p_2 = \dfrac{dV}{dx^{(n-2)}} \\ \cdots\cdots \\ p'_{n-2} + p_{n-1} = \dfrac{dV}{dx'} \\ p'_{n-1} = \dfrac{dV}{dx} \end{cases}$$

e da queste, indicando con r un numero qualunque fra quelli della serie 1, 2, 3 ..... n, si ottengono le seguenti

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{dp_1}{dx^{(n-r)}} = \dfrac{d^2V}{dx^{(n-1)}\,dx^{(n-r)}} - \left(\dfrac{dp}{dx^{(n-r)}}\right)' - \dfrac{dp}{dx^{(n-r-1)}} \\ \dfrac{dp_2}{dx^{(n-r+1)}} = \dfrac{d^2V}{dx^{(n-2)}\,dx^{(n-r+1)}} - \left(\dfrac{dp_1}{dx^{(n-r+1)}}\right)' - \dfrac{dp_1}{dx^{(n-r)}} \\ \cdots\cdots \\ \dfrac{dp_{r-1}}{dx^{(n-2)}} = \dfrac{d^2V}{dx^{(n-r+1)}\,dx^{(n-2)}} - \left(\dfrac{dp_{r-2}}{dx^{(n-2)}}\right)' - \dfrac{dp_{r-2}}{dx^{(n-3)}} \\ \dfrac{dp_r}{dx^{(n-1)}} = \dfrac{d^2V}{dx^{(n-r)}\,dx^{(n-1)}} - \left(\dfrac{dp_{r-1}}{dx^{(n-1)}}\right)' - \dfrac{dp_{r-1}}{dx^{(n-2)}}\,. \end{cases}$$

Rappresentando per brevità col simbolo $A_{u,v}$ il binomio

$$\frac{dp_u}{dx^{(n-v-1)}} - \frac{dp_v}{dx^{(n-u-1)}},$$

le equazioni (5) si potranno scrivere

$$(8)\qquad A_{0,1} = 0,\quad A_{0,2} = 0 \;\ldots\ldots\; A_{0,n-1} = 0,\quad p_n = 0,$$

e sostituendo nell' ultima delle equazioni (7) il valore di $\frac{dp_{r-1}}{dx^{(n-2)}}$ dato dalla penultima, e quindi quello di $\frac{dp_{r-2}}{dx^{(n-3)}}$ dato dalla terz' ultima, e così via; supponendo essere r un numero pari si giunge alla

$$(9)\qquad -A_{0,r}=A'_{0,r-1}-A'_{1,r-2}+A'_{2,r-3}-\ldots\ldots+(-1)^{\frac{r}{2}}A'_{\frac{r}{2}-2,\frac{r}{2}+1}-(-1)^{\frac{r}{2}}A'_{\frac{r}{2}-1,\frac{r}{2}}$$

Analogamente col mezzo delle equazioni (7) si ottengono le

$$(10)\qquad \begin{aligned}
&-A_{1,r-2}=A'_{0,r-2}+A_{0,r-1}\\
&A_{2,r-3}=A''_{0,r-3}+2A'_{0,r-2}+A_{0,r-1}\\
&-A_{3,r-4}=A'''_{0,r-4}+3A''_{0,r-3}+3A'_{0,r-2}+A_{0,r-1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-(-1)^{\frac{r}{2}}A_{\frac{r}{2}-1,\frac{r}{2}}=A^{\left(\frac{r}{2}-1\right)}_{0,\frac{r}{2}}+\frac{r-2}{2}A^{\left(\frac{r}{2}-2\right)}_{0,\frac{r}{2}+1}+\\
&\qquad\frac{(r-2)(r-4)}{2\cdot4}A^{\left(\frac{r}{2}-3\right)}_{0,\frac{r}{2}+2}+\ldots\ldots+\frac{r-2}{2}A'_{0,r-2}+A_{0,r-1}\,.
\end{aligned}$$

Sostituendo questi valori nella (9) si arriva facilmente alla

$$A_{0,r}+\frac{r}{2}A'_{0,r-1}+\frac{r(r-2)}{2\cdot4}A''_{0,r-2}+\frac{r(r-2)(r-4)}{2\cdot4\cdot6}A'''_{0,r-3}+\ldots\ldots+\frac{r}{2}A^{\left(\frac{r}{2}-1\right)}_{0,\frac{r}{2}+1}+A^{\left(\frac{r}{2}\right)}_{0,\frac{r}{2}}=0,$$

nella quale fatto $r = 2, 4, 6, \ldots$ si ottengono altre equazioni analoghe. È evidente che supposto

$$A_{0,r-1} = A_{0,r-3} = A_{0,r-5} = \ldots\ldots = A_{0,3} = A_{0,1} = 0$$

quelle equazioni renderanno nulle anche le espressioni

$$A_{0,r}, \quad A_{0,r-2}, \ldots\ldots A_{0,4}, \quad A_{0,2};$$

quindi le effettive condizioni per l'integrabilità saranno le

$$(11) \qquad p_n = 0, \quad A_{0,1} = A_{0,3} = \ldots\ldots = A_{0,n-2} \text{ od } = A_{0,n-1} = 0,$$

secondo che n sarà dispari o pari; giacchè soddisfatte queste lo sono tutte le (8). Quindi se n è dispari saranno in numero $\frac{n+1}{2}$ le equazioni a soddisfarsi, e se n è pari saranno in numero $\frac{n}{2}+1$.

Se nell'ultima delle equazioni (10) poniamo $r = s+1$, (quindi s numero dispari) si ottiene la seguente

$$A_{0,s} + \frac{s-1}{2} A'_{0,s-1} +$$

$$\ldots\ldots + \frac{s-1}{2} A_{0,\frac{s+3}{2}}^{\left(\frac{s-3}{2}\right)} + A_{0,\frac{s+1}{2}}^{\left(\frac{s-1}{2}\right)} + (-1)^{\frac{s-1}{2}} A_{\frac{s+1}{2},\frac{s-1}{2}} = 0.$$

Ne deriva che si potranno assumere come criterj di integrabilità le equazioni

$$p_n = 0, \qquad A_{0,1} = 0, \quad A_{1,2} = 0, \quad A_{2,3} = 0,$$

$$\ldots\ldots A_{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}} = 0 \text{ od } A_{\frac{n-2}{2},\frac{n}{2}} = 0,$$

secondo che n dispari o pari. Queste equazioni potranno in alcuni casi particolari sostituirsi alle (11) con qualche vantaggio.

Si indichi con

$$(12) \qquad \frac{dV}{dx_r} - \left(\frac{dV}{dx_r'}\right)' + \left(\frac{dV}{dx_r''}\right)'' - \ldots\ldots + (-1)^n \left(\frac{dV}{dx_r^{(n)}}\right)^{(n)} = 0$$

una equazione isoperimetrica, e supponiamo la r possa assumere i valori 1, 2, 3 ..... m. Posto

$$\varphi_{r,s} = \frac{dV}{dx_r^{(s+1)}} - \left(\frac{dV}{dx_r^{(s+2)}}\right)' + \ldots \pm \left(\frac{dV}{dx_r^{(n)}}\right)^{(n-s-1)}$$

si ha evidentemente il gruppo di equazioni analoghe alle (6)

$$(13)\qquad \begin{aligned} \varphi_{r,n-1} &= \frac{dV}{dx_r^{(n)}} \\ \varphi'_{r,n-1} + \varphi_{r,n-2} &= \frac{dV}{dx_r^{(n-1)}} \\ \varphi'_{r,n-2} + \varphi_{r,n-3} &= \frac{dV}{dx_r^{(n-2)}} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \varphi'_{r,1} + \varphi'_{r,0} &= \frac{dV}{dx'_r} \\ \varphi'_{r,0} &= \frac{dV}{dx_r}. \end{aligned}$$

Se queste equazioni vengono ordinatamente moltiplicate per $x_r^{(n+1)}, x_r^{(n)} \ldots\ldots x'_r$ e si sommano le equazioni che ne risultano membro per membro si ottiene la

$$\Sigma_r \left(\varphi_{r,n-1}\, x_r^{(n)} + \varphi_{r,n-2}\, x_r^{(n-1)} + \ldots\ldots + \varphi_{r,0}\, x'_r\right)' = V' - \frac{dV}{dt},$$

e posto

$$T = \Sigma_r \left(\varphi_{r,n-1}\, x_r^{(n)} + \varphi_{r,n-2}\, x_r^{(n-1)} + \ldots\ldots + \varphi_{r,0}\, x'_r\right),\ V - T = \theta,$$

si ha

$$\theta' = \frac{dV}{dt}.$$

La equazione (12) è alle derivate del $2n$ ordine, quindi il primo membro di essa conterrà in generale le

$$x_r,\ x'_r,\ x''_r \ldots\ldots x_r^{(2n-1)}.$$

Se queste quantità si considerano quali incognite, sarà $2mn$ il numero delle incognite contenute nelle m equazioni analoghe alla (12). Sostituiamo alle mn incognite

$$x_r^{(n)},\ x_r^{(n+1)} \ldots\ldots x_r^{(2n-1)}$$

le quantità

$$\phi_{r,\,n-1},\ \phi_{r,\,n-2} \ldots\ldots \phi_{r,\,0},$$

talchè si considerino le $2mn$ quantità

$$(14) \qquad x_r,\ x'_r,\ x''_r \ldots\ldots x_r^{(n-1)},\ \ \phi_{r,\,n-1},\ \phi_{r,\,n-2} \ldots\ldots \phi_{r,\,0}$$

quali variabili indipendenti. Osservando al valore di θ si avranno le equazioni

$$\frac{d\theta}{dx_r}=\frac{dV}{dx_r},\qquad \frac{d\theta}{dx'_r}=\frac{dV}{dx'_r}-\phi_{r,\,0},\qquad \frac{d\theta}{dx''_r}=\frac{dV}{dx''_r}-\phi_{r,\,1},\ldots\ldots$$

$$\frac{d\theta}{dx_r^{(n-1)}}=\frac{dV}{dx_r^{(n-1)}}-\phi_{r,\,n-2}$$

$$\frac{d\theta}{d\phi_{r,\,n-1}}=-x_r^{(n)},\quad \frac{d\theta}{d\phi_{r,\,n-2}}=-x_r^{(n-1)},\quad \frac{d\theta}{d\phi_{r,\,n-3}}=-x_r^{(n-2)},$$

$$\ldots\ldots \frac{d\theta}{d\phi_{r,\,0}}=-x'_r,$$

dalle quali per le equazioni (13) si hanno le

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{d\phi_{r,\,0}}{dt}=\dfrac{d\theta}{dx_r},\quad \dfrac{d\phi_{r,\,1}}{dt}=\dfrac{d\theta}{dx'_r}\ldots\ldots \dfrac{d\phi_{r,\,n-1}}{dt}=\dfrac{d\theta}{dx_r^{(n-1)}} \\[2ex] \dfrac{dx_r}{dt}=-\dfrac{d\theta}{d\phi_{r,\,0}},\quad \dfrac{dx'_r}{dt}=-\dfrac{d\theta}{d\phi_{r,\,1}},\ldots\ldots \dfrac{dx_r^{(n-1)}}{dt}=-\dfrac{d\theta}{d\phi_{r,\,n-1}}. \end{cases}$$

Queste $2mn$ equazioni alle derivate del primo ordine contengono le $2mn$ quantità (14), e le m quantità analoghe alla $x_r^{(n)}$. Se si eliminano queste ultime col mezzo delle m equazioni

$$\phi_{r,\,n-1}=\frac{dV}{dx_r^{(n)}}$$

si avranno tante equazioni quante bastano a determinare le $2mn$ incognite (14). Le equazioni (15) sono dovute al Signor Ostrogradsky; il modo col quale vennero quì trovate mostra come esse siano una trasformazione delle (13), le quali corrispondono alle (6) nel caso in cui la funzione V sia una derivata esatta. L' importanza di questa osservazione si fa manifesta allorquando si consideri il modo col quale il Sig. Hamilton giunse ad integrare le equazioni della dinamica poste sotto forma analoga a quella delle equazioni (15).

Se supponiamo $V = H + U$, e riteniamo H funzione omogenea del secondo grado rispetto alle x_r', ed indipendente dalle x_r'', x_r'''....., ed U funzione delle sole x_r; la equazione (12) trasformasi nella

$$(16) \qquad \frac{d(H+U)}{dx_r} - \left(\frac{dH}{dx_r'}\right)' = 0.$$

Inoltre si ha

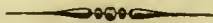
$$\varphi_{r,0} = \frac{dV}{dx'_r} = \frac{dH}{dx'_r}, \qquad \varphi_{r,1} = \varphi_{r,2} = \ldots\ldots = 0,$$

quindi

$$T = \Sigma_r \frac{dH}{dx'_r} x'_r = 2H \quad \text{e} \quad \theta = U - A.$$

Le equazioni (15) per questi valori danno le

$$(17) \qquad \frac{d\varphi_{r,0}}{dt} = -\frac{d(A-U)}{dx_r}, \qquad \frac{dx_r}{dt} = \frac{d(A-U)}{d\varphi_{r,0}}.$$

Se la A rappresenta la funzione delle forze vive, e la U la funzione delle forze, le equazioni (16), (17) sono le due forme assegnate da Lagrange e da Hamilton alle equazioni della dinamica.

SULLA PROPRIETÀ
POSSEDUTA IN PARTICOLAR MODO DAI CORPI UMIDI
DI ASSORBIRE L'ELETTRICITÀ DAGL' ISOLANTI SOLIDI ELETTRIZZATI
QUANDO SI TROVANO A CONTATTO CON ESSI.

MEMORIA

DEL CAV. PROFESSORE STEFANO MARIANINI

SOCIO ATTUALE

Ricevuta il 29 *Novembre* 1853.

I. Se si avvicina un corpo elettrizzato al cappelletto di un elettrometro a due pendolini senza toccarlo, lo stromento dà segno di tensione soltanto per attuazione, purchè il cappelletto non presenti parti taglienti o acute, o l' aria circostante non sia troppo umida; ne' quali casi trasfondesi nello stromento l' elettricità. Quando poi il corpo elettrizzato va a toccare il cappelletto dell' elettrometro, allora, se esso corpo è conduttore, vi ha sempre trasfusione di elettricità nell' istromento; ma se è coibente non fa d' ordinario che attuare, e, allontanato dall' istromento stesso, non rimane in questo veruna tensione elettrica. Qualche volta per altro anche in quest' ultimo caso, cioè quando con un vetro o con altro coibente elettrizzato si tocca il cappelletto dell' elettrometro, concepisce questo una tensione permanente.

Io volli adunque cercar la cagione per la quale un coibente elettrizzato messo a contatto di un conduttore, qualche volta gli somministra elettricità, e qualch' altra non produce in esso che una tensione accidentale, voglio dire una tensione duratura soltanto finchè dura il contatto del coibente elettrizzato. Nè tardai molto ad accorgermi che l' ottenersi o il non ottenersi la trasfusione dell' elettricità dipendeva dalla presenza

o dalla mancanza di un conduttore di seconda classe fra i due corpi che si portavano a mutuo contatto. Descriverò alcune delle molte esperienze che mi condussero a questa conchiusione.

II. Sulla sfera d'ottone che formava l'estremità superiore o il cappelletto di un elettrometro a foglia d'oro ho messo una piccola goccia d'acqua, poscia con un bastone di vetro elettrizzato toccai la sfera suddetta in un punto, nel quale non era nè quella goccia nè altro corpo umido, e le foglie dello stromento si respinsero per attuazione con dieci gradi di divergenza, ed appena si allontanò il bastone elettrizzato, tornarono le foglie alla loro posizione naturale. Ma avendo poi portato il bastone di vetro a contatto della gocciola d'acqua, le foglie acquistarono ancora la tensione di dieci gradi e la conservarono anche dopo che fu rimosso il vetro elettrizzato.

Alla gocciola d'acqua ho sostituito un pezzetto d'ostia da suggellare bagnato, e n'ebbi eguali risultati. Tale corpo umido era più comodo perchè più visibile.

Un cilindro metallico unito ad un bastone di vetro, se venga toccato da un corpo coibente elettrizzato, non concepisce tensione sensibile. Ma se sul cilindro v'è una goccia d'acqua, o una briciola di carta umida, o un altro corpo umido qualunque, e si tocchi col detto coibente dov'è quel corpo umido stesso, riesce tosto elettrizzato il cilindro metallico.

III. Se s'inumidisce coll'alito il cilindro metallico isolato, e si tocchi col coibente elettrizzato prima che svanisca l'appannamento prodotto dall'alito, ha pur luogo trasfusione di elettricità.

Se col bastone di vetro elettrizzato a quindici o venti gradi si tocchi il bastone metallico mentre comunica col suolo, perchè toccato con un dito della mano che lo sostiene pel manico di vetro, avviene che il bastone di vetro non perde sensibilmente della sua tensione elettrica ancorchè quel contatto duri sei, sette e più secondi. Ma se si alita sul bastone metallico, e poi vi si mette a contatto quello di vetro elettrizzato, questo viene rapidamente spogliato d'una gran parte dell'elettricità che aveva.

Nè è da dirsi che l' elettricità venga distrutta o dispersa dal vapore in cui si trasforma prestamente l' alito deposto sul metallo, giacchè se si tiene il bastone pel manico isolante, e non si tocca il metallo col dito, e poi, prima di esplorarne la tensione, si aspetta che l' appannamento dell' alito sia del tutto svanito, si ottiene egualmente la divergenza delle foglie dello elettrometro avvicinandogli il bastone metallico, ed ancora dopo parecchi minuti che l' appannamento è svanito.

Giova in questa sorta d' esperienze porre sulla sfera metallica dell' elettroscopio una sottile calotta di cera lacca, la quale fa sì che si può portare il bastone metallico elettrizzato a piccola distanza e sempre eguale, dalla sfera stessa senza che questa venga toccata. Così non accade trasfusione di elettricità, e si può esplorare più volte la tensione del bastone metallico senz' aver duopo di ricaricarlo.

IV. Al cilindro d' ottone munito di bastone di vetro qui sopra accennato attaccai un nastro di fil di canape ed in modo che ne pendeva un tratto lungo tre decimetri. Inumidito il nastro con acqua di pozzo, indi tenendo in mano il bastone di vetro, al quale era unito il detto cilindro portante il nastro bagnato, toccai l' ottone con un cannello di vetro elettrizzato, e l' ottone non conseguì tensione sensibile al solito elettrometro. Ma avendo toccato col detto vetro elettrizzato il nastro umido pendente, il cilindro d' ottone conseguì tosto la tensione di dodici gradi.

E ciò accadeva qualunque fosse il punto in cui toccassi il nastro umido, foss' anco stato all' estremità inferiore; anzi in questo caso ottenevasi per lo più una tensione più forte, a motivo delle punte assorbenti che i fili presentavano alla estremità inferiore del nastro.

V. Anche dopo che il nastro era asciugato osservavasi lo stesso fenomeno, bene inteso con tensione minore a parità di circostanze.

L' alcoole presenta il fenomeno come l' acqua, cioè messane una gocciola nella sfera dell' elettrometro, e toccando la

gocciola stessa con un bastone di vetro elettrizzato, viene tosto assorbita l' elettricità. Inoltre, distesa la gocciola sulla sfera, avviene che, per qualche minuto, toccando la sfera stessa col vetro elettrizzato, trasfondesi l'elettricità. E ciò, credo, perchè l' alcoole attira l' umidità.

All'acqua pura ho sostituito con pari successo l'acqua salata, gli acidi nitrico, solforico e acetico allungati, l'ammoniaca liquida, molte soluzioni saline, il sego alla temperatura di 25 gradi del termometro a scala comune. L' olio alla detta temperatura non assorbe l' elettricità.

VI. Così sostituendo in tali esperienze al vetro altri coibenti elettrizzati, come la cera lacca, lo zolfo, il bitume nero, la seta, l' ambra, la gomma elastica, la gutta perca ed altri coibenti, si ottengono eguali risultati.

Ma se, invece della goccia d' acqua o d' altro conduttore umido, si pone sul metallo una gocciola di mercurio, o una briciola di un conduttore metallico qualunque, o di carbone, mai non avviene succhiamento di elettricità.

Se col bastone di vetro elettrizzato tocco un piatto del condensatore dov' è asciutto, esso piatto non si elettrizza; bensì se tocco una goccia d' acqua, o una briciola di carta umida che si trovi sul medesimo.

VII. La comunicazione dell' elettricità per assorbimento ad un conduttore ha luogo anche quando il conduttore umido si trova, non sul conduttore, ma sul coibente. Infatti elettrizzato un bastone di vetro, o di cera spagna o di zolfo, e dopo avere veduto che, toccando la sfera dell' elettrometro, non trasfonde elettricità, si aliti un momento sul corpo elettrizzato, e poi subito si tocchi la sfera dell' elettrometro, e vedrassi trasfusa l' elettricità. Il che avviene perchè l' alito, come conduttore, porta rapidamente nel punto che va a contatto col metallo l' elettricità di cui il coibente è fornito (1).

(1) Da principio mi sembrò che colla cera spagna si ottenesse con difficoltà ed in minor grado l' assorbimento del fluido elettrico; ma in seguito vidi che si comporta presso a poco come il vetro.

Le principali esperienze precedenti vennero più volte ripetute con un pezzo di ambra, con bitume nero, con nastri di seta, e con varj altri coibenti.

VIII. Circa i nastri di seta si è osservato che se si adoperano così distesi come si suole, il fenomeno non riesce, cioè anche toccando la sfera d' ottone inumidita, non viene assorbita l' elettricità, o in quantità assai tenue; bensì se i nastri stessi sono avvolti ad un cilindro di vetro o di cera spagna. Per altro se la detta sfera metallica non è semplicemente inumidita, ma v'è su di essa la goccia d'acqua, il fenomeno accade coi nastri distesi presso a poco come cogli altri coibenti.

IX. Per vedere se anche una notabile massa conduttrice di seconda classe assorbe l' elettricità meglio che i metalli, ho messo due bicchieri di eguale capacità su d' un sostegno isolante; uno fu riempiuto d' acqua, l' altro di mercurio. Immersi poi l' estremità d' un bastone di vetro elettrizzato nel mercurio pel tratto di tre millimetri, poi toccai quel mercurio con un cilindro d' ottone isolato; ma questo non conseguì veruna tensione elettrica. Laddove elettrizzato di nuovo il bastone di vetro, ed immersane l' estremità per tre millimetri nell' acqua dell' altro bicchiere, e toccata poi l' acqua stessa col cilindro d' ottone isolato, questo acquistò una tensione che fu indicata da circa venti gradi del solito elettrometro.

Nè il risultato di questa esperienza potrebbe attribuirsi all' essere la capacità per l' elettrico molto più grande nel mercurio che non nell' acqua: imperocchè, per quanto mi risultò da alcune esperienze istituite a questo proposito, que' due volumi eguali d'acqua e di mercurio sono dotati di eguale capacità pel fluido elettrico. Infatti, caricata una boccia di Leida a venti gradi di tensione, e messa in comunicazione l' armatura esterna della boccia stessa col bicchiere di mercurio, la tensione della boccia scemava di un grado. Ricaricata poi la boccia alla tensione di venti gradi (sempre dell' elettrometro a foglia d' oro), e poi messa in comunicazione l' armatura interna col bicchier d' acqua, la tensione della boccia stessa calò parimente d' un grado.

Ripetuta l' esperienza colla boccia carica a tensione molto maggiore (a venti gradi dell'elettrometro a doppio quadrante), si osservò che e l' acqua e il mercurio in egual massa conseguivano tensione eguale quando venivano messi in comunicazione coll' armatura interna della boccia di Leida.

Parecchie delle sperienze fin qui descritte le ho ripetute e con eguali risultati adoperando un elettrometro avente in cima una sfera di legno invece che di metallo.

X. Il fenomeno in discorso dipenderebbe forse dalla facoltà elettromotrice de' coibenti e de' metalli? cioè dall' elettrizzarsi reciprocamente in contrario senso il coibente ed il metallo quando vengono fra loro a contatto?

L' ottone, per esempio (e così può dirsi dello zinco e di altri metalli), a contatto del vetro si elettrizza negativamente e, non solamente quando il vetro è allo stato naturale, ma anco quando è elettrizzato in più. Perciò potrebbe credersi che, quando il vetro dotato di tensione positiva tocca l'ottone, non gli comunica della sua elettricità perchè l' ottone si costituisce in quel momento in tensione negativa, e con questa contrabbilancia la positiva del vetro, e quindi non ne riceve. Laddove, quando tra il metallo ed il vetro v'è un corpo umido, il quale o non si elettrizza punto a contatto del coibente, o acquista una tensione così piccola che non riesce sensibile; e l' elettricità del vetro passa al metallo perchè non v' è elettricità opposta che lo impedisca.

Dobbiamo per altro osservare che le tensioni in cui si costituiscono l' ottone ed il vetro pel mutuo contatto è così debole, che quand'anche si ripeta il contatto quindici o venti volte, e sempre con punti diversi della superficie del vetro, l' elettrizzazione non arriva alla centesima parte di quella che acquista il vetro sfregato colla pelle o colla lana, e quindi è impossibile che la piccolissima tensione, in cui si costituisce l' ottone a contatto del vetro, contrabbilanci quella del vetro nelle sperienze sopra descritte.

E vi è poi di più che anco il vetro elettrizzato negativamente (o mediante lo sfregamento colla pelliccia di lepre, o scorrendo sulla superficie del medesimo con una punta metallica che sporge dall' armatura interna d' una boccia carica in meno) offre lo stesso fenomeno: cioè se si tocca con esso vetro immediatamente o la sfera dell' elettrometro, o un altro pezzo metallico qualunque isolato, non gli comunica tensione elettrica percettibile; bensì se vi è un corpo umido intermedio.

Esiste dunque ne' corpi una facoltà di attirare o assorbire l' elettricità dai corpi coibenti, la quale merita di essere distinta dalla facoltà conduttrice in quanto che questa è molto più cospicua ne' conduttori metallici che ne' liquidi, e quella al contrario la è molto più ne' conduttori liquidi. Non mi è noto, se tale proprietà abbia attirato sin' ora l' attenzione dei fisici.

XI. Con un bicchiere di cristallo avente il fondo ben levigato ho ripetuto varie delle sperienze sopra descritte. Strofinando la base inferiore del bicchiere col palmo della mano, elettrizzavasi egregiamente in più, e toccando con essa base la sfera dell' elettrometro, questo attuavasi; ma non conseguiva tensione sensibile permanente se non quando erasi prima alitato sulla sfera, o era su di essa una goccia d' acqua, e toccavasi la goccia medesima.

E si fu nell' esperimentare con questo bicchiere che io m' accorsi che i conduttori umidi succhiano l' elettricità dai coibenti anco quando questi non sono elettrizzati che per attuazione. Poichè, se, dopo di avere strofinato colla mano il fondo esteriore del detto bicchiere, io andava a toccare col fondo interiore la sfera solita dello stromento mentre essa era umida, ottenevasi tensione permanente. E questa positiva o negativa secondo che positiva o negativa era l' elettricità della base esteriore del bicchiere.

Anche con un bastone di vetro si vede presso a poco la stessa cosa. Imperocchè sfregandolo nel senso della sua lunghezza su di un cilindro metallico, e tenendolo sempre nella

medesima posizione, ed in modo che il suo asse sia normale a quello del cilindro metallico (nel qual caso non riesce elettrizzata che una sottilissima superficie di esso bastone di vetro), toccando poscia la sfera dello stromento con un punto della superficie longitudinale opposta a quella che è stata sfregata, si ottiene pure la trasfusione dell' elettricità, purchè il punto della sfera che si va a toccare sia inumidito.

Tanto in questo che nel precedente esperimento del bicchiere l' assorbimento avviene, non perchè l' elettricità serpeggiando sulla superficie del vetro, si porti al luogo dov' è il conduttore umido, ma sibbene perchè la superficie della base interiore del bicchiere nel primo esperimento, e la superficie opposta a quella elettrizzata nel secondo è attuata, e anco l' elettricità di attuazione viene assorbita. E che sia veramente così lo dimostra il seguente sperimento.

Si ponga un bastone di vetro a contatto colla sfera dello elettrometro, ed un' altro bastone simile elettrizzato si ponga a contatto del primo, o anco solamente vicino ad esso quanto basta perchè le foglie dell' elettroscopio divergano notabilmente. Se il bastone di vetro attuato tocca la sfera immediatamente, allontanati da essa li due vetri, cessa ogni tensione; ma se la tocca mediante un conduttore umido, rimossi i vetri, persevera la tensione. E ciò avviene perchè il liquido succhia e trasmette all' elettrometro l' elettricità propria del vetro che aveva a contatto. Infatti questo bastone trovasi, dopo l' esperienza, elettrizzato in meno o in più secondo che l' altro vetro era investito di elettricità positiva o negativa.

XII. Se il conduttore umido succhia l' elettricità dai coibenti elettrizzati tanto meglio deve succhiarla dai conduttori: ma in allora questa proprietà si confonde con quella di condurre l' elettricità.

Le cose fin qui vedute mi suggerirono di far costruire un elettrometro terminato superiormente da tre sfere, una di metallo nudo, l' altra di metallo ricoperto d' uno strato isolante e la terza di legno cava e aperta superiormente per contenere

una piccola spugna umida. Con tale stromento se voglio cimentare lo stato elettrico di corpi coibenti, li porto a contatto della sfera metallica nuda quando voglio che l' elettrometro non sia che attuato, e li porto a contatto della sfera umida quando voglio che la loro elettricità sia trasfusa. Se poi i corpi elettrizzati da cimentare sono metallici, o carbonosi, allora li porto a contatto della sfera colla superficie coibente quando nello stromento non voglio che l' attuazione, e, quando voglio trasfondere in esso l' elettricità, pongo i corpi elettrizzati a contatto della sfera metallica nuda (1).

Fin' ora, per quanta diligenza io abbia usata non ho potuto accorgermi di alcuna differenza fra la tensione che acquista lo stromento quando un corpo metallico elettrizzato tocca immediatamente il cappelletto metallico, e la tensione che acquista quando un tal corpo gli comunica l' elettricità mediante un conduttore liquido. Egli è per ciò, che questa proprietà la ho chiamata: *Facoltà di assorbire l' elettricità dai corpi isolanti elettrizzati.*

XIII. Più volte m' avvenne d' osservare che l' elettrometro acquistava una tensione maggiore quando poneva il vetro elettrizzato a contatto della sfera mentre era umida, che non

(1) La sfera coperta di ceralacca aggiunta all' elettroscopio rende lo stromento servibile in alcune circostanze come condensatore a forza condensante variabile. Abbiasi una boccia di Leida carica a così piccola tensione che, esplorata, produca piccolissima divergenza nelle foglie dell' elettroscopio. Se, mentre la sfera della boccia è a contatto di quella d' ottone nudo dello stromento, si applica un dito sulla sfera inverniciata, indi si allontana la bottiglia e poscia anche il dito, si avrà una divergenza di qualche grado. E se, invece di un dito se ne applicheranno due o tre o quattro, o il palmo della mano, si otterranno tensioni sempre maggiori, e fino di venti e più gradi. Le sfere di questo istromento hanno il diametro di tre centimetri, e le foglie d' oro sono lunghe un decimetro e larghe quindici millimetri.

Si tocchi colla mano asciutta la sfera inverniciata, e senza sfregamento sensibile; e non si avrà indizio di tensione. Ma se, prima di levar la mano o le dita da quel contatto, si tocchi per un momento la sfera nuda, si otterrà tosto una tensione negativa e cospicua. Ed ecco anche un piccolo elettroforo, come si ha sempre, volendolo, anco negli altri condensatori.

quando era asciutta. Ed ho poi veduto che quella maggiore tensione accade quando il conduttore umido si estende anco al coibente elettrizzato.

Messo a contatto della sfera dell' elettrometro un cilindro di cera bianca elettrizzato, ne fa divergere le foglie, le quali poi, allontanando il detto cilindro, si restringono al solito. Ma se dopo l'elettrizzazione si alita una volta sul cilindro di cera, e poi si porta a contatto dell' elettrometro, fa divergere le foglie molto più di prima comunicandogli elettricità permanente.

L' esperienza ora descritta non riesce collo stesso grado di perspicuità con ogni coibente: ma ciò deriva o dal non deporsi su di esso facilmente l' umidità, o dallo svanire più o meno rapidamente l' appannamento prodottovi, o perchè l' umidità vi si depone in troppa quantità, o troppo estesamente, per cui, arrivando alla mano, il coibente viene spogliato della elettricità che aveva. Dal che ne segue che con alcuni coibenti, come sono per esempio le candele di cera bianche, quest' esperienza riesce più facilmente d' estate, con altri, come il vetro e la cera spagna comune riesce più facilmente d' inverno. Sempre inteso che e nell' una e nell' altra stagione si esperimenti dove l' aria non è umida.

XIV. Farò da ultimo osservare che, mediante un velo umido si può assorbire l' elettricità da un coibente elettrizzato e distribuirla su di un altro.

Abbiansi due cilindri di vetro, un de' quali elettrizzato; se coll' altro cilindro si tocchi anco ripetutamente il primo, non gli viene sottratta elettricità di sorta: ma se si appanna un pochetto coll' alito, o con altro vapore umido qualunque, il cilindro non elettrizzato, e poi si porti a contatto dell'altro, e mentre è ancora appannato, questo rimane investito di elettricità. La quale viene conservata anche dopo che è svanito tutto il vapore che erasi rappigliato sullo stesso coibente.

Augurandomi opportunità per occuparmi del vario grado di facoltà assorbente nei diversi conduttori, riassumo il sin qui detto colle seguenti principali proposizioni:

1ª Esiste ne' corpi la facoltà di assorbire l' elettricità dai coibenti elettrizzati, lo sieno poi in più o in meno.

2ª Tale facoltà assorbente non può confondersi colla conduttrice, perchè questa è molto più cospicua ne' conduttori secchi o di prima classe, e quella lo è incomparabilmente più in quelli di seconda.

3ª Essa si manifesta e quando il liquido è in minima quantità, e quando presenta una massa notabile. E nel primo caso, o sia raccolto il liquido in piccolissima area, o sia disteso sul metallo a forma di velo o di appannamento.

4ª Essa non può attribuirsi ad una differente capacità per l' elettricità, di cui sieno dotati i conduttori secchi rispetto agli umidi: nè influisce alla riuscita dei fenomeni relativi alla facoltà medesima lo stato elettrico, in cui si costituiscono i corpi coibenti a contatto dei metalli.

5ª Tale assorbimento ha luogo ancora quando il coibente è elettrizzato per induzione.

6ª Non è solamente quando il liquido assorbente riposa su d' un metallo o altro conduttore solido che ha luogo l' assorbimento; ma anche quando il liquido assorbente è su d' un corpo isolante. In questo caso lo stato elettrico acquistato dall' isolante persiste anche dopo che il liquido assorbente è affatto scomparso.

SPOSIZIONE DEL METODO DELLE EQUIPOLLENZE

MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE

PROF. GIUSTO BELLAVITIS

Ricevuta il dì 16. *Febbrajo* 1854.

Nella Memoria sulla Classificazione delle curve del terzo ordine (pag. 1 del pres. Volume) mi proposi di esporre dettagliatamente un metodo di Geometria analitica da me immaginato or sono venti anni, e che da prima dissi metodo delle *equazioni geometriche*; cangiando poscia questo nome in quello più breve di *equipollenze*. Gli scritti principali, in cui trattai di questo metodo sono: il *Saggio* pubblicato nel 3.° Vol. (1835) degli Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto; — il *Metodo* nel Tomo VII (1837) della stessa opera periodica; — le *Soluzioni grafiche* nel Vol. I (1843) delle Memorie dell' Imp. R. Istituto Veneto. — Forse perchè mi tenni a soverchia concisione, accennando a molte applicazioni geometriche e meccaniche, anzichè sufficientemente estendermi in alcune poche; — forse perchè in tanta vastità della scienza geometrica ogni Dotto sta ritroso ad impiegare anche poco tempo per apprendere un nuovo metodo, e ritiene che con quelli da lui conosciuti potrà giungere agli stessi risultamenti; — forse per altre ragioni; — i Geometri non posero attenzione al metodo da me proposto, nè alle soluzioni di incontestabile semplicità che io ne ricavai in quelli ed in alcuni altri miei scritti. — Pure parecchi dei principj da me assunti si vanno ognora più adottando: il Saint-Venant mostrò i vantaggi di considerare le *quantità geometriche*; le sue *somme geometriche* sono precisa-

mente quelle che io pure da prima così denominava, ma che poscia dissi *composte-equipollenti*: ed il Cauchy notò a più riprese i pregi delle teorie del Saint-Venant. Spero adunque non del tutto inopportuno ritornare ancora una volta sul metodo delle equipollenze, esponendolo con tutta la maggior chiarezza che mi sarà possibile.

Questo metodo soddisfa un desiderio del Carnot di trovare un algoritmo, che rappresenti nello stesso tempo e la grandezza e la posizione delle varie parti di una figura; ne risultano quindi, per via diretta, eleganti e semplici soluzioni grafiche dei problemi geometrici. Il metodo delle equipollenze comprende come casi particolari i metodi delle coordinate parallele o polari, il calcolo baricentrico ecc.: i problemi sulle curve vi si risolvono in generale senza preferire una maniera di rappresentazione ad un' altra; perlochè i calcoli sono più spediti di quelli della Geometria analitica, ed i risultamenti sono espressi sotto forma più semplice.

È essenziale nel metodo delle equipollenze la distinzione delle parti positive dalle negative, sicchè la *correlazione* delle figure è una conseguenza necessaria dell' algoritmo, senza che vi sia bisogno di alcuna speciale osservazione, perlochè viene tolta ogni tema di errore. Chi sia abituato ai principj della *Géometrie de Position* troverà facile seguirmi nelle poche convenzioni su cui si appoggia il metodo; forse si potrebbero rendere ancora più conformi all' uso ordinario; ma non trovo conveniente di posporre la brevità delle formule ad una leggerissima facilità. Le convenzioni saranno facili da ritenersi a memoria, perchè alcune conformi alle solite regole relative alle quantità positive e negative, altre conformi alla notissima composizione delle forze. Le equipollenze esprimono relazioni di rette considerate non solo rispetto alla loro grandezza, ma eziandio rispetto alla direzione (o inclinazione che voglia dirsi); sicchè esse sono essenzialmente differenti dalle equazioni, che esprimono relazioni di sole quantità reali; nulladimeno il calcolo delle equipollenze segue precisamente le stesse regole,

che valgono nel calcolo delle equazioni, il che torna non poco vantaggioso.

La vastità ed il progresso della Geometria sono tali che, piuttosto di rifiutarsi allo studio di nuovi metodi, forse non andrà molto che soltanto dei metodi si dovrà tener conto, onde possedere il maggior numero di mezzi per trovare quelle verità che tornano opportune; essendochè sia ormai impossibile tenersi presenti al pensiero tutte quelle che vanno discoprendosi.

I. Principj del metodo delle equipollenze.

1. È nostro scopo esprimere le relazioni di grandezza e di posizione, che hanno luogo tra le rette di una figura, in guisa da poterne dedurre quelle relazioni, che costituiscono un teorema geometrico o servono alla risoluzione d' un problema. Se nella equipollenza esprimente la condizione del problema sia compreso un solo punto ignoto, l' equipollenza si risolverà rispetto a questo punto ignoto colle stesse regole che valgono per la risoluzione delle equazioni, e la formula finale indicherà, senza bisogno di alcuna considerazione geometrica, quali costruzioni grafiche debbano farsi per la desiderata soluzione; che riuscirà quasi sempre una delle più semplici, che potesse trovarsi anche mediante le artificiose e indirette considerazioni della così detta Geometria sintetica.

2. Indicheremo al solito una retta mediante le due lettere che ne segnano gli estremi; ma dovrà porsi attenzione che con ciò non s' intende esprimere la sola grandezza della retta, bensì la grandezza e la direzione. Perciò non è lecito scambiare per esempio MQ con QM. Queste MQ, QM indicano bensì una stessa retta, ma presa in direzioni opposte; confondere l' una coll' altra sarebbe lo stesso come confondere una quantità positiva colla negativa di egual valore; ed infatti vedremo che MQ è identica con —QM, e —MQ con QM. Questa convenzione è spesso ammessa dai Geometri moderni.

3. Perchè una retta possa sostituirsi ad un'altra non basta che esse sieno eguali (cioè di egual grandezza), bisogna inoltre che esse sieno parallele e dirette per lo stesso verso. Due rette che hanno tali relazioni si dicono *equipollenti*; e nel calcolo delle equipollenze ad una retta può sempre sostituirsi una sua equipollente. Così la retta AB (Fig. 1[a]) è equipollente alla DC, ed è soltanto eguale alla EF; ciò si distingue con due segni differenti, scrivendo AB ≏ DC, e AB = EF. Siccome potrebbesi prendere qualche abbaglio adoperando in uno stesso calcolo ed equipollenze, qual è la AB ≏ DC, e semplici eguaglianze, qual è la AB = EF; così per indicare la grandezza di una retta senza curare la sua inclinazione mi servirò della caratteristica gr; per esempio con gr AB = gr EF indicherò che le lunghezze di queste rette sono eguali. Per in quanto alle lunghezze delle rette, ed in generale alle grandezze espresse alla maniera dell' Algebra con lettere apposite (ordinariamente di carattere piccolo corsivo), non vi è alcun inconveniente ad impiegare in uno stesso calcolo ed equazioni relative alle grandezze ed equipollenze relative alle rette.

4. Una retta dicesi equipollente ad un' altra moltiplicata per un numero positivo, quando le due rette oltre avere quel tal rapporto sono parallele e dirette per lo stesso verso. Così si dirà che DN è equipollente alla AB moltiplicata pel numero positivo n, e si scriverà DN ≏ n.AB, quando sia gr DN = n.gr AB, ed inoltre le DN, AB sieno parallele e dirette per lo stesso verso. Se il predetto moltiplicatore sia un numero negativo le rette avranno bensì il rapporto espresso dal valore assoluto di tal numero, e saranno parallele, ma dirette oppostamente. Così se si abbia CN ≏ $(n-1)$ AB, ed il numero $(n-1)$ sia negativo, le lunghezze delle rette CN, AB avranno il rapporto $1:(1-n)$, ed inoltre la CN sarà parallela e diretta nel verso opposto della AB: perciò adoperando la NC, che ha direzione opposta della CN, potremo anche scrivere NC ≏ $(1-n)$ AB, essendo $(1-n)$ un coefficiente numerico positivo. In generale si può sostituire a qualsivoglia retta

CN la sua opposta NC, purchè si muti nello stesso tempo il segno del suo coefficiente.

5. Per tal maniera è definito il significato di un' equipollenza a due soli termini ognuno dei quali contiene una sola retta. Vediamo adesso come si uniscano insieme più rette, tenendo conto e delle loro grandezze e delle loro direzioni; a questa unione daremo il nome di *somma geometrica*, ossia *composta-equipollente*. — Per meglio fissare le idee immaginiamo che un viaggiatore percorra una linea spezzata OPQR (Fig. 2ª), il viaggio effettivo ed utile che egli per tal guisa avrà fatto non sarà eguale alla lunghezza della linea spezzata, ma equivalerà alla retta OR, per la quale egli ugualmente sarebbe giunto da O in R; questa retta OR la diremo la *composta-equipollente* di tutte le rette, che costituiscono la linea spezzata. — Sappiamo dalla Meccanica che tal *composta-equipollente* esprime la risultante di forze applicate al punto O, e rispettivamente equipollenti (cioè uguali, parallele, e dirette per lo stesso verso) alle OP, PQ, QR.

6. Per costruire la composta-equipollente delle rette AB, DC, EF si tirerà, per un punto qualunque O, la OP equipollente alla AB, poscia di seguito la PQ equipollente alla DC, e la QR equipollente alla EF; la OR sarà la chiesta composta-equipollente. — È facile dimostrare che, con qualunque altro ordine si disponessero l'una dopo l'altra le rette equipollenti alle date, si otterrebbe sempre la medesima OR. Prendendo in altro luogo il punto arbitrario O si otterrà per composta-equipollente un' altra retta, la quale peraltro sarà sempre equipollente alla OR. — Se le rette fossero tutte parallele la loro composta-equipollente sarebbe la stessa cosa della loro somma algebrica, cioè somma tenendo conto dei segni.

7. Ciò bene compreso, sarà facilissimo intendere il significato e costruire una equipollenza polinomia. Serva d'esempio la (Fig. 3ª) $DE + \frac{1}{2}AB - CB \bumpeq \frac{1}{3}DF - nAF$. Si tiri la OP equipollente alla DE, poscia di seguito la $PQ \bumpeq \frac{1}{2}AB$ (il che s'intenda nel significato stabilito al §. 4), e ancora di

seguito la $QR \bumpeq -CB \bumpeq BC$, si otterrà così la *composta* OR, la quale sarà equipollente alla composta TV ottenuta tirando, per un qualunque punto T, la $TU \bumpeq \frac{1}{3}DF$, e di seguito la $UV \bumpeq -n.AF$, n essendo un numero dato, che nel caso della Fig. 3ª è per sè stesso negativo.

8. Noi possiamo mutar la disposizione dei termini di una equipollenza; ed eziandio passare un termine da un membro all' altro, purchè, colla stessa regola che vale per le equazioni, se ne muti il segno, e l' equipollenza rimarrà ancora esatta. Così, per esempio, la precedente equipollenza può scriversi $\frac{1}{2}AB + BC + DE + n.AF - \frac{1}{3}DF \bumpeq 0$, cioè costruendo la composta-equipollente dei cinque termini del primo membro si otterrà, invece di una linea spezzata, un poligono chiuso. — Noi possiamo anche moltiplicare tutti i termini di un'equipollenza per uno stesso numero senza turbarne l' esattezza. Ciò dipende dalla proporzionalità dei lati di due figure omotetiche, cioè che hanno i lati rispettivamente paralleli. — In una parola, noi possiamo eseguire sulle equipollenze operazioni precisamente analoghe a quelle che si fanno sulle equazioni algebriche, e che dipendono dalla somma o dalla sottra, oppure anche dalla moltiplica o divisione per numeri.

9. Notiamo, per incidenza, che se nell' equipollenza dei due §§. precedenti ci fosse ignota la retta AF, quand' anche non conoscessimo n, pure l' equipollenza valerebbe ad indicarci la direzione della AF, che è parallela alla UV, essendo $TV \bumpeq OR$. Vedremo sempre che mentre un' equazione serve a determinare una sola quantità, una equipollenza ne determina due; e quando pure essa determina una sola retta, viene ancora a determinare due quantità, cioè la lunghezza della retta e la sua inclinazione.

10. La stabilita composizione delle rette rende palese che nel calcolo delle equipollenze si ha il:

CANONE 1.° *Qualunque sieno i tre punti* A, B, C *è sempre* (1) $AB + BC \bumpeq AC$; *equipollenza che può indifferentemente prendere le forme* (2) $BC \bumpeq AC - AB$, (3) $AB \bumpeq AC - BC$,

(4) $AB + BC + CA \bumpeq 0$. Potrà sembrare che questo canone sia così immediata conseguenza delle definizioni, che non valesse la pena d'avvertirlo; ma esso è di continuo uso per togliere una retta altre sostituendone; sicchè giova rendersela abituale. Aggiungeremo anzi una regola per distinguere a colpo d'occhio queste e le altre equipollenze per sè stesse identiche, acciocchè senza nessuna fatica di mente, e senza nemmeno guardare la figura si possa assicurarsi della loro esattezza.

11. In forza del presente canone ad una qualunque retta MN possiamo sostituire (3) il binomio $MZ - NZ$, Z essendo un punto affatto arbitrario: ora se fatta analoga sostituzione per ciascuna retta ne risulti un' espressione identica, tale sarà anche l' equipollenza da cui siamo partiti. Così, per esempio, la $BC \bumpeq AC - AB$ è un' equipollenza identica, perchè lo è la $BZ - CZ \bumpeq AZ - CZ - (AZ - BZ)$. Lo è pure la $AB + BC \bumpeq AD - CD$, giacchè $AZ - BZ + BZ - CZ \bumpeq$ $\bumpeq AZ - DZ - (CZ - DZ)$. Invece se mai per isbaglio avessimo scritto $AB + CB \bumpeq AC$, ci accorgeremmo dell' errore, considerando che $AZ - BZ + CZ - BZ$ non è identica con $AZ - CZ$.

12. Ci resta da stabilire qual sia il significato delle equipollenze, che contengono prodotti o quozienti di rette tra loro moltiplicate o divise: a tal fine ci bisogna ristringerci alla considerazione delle figure poste in un solo piano; mentre *quanto finora abbiamo detto vale anche per lo spazio.*

13. Premettiamo una convenzione, che renderà più spedito il linguaggio. Due cose si osservano in ogni retta, la *lunghezza* e la *direzione*: per calcolare le *lunghezze* gli antichi Geometri considerarono sempre i *rapporti* tra due rette; i moderni trovarono più comodo di considerare le *grandezze* in modo assoluto paragonandole ad una assunta arbitrariamente per *unità di misura*; dopo di che il *rapporto* di due rette nasce dalla *divisione* delle loro *grandezze*. Analogamente a ciò, mentre finora per calcolare le *direzioni* delle rette si considerarono gli *angoli* compresi tra due rette, noi invece troveremo più

comodo di considerare le *inclinazioni* delle rette in modo assoluto paragonandole ad una retta assunta arbitrariamente per *origine delle inclinazioni*, dopo di che l' *angolo* di due rette sarà la *differenza* delle loro *inclinazioni*. L' inclinazione di una retta la segneremo colla caratteristica inc., come già segnammo (§. 3) la grandezza con gr.

14. Prendiamo per *origine delle inclinazioni* la retta OH (Fig. 4ª) (che per fissare le idee supporremo orizzontale e diretta da sinistra verso destra), diremo *inclinazione* della retta OM l' angolo HOM da essa formato colla OH; avvertendo che le inclinazioni positive si prendono da destra all' insù, cioè pel verso HMIL, e che le inclinazioni prese nel verso opposto HRL si dicono negative. Siccome le inclinazioni si contano da 0° a 360°, così l' inclinazione della retta OR può riguardarsi, per esempio, tanto di —40° quanto di 320°, cioè una differenza di 360° non cangia l' inclinazione. L' angolo MON è uguale all' inclinazione della ON meno l' inclinazione della OM, cioè ang. MON = inc ON — inc OM. Si avverta che anche gli angoli positivi debbono prendersi nel verso HMNI, e che ogni angolo s' intende contato dalla prima alla terza lettera; così l' angolo NOM è negativo, perchè = inc OM — inc ON.

15. L' inclinazione della retta AB è quella stessa della OM ad essa parallela e diretta per lo stesso verso: l' inclinazione della BA è quella stessa della OL, che è la prolungazione della MO, perciò (1) inc BA = inc AB ± 180°; al 180° si è dato il doppio segno, giacchè come si disse, una differenza d' inclinazione di 360° non produce alcun effetto. Oltre la precedente (1) si rammenti che

(2) ang. BAC = inc AC — inc AB, ed in forza della (1) anche (3) ang. BAC = inc CA — inc BA.

16. Abbiamo veduto che cosa debba intendersi per una retta equipollente alla composta di due o più rette; stabiliamo ora per definizione qual sia la retta equipollente ad un monomio formato colla moltiplica o divisione di alquante rette.

Se si abbia (1) $GH \simeq \frac{AB.CD}{EF}$ la retta GH non solo debbe avere la grandezza espressa dall' equazione (2) $\text{gr}\, GH = \frac{\text{gr}\, AB . \text{gr}\, CD}{\text{gr}\, EF}$, ma inoltre la sua inclinazione dev' essere (3) $\text{inc}\, GH = \text{inc}\, AB + \text{inc}\, CD - \text{inc}\, EF$; viceversa se sussistano insieme le (2), (3), avrà luogo l' equipollenza (1). Nello stesso modo l' equipollenza (4) $OP \simeq \frac{GH.IL}{MN}$ significa (5) $\text{gr}\, OP = \frac{\text{gr}\, GH . \text{gr}\, IL}{\text{gr}\, MN}$, e (6) $\text{inc}\, OP = \text{inc}\, GH + \text{inc}\, IL - \text{inc}\, MN$. Sostituendo nelle (4) (5) (6) le (1) (2) (3) vedremo che l' equipollenza (7) $OP \simeq \frac{AB.CD.IL}{EF.MN}$ comprende le due condizioni (8) $\text{gr}\, OP = \frac{\text{gr}\, AB . \text{gr}\, CD . \text{gr}\, IL}{\text{gr}\, EF . \text{gr}\, MN}$, (9) $\text{inc}\, OP = \text{inc}\, AB + \text{inc}\, CD + \text{inc}\, IL - \text{inc}\, EF - \text{inc}\, MN$. Giova osservare che dalla (7) si deduce la (8) mutando l'equipollenza in equazione relativa alle grandezze, e la (9) operando come se si volessero prendere i logaritmi, ma scrivendo inc in luogo di log. Queste due regole serviranno in modo simile ad interpretare una qualunque equipollenza binomia. L' equipollenza (1) potrebbe anche scriversi sotto la forma $AB.CD \simeq EF.GH$, ed esprimerebbe ancora le due condizioni $\text{gr}\, AB . \text{gr}\, CD = \text{gr}\, EF . \text{gr}\, GH$, $\text{inc}\, AB + \text{inc}\, CD = \text{inc}\, EF + \text{inc}\, GH$. — Se i membri dell' equipollenza abbiano qualche coefficiente numerico, e sia per esempio (10) $QR \simeq \frac{n.AB.CD}{EF}$, essendo n positivo; col mezzo della (1) avremo $QR \simeq n.GH$, alla quale dovremo dare il significato già stabilito al §. 4; perciò la (10) esprimerà che $\text{gr}\, QR = n.\text{gr}\, GH = \frac{n.\text{gr}\, AB . \text{gr}\, CD}{\text{gr}\, EF}$, e che $\text{inc}\, QR = \text{inc}\, GH = \text{inc}\, AB + \text{inc}\, CD - \text{inc}\, EF$. Così si vede che la condizione relativa alle inclinazioni è indipendente dai coefficienti numerici positivi. Abbiamo già detto (§. 4) che un coefficiente negativo porta una differenza d' inclinazione di 180°.

17. Da quanto abbiamo ora stabilito sulle equipollenze binomie e prima (§. 7) sulle polinomie, di cui ciascun termine contiene una sola retta, risulta l'interpretazione di ogni equipollenza omogenea, in cui le rette sieno tra loro combinate mediante i segni di somma, sottra, moltiplica, divisione, od anche i segni di elevazione a potenze od estrazione di radici ad esponenti numerici, derivando nel solito modo queste due ultime operazioni dalle due precedenti. Così se abbiasi, per esempio, l'equipollenza (per comodo tipografico adopero i due punti : come segno di divisione, che abbraccia tutte le quantità fino al primo +, —) AB.CD : EF + n(CD)^2 : AB — 2.FG ≏ 0, e si costruisca una retta LM tale che (§. 16) sia LM ≏ AB.CD : EF, ed inoltre sia MN ≏ n(CD)^2 : AB, la proposta equipollenza si ridurrà a LM + MN — 2.FG ≏ 0, ed esprimerà che la composta delle rette LM, MN, cioè (§. 10) la LN è equipollente alla 2.FG.

18. Chi voglia riandare col pensiero tutto questo sistema di speciali significati attribuiti ai segni ≏ + — . : ec. trasportati dalle equazioni alle equipollenze si convincerà facilmente della verità di questo utilissimo

Canone fondamentale. *Sulle equipollenze relative alle figure piane si possono fare tutte quelle operazioni e trasformazioni, che sono legittime per le equazioni algebriche, e le equipollenze che ne risultano sono sempre esatte.* — Così, per esempio, se un' equipollenza si moltiplichi per PQ : RS, ciò è lo stesso come moltiplicare tutti i termini pel rapporto numerico gr PQ : gr RS, ed accrescere le loro inclinazioni di inc PQ — inc RS; sicchè il poligono espresso dall'equipollenza si cangerà in altro simile e ruoterà di un angolo eguale a inc PQ — inc RS, ma si conserverà sempre un poligono chiuso.

19. Ogni qual volta noi perverremo ad una equipollenza binomia potremo supporla ridotta (§. 16) alla forma m.IL ≏ n.MN, e ne dedurremo le due conseguenze inc IL = inc MN, m.gr IL = n.gr MN. Che se pei dati da cui si partì sia impossibile che inc IL = inc MN

ne dedurremo che ambedue i coefficienti m, n sono nulli; perciò abbiamo il

Canone 2.° *Se i due termini di un' equipollenza binomia abbiano inclinazioni differenti, ciascuno di essi è nullo.*

20. Ogni qual volta noi perverremo ad un' equipollenza trinomia potremo porre ciascuno dei tre termini rispettivamente equipollenti a ciascuno di quelli della trinomia identica (§. 10) $LM + MN + NL \bumpeq 0$. Ora se mai avvenga che sia $\mathrm{inc}\, LM = \mathrm{inc}\, MN$, le due rette LM, MN staranno per diritto l' una dell' altra, ed LN ne sarà la vera somma; così si rende evidente il

Canone 3.° *Se due termini di un' equipollenza trinomia abbiano eguali inclinazioni, l' altro termine (supposto che tutti tre sieno trasportati in un membro) avrà un' inclinazione che differirà di* 180° *da quella dei precedenti, e la sua lunghezza sarà eguale alla somma di quelle dei due primi termini.*

21. Per terminare la sposizione del metodo delle equipollenze avrei da spiegare il significato e l' uso di altre due segnature; ma credo opportuno premettervi alcune applicazioni degli esposti principj. Diamo da prima un' occhiata ai teoremi geometrici implicitamente compresi nei medesimi. Uno dei fondamenti del metodo delle equipollenze è l' eguaglianza degli angoli coi lati paralleli; non è quindi meraviglia che da quel metodo possano trarsi i teoremi della teoria delle parallele. — L' altro fondamento del metodo delle equipollenze è la proporzionalità delle figure simili, perciò dai canoni del metodo si potrebbero dedurre i teoremi sulla similitudine od eguaglianza dei triangoli. Ma non mi arresto su questa specie di circolo vizioso di trarre dal metodo quelle stesse verità che servirono a formarlo.

22. Nulladimeno notiamo due facili esempj. Se un quadrilatero ABCD abbia due lati opposti AB, DC eguali e paralleli, ciò si esprime coll' equipollenza $AB \bumpeq DC$, e sommando BD ad ambedue i membri si ha pel primo canone $AD \bumpeq BC$, cioè anche gli altri due lati sono eguali e paralleli.

— La condizione che ABCD sia un parallelogrammo, cioè abbia i lati opposti paralleli, è espressa dalle due equipollenze (§. 4) $AB \triangleq m.DC$, $AD \triangleq n.BC$, dove i coefficienti indeterminati m, n sono posti ad indicare che quei lati sono paralleli, ma che nulla sappiamo sulle loro lunghezze. Col mezzo del 1° canone ridurremo tutti i termini a contenere le sole AB AC AD, cioè $AB \triangleq m.AC - m.AD$, $AD \triangleq n.AC - n.AB$, ed eliminando AD sarà $AB \triangleq (m - mn) AC + mn.AB$, e siccome AB, AC non sono parallele, così pel 2° canone dovrà essere $1 - mn = 0$, $m - mn = 0$, cioè $m = 1$, $n = 1$; e quindi i lati opposti del parallelogrammo oltre che paralleli sono uguali.

23. Nei principj finora adoperati non entra l' eguaglianza di due triangoli eguali in ogni loro parte ma *rovesci* l' uno rispetto all' altro, cioè tali che uno senza uscire del proprio piano non potrebbe venir a combaciare sull' altro, ma occorrerebbe che esso si *rovesciasse*, sicchè la faccia del suo piano che era al di sotto venisse al di sopra. Dall' eguaglianza di due triangoli *rovesci* deriva la nota proprietà dei triangoli isosceli; per non dover ricorrere nemmeno a questo teorema geometrico, gioverà che lo introduciamo nel nostro metodo mediante il seguente

Canone 4°. *Se paragonati i termini di un' equipollenza trinomia ai termini dell' equipollenza identica* $LM + MN + NL \triangleq 0$ *si riconosca che* $\text{inc}\,LM + \text{inc}\,NL = 2.\text{inc}\,MN$ *(e le tre inclinazioni sieno disuguali) sarà* $\text{gr}\,LM = \text{gr}\,NL$; *viceversa se* $\text{gr}\,LM = \text{gr}\,NL$ *sarà* $\text{inc}\,LM + \text{inc}\,NL = 2.\text{inc}\,MN$. Infatti l' eguaglianza degli angoli M, N di un triangolo LMN è espressa, prendendo ambedue gli angoli collo stesso segno (§. 14), da $NML = LNM$, ossia (§. 15), da $\text{inc}\,LM - \text{inc}\,NM = \text{inc}\,NM - \text{inc}\,NL$.

24. Ogni formula algebrica identica esprime un teorema sulle quantità, il quale può eziandio riguardarsi come un teorema relativo ad alquanti punti posti in linea retta. Tali sono le undici prime proposizioni del libro II. d' Euclide. Non credo

che prima di me alcuno avesse pensato di estendere tutti questi teoremi ai punti di un piano. Ciò risulta dal seguente teorema, che è una conseguenza immediata dei principii del metodo delle equipollenze, e che è un primo ed osservabile esempio dell'uso di questo metodo per giungere direttamente e senza bisogno di costruzioni geometriche a moltissimi teoremi, cui non sarebbe stato facile trovare per altra via. È però vero che tali teoremi sono nella loro generalità troppo complicati per meritare d'essere considerati, e limitandosi a casi particolari e semplici si cade in teoremi già conosciuti; essendo molto improbabile che una verità semplice ed elementare sia sfuggita alla ricerca di tanti Geometri. Ecco il

Teorema generalissimo. *Qualunque proprietà dei punti di una linea retta dà un teorema dei punti di un piano col solo cangiare le equazioni in equipollenze.*

25. Prendiamo per esempio la formula algebrica $b(b+2c)+c^2=(b+c)^2$, la quale conduce alla 6.ª proposizione del libro II. d'Euclide: Se una retta BD sia divisa per metà in C, cioè sia $BC=CD$, e nella sua prolungazione vi sia un punto qualunque A sarà $AB.AD+(BC)^2=(AC)^2$. Per verificare questa equazione, e nello stesso tempo assicurarci se le rette sieno indicate (§. 2) nel modo opportuno (al che un tempo non si badava, ma che nel metodo delle equipollenze è osservazione indispensabile) facciamo le sostituzioni insegnate nel §. 11, ed osserviamo se veramente la $(AZ-BZ)(AZ-DZ)+(BZ-CZ)^2=(AZ-CZ)^2$ sia resa identica dall'ipotesi $BC=CD$, cioè di $BZ-CZ=CZ-DZ$. Ciò verificato noi siamo tosto condotti al teorema. *Se un lato* BD *del triangolo* ABD (Fig. 5ª) *sia diviso per metà in* C, *sussisterà sempre l'equipollenza* $AB.AD+(BC)^2+AC.CA \mathrel{\triangleq} 0$; *cioè si potrà costruire un triangolo i cui lati sieno rispettivamente proporzionali ai prodotti* $AB.AD$, $(BC)^2$, $AC.CA$, *e le cui inclinazioni sieno rispettivamente* $\text{inc}\,AB+\text{inc}\,AD$, $2.\text{inc}\,BC$, $\text{inc}\,AC+\text{inc}\,CA=2.\text{inc}\,AC\pm180°$. — Questo teorema può dimostrarsi anche con altro calcolo molto spedito:

essendo $CD \bumpeq BC \bumpeq -CB$ pei canoni 1.° e fondamentale (§§. 10, 18) si ha $AB.AD \bumpeq (AC + CB)(AC - CB) \bumpeq$ $\bumpeq (AC)^2 - (CB)^2$, ossia $AB.AD + (CB)^2 - (AC)^2 \bumpeq 0$. Il teorema così generale presenta poca utilità; vediamone qualche

26. Corollario 1°. Se $2 \operatorname{inc} CB = 2 \operatorname{inc} AC \pm 180°$, i due primi termini dell'equipollenza trinomia $(CB)^2 + AC.CA +$ $+ AB.AD \bumpeq 0$ avranno la stessa inclinazione e quindi pel 3.° canone sarà $\operatorname{gr}(AB.AD) = \operatorname{gr}(AC.CA) + \operatorname{gr}(CB)^2$, ed inoltre $\operatorname{inc} BA + \operatorname{inc} AD = 2.\operatorname{inc} CB = 2.\operatorname{inc} DB$; quest' ultima relazione applicata all' equipollenza $BA + DB +$ $+ AD \bumpeq 0$ dà mediante il 4.° canone $\operatorname{gr} AB = \operatorname{gr} AD$. Ora la condizione $\operatorname{inc} CB - \operatorname{inc} AC = \pm 90°$ significa che l' angolo ACB è retto; e le due equazioni relative alle grandezze danno il teorema Pitagorico $(AB)^2 = (AC)^2 + (CB)^2$.

27. Corollario 2°. Se $\operatorname{gr} CB = \operatorname{gr} AC$, il 4.° canone applicato all' equipollenza identica $AC + BA + CB \bumpeq 0$, dà $\operatorname{inc} AC + \operatorname{inc} CB = 2 \operatorname{inc} BA = 2.\operatorname{inc} AB$, ed applicato alla nostra equipollenza trinomia $(CB)^2 + AB.AD + AC.CA \bumpeq 0$ dà $2.\operatorname{inc} CB + \operatorname{inc} AC + \operatorname{inc} CA = 2(\operatorname{inc} AB + \operatorname{inc} AD)$. Prendendo la metà di questa equazione e sottraendovi la precedente si ha $\frac{1}{2} \operatorname{inc} CA - \frac{1}{2} \operatorname{inc} AC = \operatorname{inc} AD - \operatorname{inc} AB$; il primo membro è (§. 15 (1)) $= 90°$; perciò: *Se* $\operatorname{gr} CA = \operatorname{gr} CB = \operatorname{gr} CD$, *l' angolo* BAD *inscritto in mezza circonferenza è retto.*

28. Può sembrare che mi arresti su cose ben facili e notissime; per usare di un metodo bisogna renderselo abituale, prego dunque il Lettore di volermi seguire in alcuni altri pochi teoremi, e notare ogni passo tanto pazientemente da poter poi rifare di per sè la via percorsa; in tal maniera verrà in possesso del metodo, e tutto poi gli riuscirà facile. Spero che non dispiaccia vedere come si trovino teoremi speciali partendo da quello del §. 24 e con pochissime considerazioni geometriche, le quali inoltre occorrono quasi unicamente per tradurre nel comune linguaggio le condizioni relative ad angoli, che sono d'altronde benissimo espresse dalle relazioni tra le inclinazioni.

29. La formula $bd + (b + i + d)\,i = (b + i)\,(i + d)$ c' insegna che per quattro punti in linea retta si ha $AB.ID + AD.BI \doteq AI.BD$, il che può verificarsi come dicemmo ai §§. 11, 25; perciò (§. 24): Teorema. *Per ogni quadrilatero* ABID (Fig. 6.ª) *ha luogo l' equipollenza* $AB.ID + AD.BI + AI.DB \doteq 0$; *cioè può costruirsi un triangolo i cui lati sieno rispettivamente proporzionali alle grandezze di quei prodotti, ed abbiano le inclinazioni eguali alle inclinazioni dei prodotti stessi*; abbiamo già detto (§. 16) che $\text{inc}\,(AB.ID) = \text{inc}\,AB + \text{inc}\,ID$, ecc.

30. Anche questa volta discenderemo a casi particolari supponendo che il triangolo menzionato nel teorema divenga una linea retta, oppure un triangolo o rettangolo, od isoscele, od equilatero. Coroll. 1°. Se $\text{inc}\,(AB.ID) = \text{inc}\,(AD.BI)$ il 3.° canone dà $\text{gr}\,(AB.ID) + \text{gr}\,(AD.BI) = \text{gr}\,(AI.DB)$. Ora (§. 15) $\text{inc}\,AD - \text{inc}\,AB = \text{ang.}\,BAD$, $\text{inc}\,IB - \text{inc}\,ID = \text{ang.}\,DIB$, perciò (§§. 15, 16) la predetta condizione è identica alla $\text{ang.}\,BAD + \text{ang.}\,DIB = 180°$ ed abbiamo il teorema Tolemaico. *Nel quadrilatero in cui gli angoli opposti sono supplementari il prodotto delle diagonali eguaglia la somma dei due prodotti dei lati opposti.*

31. Coroll. 2°. Se invece sia $\text{inc}\,(AB.ID) - \text{inc}\,(AD.BI) = \pm 90°$, ossia $\text{ang.}\,BAD + \text{ang.}\,DIB = \pm 90° \pm 180°$ il triangolo espresso dall' equipollenza trinomia (§. 29) è rettangolo e perciò il teorema Pitagorico (§. 26) ci dà: *Se due angoli opposti di un quadrilatero sommano uno o tre retti, il quadrato del prodotto delle due diagonali uguaglia la somma dei quadrati dei prodotti dei lati opposti.*

32. Coroll. 3°. Il triangolo rappresentato dall' equipollenza (§. 29) è isoscele quando $\text{gr}\,(AB.ID) = \text{gr}\,(AD.BI)$; allora il 4.° canone (§. 23) dà la condizione $\text{inc}\,(AB.ID) + \text{inc}\,(AD.BI) = 2\,.\,\text{inc}\,(AI.DB)$, la quale in differenti maniere si riduce ad una relazione di angoli (§. 15). Sviluppandola sotto la forma $\text{inc}\,AI - \text{inc}\,AB +$

$+\text{inc}\,BD - \text{inc}\,BI + \text{inc}\,IA - \text{inc}\,ID + \text{inc}\,DB - \text{inc}\,DA = 180^\circ$ si ha il teorema: *Se il prodotto di due lati opposti* AB, ID *eguaglia il prodotto degli altri due* BI, DA, *la somma degli angoli alternati* BAI, IBD, DIA, ADB *compresi tra le diagonali e i lati è uguale a due retti.*

33. Coroll. 4°. Il triangolo dell' equipollenza trinomia (§. 29) sarà equilatero se avrà due angoli $= 60^\circ$, cioè se abbiano luogo due delle equazioni

$$\text{inc}\,AD - \text{inc}\,AB + \text{inc}\,IB - \text{inc}\,ID = \pm 60^\circ$$
$$\text{inc}\,AI - \text{inc}\,AB + \text{inc}\,DB - \text{inc}\,DI = \mp 60^\circ$$
$$\text{inc}\,AD - \text{inc}\,AI + \text{inc}\,BI - \text{inc}\,BD = \mp 60^\circ.$$

Ed anche qui se vogliamo ridursi a relazioni fra gli angoli, bisogna porre attenzione ai loro segni; avvertenza che non sarebbe necessaria se ci limitassimo alle precedenti relazioni. Supposto che il quadrilatero sia della forma ordinaria ad angoli salienti, abbiamo il teorema: *Se due angoli opposti di un quadrilatero* ABID *hanno la somma di* 60°, *e se questa è pure la differenza di una delle quattro paja di angoli* BAI, BDI; DBA, DIA; IAD, IBD; ADB, AIB, *il prodotto delle diagonali è uguale a ciascuno dei prodotti dei lati opposti.*

34. Coroll. 5°. Se alle condizioni del precedente corollario si aggiunga che i tre punti B, I, D sieno in linea retta, sicchè sia $\text{gr}\,BI + \text{gr}\,ID = \text{gr}\,BD$, le relazioni 2ª e 3ª date al §. 33 diventeranno $\text{inc}\,AI - \text{inc}\,AB = \mp 60^\circ$, $\text{inc}\,AD - \text{inc}\,AI = \mp 60^\circ$; perciò: *Se le tre rette* AB, AI, AD *formanti tra loro angoli di* 60° *si taglino con una retta qualunque* BID *sarà* $\text{gr}(AB.ID) = \text{gr}(AD.BI) = \text{gr}(AI.DB)$. E siccome $\frac{1}{2}BD$ è media aritmetica tra ID e BI, così $2.AI$ è quella lunghezza, che dicesi media armonica tra le due AB, AD.

35. Ad ultimo esempio del §. 24 daremo un teorema che comprende quello del §. 25. Per quattro punti di una retta, e quindi anche di un piano si ha $AB.AD + BC.CD \bumpeq AC(AB + CD)$, come è facile verificare nel solito modo (§. 11). Conducendo la retta $BL \bumpeq CD$ (Fig. 6.ª) ne viene pel 1.° canone $AB + CD \bumpeq AB + BL \bumpeq AL$; perciò:

Teorema: *Se* BL *è equipollente a* CD *ha luogo l'equipollenza* AB.AD + BC.CD + AC.LA ≏ 0.

36. Coroll. 1°. Se inc(BC.CD) = inc(AC.LA), il 3.° canone dà gr(AB.AD) = gr(BC.CD) + gr(AC.LA), ed inoltre inc(AB.AD) = 180° + inc(BC.CD), ossia inc BA + inc AD = inc BC + inc CD. Limitiamoci al caso particolare (Fig. 7ª) che BCD sia una linea retta, e che perciò inc BC = inc CD = inc BD, la predetta inc BA + + inc AD = 2.inc BD darà pel 4.° canone gr AB = gr AD; similmente la inc AC + inc LA = inc BC + inc CD = 2.inc CL darà gr AC = gr AL; quindi: *Se il punto* L *della base del triangolo* ACB *abbia la distanza dal vertice* AL = AC *sarà* $(AB)^2 = BC.BL + (AC)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - BC.CL$.

37. Abbiamo voluto ricavare ogni conseguenza dai soli principj del metodo delle equipollenze; del resto sarebbe stato facile scorgere che l'ipotesi (§. 36) di 2.inc BC = inc BA + + inc AD = inc AC + inc LA porta la conseguenza che i due triangoli ABD, ACL sieno isosceli; lo si vede tosto supponendo che sia inc BC = 0, cioè che siasi presa la BC per origine (§. 13) delle inclinazioni, sicchè le BA, AD (e così pure le AC, LA) abbiano inclinazioni eguali ma di opposto segno.

38. Tornando al teorema generale (Fig. 6ª) si costruisca (§. 16) AI ≏ AB.AD : AL, e l'equipollenza del §. 35 divisa per AL prenderà la forma AI + BC.CD : AL − AC ≏ 0, oppure pel 1.° canone CI ≏ CB.CD : AL ≏ CB.BL : AL. Le precedenti equipollenze AI : AB ≏ AD : AL, CI : LB ≏ CB : LA esprimono che se il triangolo IAD è simile-dritto al triangolo BAL, questo è esso pure simile-dritto ad IBC. — Nel metodo delle equipollenze bisogna distinguere le figure simili-dritte dalle simili-rovescie; le prime sono quelle che senza rovesciarsi (§. 23), e soltanto muovendosi nel proprio piano, possono ridursi omotetiche, cioè coi lati omologhi paralleli. Nell'indicare le figure simili avremo sempre l'avvertenza di prendere le lettere in egual ordine, sicchè dicendo che IAD è simile a BAL si accenna che il vertice I è omologo

a B, A omologo ad A, e D omologo ad L. — Le medesime equipollenze $AI : AD \doteq AB : AL$, $CI : LD \doteq CD : LA$ mostrano che sono nello stesso tempo simili-dritti gli altri tre triangoli IAB, DAL, IDC. — La dipendenza fra queste similitudini potrebbe anche dimostrarsi collè ordinarie considerazioni della Geometria elementare, così il metodo delle equipollenze indica anche la via per dimostrare mediante la comune sintesi geometrica i teoremi col suo mezzo trovati. — Supponendo che BCD sia una linea retta, oppure un triangolo o rettangolo, od isoscele, od equilatero, potrebbero per tal maniera dimostrarsi anche i corollarj dei §§. 30, 31, 32, 33.

39. *Per ogni quadrilatero* ABCD, *non parallelogrammo, esiste quindi un punto* I *degno d' osservazione, che è il vertice comune dei triangoli simili-dritti* ADI, BCI, oppure ABI, DCI, *che hanno per basi due lati opposti del quadrilatero.* — Potremo immaginare che AD, BC sieno due rette corrispondenti di due figure simili-dritte, ed I sarà quell' unico punto delle medesime che corrisponde a sè stesso. Così proponiamoci il

40. Problema. *Trovare il vertice comune di due triangoli simili-dritti di date basi.* La similitudine dei triangoli ADI, BCI (Fig. 6ª) è pienamente espressa (§. 16) dall' equipollenza $AD : BC \doteq AI : BI$, la quale ci servirà a determinare il punto incognito I; esso entra in due rette, ma le ridurremo ad una sola, ricordando che pel 1.° canone si ha $BI \doteq AI - AB$; dopo ciò la equipollenza si risolverà (§. 18) rispetto all' incognita AI, e darà $BC . AI \doteq AD . AI - AD . AB$, $AI \doteq AD . AB : (AD - BC)$. Per costruire la $AD - BC$ si tiri (§. 5) $DL \doteq CB$, sicchè $AD - BC \doteq AD + DL \doteq AL$; poscia la $AI \doteq AD . AB : AL$ darà (16) la grandezza e l' inclinazione della AI. È palese che tutto si riduce a costruire il triangolo ABI simile-dritto ad ALD.

41. Onde abituarci all' algoritmo del metodo, e scorgere le risorse, che presentano i suoi pochi canoni, ci bisogna variare la natura delle questioni. Cerchiamo con quale relazione una retta qualunque DCE (Fig. 8ª) tagli i lati di un triangolo

ABF. La condizione che il punto E si trova sulla retta AB è espressa (§. 4) da $AE \bumpeq z.AB$, essendo z un coefficiente numerico. Così pure abbiamo $BC \bumpeq x.BF$, $AD \bumpeq y.AF$; finalmente per esprimere la condizione che DCE sia una retta, cioè che DC abbia la stessa inclinazione di DE porremo $m.DE \bumpeq DC$. Sostituendovi le precedenti equipollenze ed adoperando il 1.° canone si eliminano i punti D, C, E e si ottiene l' equipollenza $m(z.AB - y.AF) \bumpeq AC - AD \bumpeq$ $\bumpeq AB + x.BF - y.AF$. Per poter adoperare il 2.° canone ridurremo tutti i termini a contenere le sole rette non parallele AB, AF, ed avremo
$m(z.AB - y.AF) \bumpeq (x-y)AF + (1-x)AB$; e quindi (§. 19) sarà $mz = 1 - x$, $my = y - x$. Finalmente eliminando m otterremo la cercata relazione
$yz - xz - y + xy = 0$, che avrebbe avuta forma più simmetrica se più opportunamente si fossero scelte le prime posizioni. Essa può scriversi $zx(y-1) = (z-1)(x-1)y$, e ci dà la nota *involuzione* $AE.BC.FD \bumpeq BE.FC.AD$; nella quale posi il segno $\bumpeq$ in luogo di $=$, perchè essa sussiste non solamente rispetto alle grandezze, ma ancora rispetto alle inclinazioni.

42. Facciamo una breve digressione. Le relazioni trovate tra m, x, y, x potrebbero servire a dimostrare che insieme colla precedente involuzione sussistono pure le altre tre
$AF.DC.EB \bumpeq DF.EC.AB$, $BF.CD.EA \bumpeq CF.ED.BA$, $FA.DE.CB \bumpeq DA.CE.FB$, il che è notissimo nella Geometria superiore, e risulta dalla considerazione degli altre tre triangoli ADE, BCE, FDC ognuno tagliato da una retta. — Anche per sei punti di una retta se ha luogo una delle quattro precedenti equipollenze hanno luogo necessariamente le altre tre; perciò mediante il teorema generale del §. 24 la stessa cosa sussisterà per sei punti di un piano. Ponendo mente al significato delle equipollenze (§. 16) questo teorema può esporsi così: *Se* AEBCFD *sia un esagono, di cui tre angoli alternativi sommino insieme quattro retti, ed il prodotto di tre*

lati alternativi sia uguale al prodotto degli altri tre, godranno delle stesse proprietà i tre esagoni AFDCEB, BFCDEA, FADECB, *che hanno gli stessi vertici opposti del primo, ma presi con ordine differente.* — Anche rispetto a questi esagoni esiste un punto I, pel quale hanno luogo le equipollenze $IA.IC \bumpeq IB.ID \bumpeq IE.IF$; su di che torneremo in altro momento.

43. Diamo un secondo esempio del modo di esprimere la condizione dei punti in linea retta, col mezzo dei coefficienti numerici. Vogliasi dimostrare il teorema del Désargues che: *Se i vertici di due triangoli* ABC (Fig. 9ª) A'B'C' *sono in linea retta col punto fisso* S *i punti di concorso* T, U, V *dei loro lati corrispondenti sono essi pure in linea retta.* Le date condizioni sono espresse da $SA' \bumpeq a.SA$, $SB' \bumpeq b.SB$, $SC' \bumpeq c.SC$, essendo a, b, c tre coefficienti numerici indeterminati. Così pure la condizione che V appartenga alla retta AB è espressa da $AV \bumpeq n.AB$, oppure riducendo tutto alle SA, SB, SC, da $SV \bumpeq SA + n.AB \bumpeq (1-n)SA + n.SB$. Similmente V dovendo appartenere anche alla retta A'B', si avrà $SV \bumpeq (1-m)SA' + m.SB' \bumpeq a(1-m)SA + bm.SB$. Paragonando le due espressioni di SV il 2.° canone dà $1-n = a(1-m)$, $n = bm$; trattone il valore di m sarà $SV \bumpeq \frac{1-b}{a-b}SA' + \frac{a-1}{a-b}SB'$. Precisamente nello stesso modo troveremo

$$ST \bumpeq \frac{1-c}{b-c}SB' + \frac{b-1}{b-c}SC', \qquad SU \bumpeq \frac{1-a}{c-a}SC' + \frac{c-1}{c-a}SA'.$$

Dalle quali si deduce

$$(a-b)SV \bumpeq \frac{(1-b)(c-a)}{c-1}SU + \frac{(a-1)(b-c)}{1-c}ST, \qquad \text{ossia}$$

$$(a-b-ac+bc)SV + (c-a+ab-bc)SU + (b-c+ac-ab)ST \bumpeq 0,$$

e ricordando che $TV \bumpeq SV - ST$, $TU \bumpeq SU - ST$ vedremo che $(a-b-ac+bc)TV + (c-a+ab-bc)TU \bumpeq 0$, cioè (§. 4) TV ha la stessa inclinazione di TU, ossia TUV è una linea retta.

44. Si ponga attenzione (perchè torneranno frequenti le occasioni di farne uso) — al modo di riferire ad un punto S ciaschedun punto V di una retta AB mediante l' equipollenza SV ≏ (1 — n) SA + n.SB, essendo n un coefficiente indeterminato; — ed alla conseguenza (dipendente da identica formula) che se r.SV + q.SU + p.ST ≏ 0, e sia $r + q + p = 0$, i tre punti V, U, T sono in linea retta; perchè ne risulta r.TV + q.TU ≏ 0. — I calcoli dei coefficienti numerici potranno talvolta riuscire alquanto prolissi, particolarmente se essi si scelgano poco opportunamente; per altro non s' incontrerà alcuna difficoltà e si giungerà sempre direttamente allo scopo.

45. Per compiere la sposizione del metodo delle equipollenze mi resta da spiegare altri due artificj o segnature. — Vedemmo al §. 40 quanta utilità si abbia ad esprimere con una sola equipollenza la similitudine di due triangoli, la quale consiste nella proporzionalità di due lati e nell' eguaglianza degli angoli compresi: una tal cosa non sarebbe stata possibile se i due angoli fossero stati l' uno positivo e l' altro negativo, cioè se le figure fossero state simili-rovescie. — Ecco il modo con cui potremo estendere le nostre considerazioni da una figura ad una sua eguale-rovescia. Una retta che abbia la stessa lunghezza di una retta data, e la stessa *inclinazione* ma di segno opposto (§. 14), la diremo la sua *conjugata*, e la segneremo colla caratteristica cj. Così nella figura 4.ª la retta A′B′ eguale alla AB, e colla inclinazione negativa di ugual valore dell' inclinazione positiva della AB la diremo la sua conjugata, e scriveremo A′B′ ≏ cj AB, ed anche cj A′B′ ≏ AB. Possiamo supporre che la A′B′ sia la AB che abbia girato intorno ad una parallela alla OH *origine delle inclinazioni* fino a compiere mezza rotazione, e tornare nel piano della figura.

46. Supponendo che tal mezza rotazione si eseguisca da tutta una figura, si ottiene palesemente una figura eguale alla primitiva, e che per conseguenza ne ha le stesse proprietà; dunque:

5.° Canone. *Insieme con una equipollenza sussiste sempre la sua conjugata, che si ottiene sostituendo ad ogni retta la sua conjugata.*

47. Un esempio rischiarerà l' uso di questo canone. Problema. *Trovare il vertice comune di due triangoli simili-rovesci, dei quali sono date le basi* AD, BC (Fig. 10ª). La simiglianza di due triangoli ADX, BCX è compresa nelle due eguaglianze $\mathrm{gr}\,(AX:AD)=\mathrm{gr}\,(BX:BC)$, $\quad \mathrm{ang.}\,DAX=-\mathrm{ang.}\,CBX$; dove ad uno degli angoli si diede il segno —, perchè i due angoli sono presi in versi opposti. Se ai lati di uno degli angoli sostituiamo i loro conjugati quell' angolo cangia segno, perciò avremo (§. 15) $\quad \mathrm{inc}\,AX-\mathrm{inc}\,AD=\mathrm{inc.cj}\,BX-\mathrm{inc.cj}\,BC$. In tal modo ambedue le eguaglianze saranno comprese nella equipollenza $\quad AX:AD \bumpeq \mathrm{cj}\,BX:\mathrm{cj}\,BC$. $\quad$ Sviluppandola rispetto al punto ignoto X si ha (§. 10)
$\mathrm{cj}\,BC.AX \bumpeq AD.\mathrm{cj}\,AX - AD.\mathrm{cj}\,AB$. $\quad$ Pel 5.° canone sussisterà insieme con essa l' altra equipollenza
$BC.\mathrm{cj}\,AX \bumpeq \mathrm{cj}\,AD.AX - \mathrm{cj}\,AD.AB$; $\quad$ tra queste due equipollenze potremo (§. 18) eliminare $\mathrm{cj}\,AX$, e ci resterà per determinare AX la
$(AD.\mathrm{cj}\,AD - BC.\mathrm{cj}\,BC)AX \bumpeq AD(AB.\mathrm{cj}\,AD + BC.\mathrm{cj}\,AB)$.
Essendo in nostro arbitrio la scelta della origine delle inclinazioni (§. 13) potremo profittarne a semplificare la costruzione; sia essa la AB, perlochè sia $\quad AB \bumpeq \mathrm{cj}\,AB$; $\quad$ avremo
$(AD.\mathrm{cj}\,AD - BC.\mathrm{cj}\,BC)\,AX \bumpeq AB.AD\,(\mathrm{cj}\,AD + BC)$.
Costruiamo successivamente le $\quad AE \bumpeq \mathrm{cj}\,AD$, $\quad EF \bumpeq BC$,
$GE \bumpeq BC.\mathrm{cj}\,BC:AD \bumpeq EF.\mathrm{cj}\,EF:\mathrm{cj}\,AE$, $\quad$ sarà
$AX:AB \bumpeq (\mathrm{cj}\,AD + BC):(\mathrm{cj}\,AD - GE) \bumpeq AF:AG$.
Tutto ciò esprime la seguente soluzione del problema: Si tiri la AE eguale alla AD, ed ugualmente inclinata alla AB, ma dall' altra parte, cioè sia $\quad \mathrm{ang.}\,DAB=\mathrm{ang.}\,BAE$; $\quad$ la EF sia equipollente alla BC; si formi il triangolo FEG simile-rovescio ad AEF (perchè si ha $\quad EG:EF \bumpeq \mathrm{cj}\,EF:\mathrm{cj}\,EA$); finalmente si costruisca ABX simile dritto ad AGF.

48. In molte occasioni (§. 41, 43) tornano opportuni dei coefficienti numerici i quali servono ad accrescere o diminuire le lunghezze delle rette conservandone la stessa inclinazione: saranno egualmente comodi dei coefficienti che accrescano o diminuiscano l'inclinazione delle rette, cui sono applicati, senza mutarne la lunghezza. Il segno γ^{ν}, od in mancanza di segno apposito la lettera i, indicherà un accrescimento d'inclinazione di un angolo retto (s'intenda sempre nel verso HMI (Fig. 4ª) in cui si prendono le inclinazioni positive*), sicchè se OH, OI sieno eguali e perpendicolari si scriverà $OI \bumpeq \gamma^{\nu}.OH$. Il coefficiente $\gamma^{\nu u}$ servirà ad accrescere l'inclinazione di una retta di u angoli retti, essendo u un numero intero o frazionario. Perlochè il coefficiente $\gamma^{\nu 4}$ non produrrebbe alcun effetto, ossia possiamo scrivere $\gamma^{\nu 4} \bumpeq 1$; $\gamma^{\nu 2}$ volge la direzione della retta, cui è unito, in verso opposto; per esempio $\gamma^{\nu 2}.OM \bumpeq OL$; ossia $\gamma^{\nu 2} \bumpeq -1$. Così γ^{ν} rappresenta ciò che in Algebra si segna con $\sqrt{-1}$, e dicesi *radice di meno uno*; al segno γ^{ν} daremo per sincope il nome di *ramuno*. Il più spesso invece di $\gamma^{\nu u}$ scriveremo ε^{u}, nel qual caso deve intendersi che u, anzichè esser riferito all'angolo retto come unità, sia la lunghezza del corrispondente arco di raggio uno. Gli Analisti vedranno che ε corrisponde perciò al loro $e^{\sqrt{-1}}$.

49. Come un numero, anzichè porsi a coefficiente di una retta, può adoperarsi solo, ed allora esso indica una lunghezza parallela all'origine delle inclinazioni; così pure il ramuno elevato a potenza può adoperarsi solo ad indicare una lunghezza eguale all'unità ed avente l'inclinazione espressa dal suo esponente. Ne viene che $z\gamma^{\nu u}$ indica una retta, che equivale a z volte l'unità di lunghezza, e che ha l'inclinazione di u retti sopra l'origine delle inclinazioni.

50. A compimento di questa sposizione dei principj del metodo delle equipollenze aggiungeremo i seguenti canoni relativi al ramuno ed alle rette conjugate, i quali sono immediate conseguenze delle definizioni. — Quando occorra di moltiplicare $\gamma^{\nu u}$ per $\gamma^{\nu v}$ si otterrà $\gamma^{\nu u+v}$, perchè nel formare un

prodotto (§. 16) le inclinazioni u, v debbono sommarsi. Dal prodotto di γ^{ν} per γ^{ν} si avrà $\gamma^{\nu 2}$, ossia il coefficiente -1. Dividendo l' unità per γ^{ν} si ha $-\gamma^{\nu}$; ecc., dunque

6.° Canone. *Il* ramuno *si calcola precisamente come nell' Algebra si calcola l' immaginario* $\sqrt{-1}$.

51. 7.° Canone. *Per formare la conjugata* (§. 46) *di qualche espressione contenente il ramuno bisogna mutare il segno ad ogni esponente di* γ^{ν}. — Così la conjugata di $\gamma^{\nu u}.AB$ è $\gamma^{\nu -u}.\text{cj}\,AB$; quella di $z\gamma^{\nu u}$ è $z\gamma^{\nu -u}$; quella di γ^{ν} è $\gamma^{\nu -1} = -\gamma^{\nu}$.

52. 8.° Canone. *Il prodotto di due rette, o più generalmente, di due espressioni tra loro conjugate, ha l' inclinazione nulla, e la grandezza eguale al quadrato della grandezza di ciascuna delle due rette od espressioni.* Infatti le due espressioni conjugate hanno eguali grandezze ed inclinazioni uguali ma di opposto segno, e nel fare il prodotto le grandezze si moltiplicano (§. 16) e le inclinazioni si sommano. Così $AB.\text{cj}\,AB \doteq (\text{gr}\,AB)^2$; similmente $z\gamma^{\nu u} \doteq a + b\gamma^{\nu}$ moltiplicata per la sua conjugata $z\gamma^{\nu -u} \doteq a - b\gamma^{\nu}$ dà $z^2 \doteq a^2 + b^2$, che esprime il teorema Pitagorico.

53. 9.° Canone. *Una retta divisa per la sua conjugata è equipollente al ramuno elevato ad una potenza eguale al doppio dell' inclinazione della retta.* Cioè $z\gamma^{\nu u} : z\gamma^{\nu -u} \doteq \gamma^{\nu 2u}$.

54. 10.° Canone. *La composta-equipollente di una retta e della sua conjugata ha l' inclinazione nulla, ed uguaglia il doppio della projezione della retta sull' origine delle inclinazioni; ossia il doppio prodotto della grandezza della retta pel coseno della sua inclinazione.* Infatti se (Fig. 11ª) $OQ \doteq OM + \text{cj}\,OM$ pel 5.° canone sarà anche $\text{cj}\,OQ \doteq \text{cj}\,OM + OM \doteq OQ$, perciò OQ essendo equipollente alla propria conjugata ha inclinazione nulla: poscia se OP abbia inclinazione nulla e PM abbia l' inclinazione di un retto sarà $\text{cj}\,OP \doteq OP$, $\text{cj}\,PM \doteq PM' \doteq -PM$, e le $OM \doteq OP + PM$, $\text{cj}\,OM \doteq OP - PM$ daranno $OM + \text{cj}\,OM \doteq 2.OP$.

55. Se vorremo determinare la projezione della AC sulla AB (Fig. 12ª) osserveremo che la AC' (eguale alla AC e formante colla AB l' angolo BAC' eguale ma di opposto segno di BAC) è data da $AC' \bumpeq \text{cj}\, AC \,.\, AB : \text{cj}\, AB$, giacchè questa equipollenza equivale a $\text{gr}\, AC' = \text{gr}\, AC$, e
$\text{inc}\, AC' = \text{inc}\,.\,\text{cj}\, AC + \text{inc}\, AB - \text{inc}\,.\,\text{cj}\, AB =$
$= -\,\text{inc}\, AC + \text{inc}\, AB + \text{inc}\, AB = 2\,.\,\text{inc}\, AB - \text{inc}\, AC$. Si ha perciò $2\, AP \bumpeq AC + AC' \bumpeq AC + \text{cj}\, AC \,.\, AB : \text{cj}\, AB$.

56. 11.° Canone. *La composta-equipollente di una retta e della sua conjugata presa col segno meno ha l' inclinazione di un retto, ed uguaglia il doppio della projezione della retta sopra un' altra, che abbia l' inclinazione di un retto; ossia il doppio prodotto della grandezza della retta pel seno della sua inclinazione.* Infatti nella Fig. 11ª è palese che
$M'M \bumpeq OM - \text{cj}\, OM \bumpeq 2\,.\,PM$. — Nella Fig. 12ª avremo
$2\,.\,PC \bumpeq AC - AC' \bumpeq AC - \text{cj}\, AC \,.\, AB : \text{cj}\, AB$.

57. Moltiplicando (Fig. 12ª) $\text{gr}\, PC$ per $\text{gr}\, AB$ si ottiene un numero, che, riferito alla nota unità delle aree, esprime l' area del parallelogrammo $ABDC$; perciò $2\,.\,PC\,.\,\text{cj}\, AB \bumpeq$
$\bumpeq AC\,.\,\text{cj}\, AB - \text{cj}\, AC\,.\,AB$ ha una grandezza doppia del detto parallelogrammo, e siccome i due termini $AC\,.\,\text{cj}\, AB$, $\text{cj}\, AC\,.\,AB$ sono tra loro conjugati, così, per togliere l' inclinazione di un retto, che spetta (§. 56) alla loro differenza, divideremo per ramuno, ed avremo area

$$ABDC \bumpeq \frac{1}{2\gamma}\left(AC\,.\,\text{cj}\, AB - AB\,.\,\text{cj}\, AC\right) \bumpeq$$

$$\bumpeq \frac{\gamma}{2}\left(AB\,.\,\text{cj}\, AC - \text{cj}\, AB\,.\,AC\right).$$ Quindi:

12.° Canone. *L' area d' un triangolo* ABC *è espressa da*

$\frac{\gamma}{4}\left(AB\,.\,\text{cj}\, AC - \text{cj}\, AB\,.\,AC\right)$, *od anche da*

$\frac{\gamma}{4}\left(AB\,.\,\text{cj}\, BC - \text{cj}\, AB\,.\,BC\right)$; giacchè col 1.° canone si dimostra l' identità $AB\; \text{cj}\, BC - \text{cj}\, AB\,.\,BC \bumpeq$
$\bumpeq AB\; \text{cj}\,(AC - AB) - (AC - AB)\; \text{cj}\, AB \bumpeq AB\,.\,\text{cj}\, AC - AC\,.\,\text{cj}\, AB$.

Si noti che, permutando tra loro le lettere B C, l' area del triangolo ACB si trova espressa da

$\frac{\curlyvee}{4}(AC . \mathrm{cj}\, AB - \mathrm{cj}\, AC . AB)$, che nel caso della figura è un numero negativo ed uguale a $-$area ABC: questo anzichè difetto del metodo ne è grande vantaggio per ischivare gli errori, a cui si può andar incontro nella somma delle aree quando non si considerino attentamente le differenti disposizioni che possono prendere le parti di una figura. — Facilmente si dimostra che sono identiche anche nel segno le aree ABC, BCA, CAB.

58. Facciamo due applicazioni di questo ultimo canone del metodo delle equipollenze. Se sopra un lato di un triangolo ABC (Fig. 13ª) sia descritto un parallelogrammo ABFE, poscia sieno pur descritti col lato $CG \bumpeq AE$ i due parallelogrammi ACGE, BFGC, sarà

$$ABFE \bumpeq \frac{\curlyvee}{2}(AB . \mathrm{cj}\, AE - AE . \mathrm{cj}\, AB),$$

$$ACGE \bumpeq \frac{\curlyvee}{2}(AC . \mathrm{cj}\, AE - AE . \mathrm{cj}\, AC),$$

$$BFGC \bumpeq \frac{\curlyvee}{2}(AE . \mathrm{cj}\, BC - BC . \mathrm{cj}\, AE),$$

avendo posto AE in luogo di $BF \bumpeq CG \bumpeq AE$. Rammentando che $BC \bumpeq AC - AB$, $\mathrm{cj}\, BC \bumpeq \mathrm{cj}\, AC - \mathrm{cj}\, AB$, quelle tre equipollenze danno $ABFE = ACGE + BFGC$. — Ai parallelogrammi ACGE, BFGC possono sostituirsi gli altri due compresi tra le stesse parallele ACLM, BNPC. (Infatti essendo $AE \bumpeq AM + ME \bumpeq AM + n . AC$ si ha $AC . \mathrm{cj}\, AE - AE . \mathrm{cj}\, AC \bumpeq AC . \mathrm{cj}\, AM - AM . \mathrm{cj}\, AC$). Perciò la somma delle aree dei parallelogrammi ACLM, BNPC eguaglia quella di ABFE, che ha i due lati AE, BF equipollenti a CG. Questo è un teorema del Clairaut, il quale comprende come caso particolare la dimostrazione che Euclide dà nella sua 47.ª proposizione del teorema Pitagorico; basta a tal uopo supporre che il triangolo ACB sia rettangolo in C, e che ACLM, BNPC sieno i due quadrati descritti sui cateti.

59. All'espressione dell'area di un poligono può darsi mediante i canoni 12.° e 1.° parecchie forme. Così pel quadrilatero si ha $ABCD \bumpeq ABC + ACD \bumpeq$

$\bumpeq \frac{\surd}{4}(AB . \mathrm{cj}\, AC - AC . \mathrm{cj}\, AB + AC . \mathrm{cj}\, AD - AD . \mathrm{cj}\, AC)$,

e riducendo tutte le rette alle tre AB, AC, BD sparisce la AB e si ha $ABCD \bumpeq \frac{\surd}{4}[AB . \mathrm{cj}\, AC - AC . \mathrm{cj}\, AB +$

$+ AC(\mathrm{cj}\, AB + \mathrm{cj}\, BD) - \mathrm{cj}\, AC(AB + BD)] \bumpeq$

$\bumpeq \frac{\surd}{4}(AC . \mathrm{cj}\, BD - \mathrm{cj}\, AC . BD)$; perciò: *Il quadrilatero* ABCD *equivale al triangolo che ha due lati equipollenti alle sue diagonali* AC, BD.

60. Pel pentagono ABCDE (e dicasi lo stesso per ogni altro poligono) esprimendo (§. 10) ogni diagonale col mezzo dei lati si trova $AB . \mathrm{cj}\, BC + AC . \mathrm{cj}\, CD + AD . \mathrm{cj}\, DE \bumpeq$
$\bumpeq AB . \mathrm{cj}\, BC + AB . \mathrm{cj}\, CD + AB . \mathrm{cj}\, DE + BC . \mathrm{cj}\, CD +$
$+ BC . \mathrm{cj}\, DE + CD . \mathrm{cj}\, DE$; dopo di ciò il 12.° canone ci mostrerà che: *L'area* ABCDE *è la somma di tutti i triangoli, che hanno due lati equipollenti a ciascun ambo formato coi lati* AB, BC, CD, DE *del poligono ommesso il lato* EA.

II. APPLICAZIONI DEL METODO DELLE EQUIPOLLENZE ALLE SOLUZIONI GRAFICHE DI ALCUNI PROBLEMI.

61. Si volga l'attenzione ai tredici canoni compreso il fondamentale (§. 10. 18. 19. 20. 23. 46. 50..... 57.) ed al modo con cui (§. 44) abbiamo espressa la condizione che tre punti sieno in linea retta, e spero si scorgerà che tutto è facile conseguenza dei pochi principii del metodo delle equipollenze. Questo comprende tutte le proposizioni della Geometria piana; per isvilupparle è sufficiente il calcolo senza bisogno di alcuna considerazione geometrica: la stessa cosa potrebbe dirsi del metodo delle coordinate; ma questo si serve di mezzi più artificiali; invece il metodo delle equipollenze individua ciascuna

retta mediante la sua grandezza e la sua inclinazione: per determinare un punto sono necessarie due coordinate, e basta invece una sola equipollenza. — Una delle conseguenze di queste essenziali diversità tra i due metodi si è che le soluzioni grafiche dei problemi trovate col metodo delle coordinate sono talvolta molto lunghe; quelle offerte dalle equipollenze gareggiano in semplicità ed eleganza con quelle discoperte per le vie indirette della sintesi geometrica.

62. Tracciamo la via da seguirsi per trovare la soluzione grafica di un problema, il che sarà reso più chiaro da alcuni esempii. — Tutte le condizioni del problema si esprimano mediante equipollenze tra le parti note e le ignote della figura, cercando di ridurre le seconde al minor numero possibile. Se possa ottenersi una equipollenza con un solo punto incognito, essa si risolverà alla maniera delle equazioni, e secondo le stabilite definizioni (§. 6, 16, 17) si costruirà la formula di risoluzione. Di ciò abbiamo dati due esempii ai §§. 40, 47.

63. Non sempre le condizioni saranno riducibili a tanta semplicità; nelle loro espressioni entreranno spesso dei coefficienti ignoti, o degli angoli pure incogniti indicati dal ramuno elevato ad esponente ignoto. In tali casi bisognerà ricorrere all' eliminazione; e tutti sanno quanta parte abbia l' ingegno del calcolatore nel renderne meno complicati i risultamenti. — Giova osservare che un' equipollenza è sufficiente a determinare due incognite sieno poi desse grandezze od inclinazioni; adoperando la sua conjugata (§. 46) si potrebbe eliminare una delle incognite, ma non di rado ciò potrà risparmiarsi, come ora accenneremo in generale, riservandosi di meglio spiegarlo cogli esempii.

64. Sieno z, y due grandezze, ed u, v due inclinazioni incognite. Se l' equipollenza finale sia della forma

$z\varepsilon^u . \mathrm{AB} \cong \mathrm{CD}$ (§. 48), dove AB, CD sono rette che si sanno costruire; si avrà $z\varepsilon^u . \cong \mathrm{CD} : \mathrm{AB}$, che rispetto alle assunte unità di lunghezza ed origine delle inclinazioni ci darà i valori numerici di z e di u.

65. L' equipollenza finale abbia invece la forma $z.\mathrm{AB}+y.\mathrm{CD}\bumpeq\mathrm{OU}$; paragonandola termine per termine colla identica $\mathrm{OV}+\mathrm{VU}\bumpeq\mathrm{OU}$ si vede che se sulla data retta OU si costruisca un triangolo, di cui un lato OV abbia la stessa inclinazione della retta AB, e l' altro VU la stessa inclinazione della CD, saranno z, y i rapporti numerici OV : AB, VU : CD, e perciò ambedue resteranno determinati.

66. Similmente l' equipollenza $\varepsilon^{u}.\mathrm{AB}+y.\mathrm{CD}\bumpeq\mathrm{OU}$ si risolverà tirando la UV parallela alla CD, e tagliandola col centro O ed un raggio eguale ad AB, sicchè il lato OV del triangolo OVU sarà eguale ad AB, e le due incognite saranno determinate da $\varepsilon^{u}\bumpeq\mathrm{OV}:\mathrm{AB}$, $y\bumpeq\mathrm{VU}:\mathrm{CD}$.

67. Che se finalmente abbiasi l' equipollenza $\varepsilon^{u}.\mathrm{AB}+\varepsilon^{v}.\mathrm{CD}\bumpeq\mathrm{OU}$, paragonandola sempre colla $\mathrm{OV}+\mathrm{VU}\bumpeq\mathrm{OU}$, si costruirà sulla OU un triangolo coi lati OV, VU rispettivamente eguali alle AB, CD, e si avrà $\varepsilon^{u}\bumpeq\mathrm{OV}:\mathrm{AB}$, $\varepsilon^{v}\bumpeq\mathrm{VU}:\mathrm{CD}$.

68. Ci avverrà frequenti volte di ridurci ad un' equipollenza con una sola inclinazione incognita $\varepsilon^{u}.\mathrm{AB}+\varepsilon^{-u}.\mathrm{CD}\bumpeq\mathrm{OU}$; invece di risolverla alla maniera delle equazioni del secondo grado ci riuscirà comodo trattarla come quella del §. precedente, considerando ε^{u}, ε^{-u} come fossero due incognite distinte.

69. Problema. *Costruire un triangolo* CBX (Fig. 14ª) *conoscendone la base* CB, *un angolo adjacente* CBD, *ed una relazione del* 1.° *grado* $\mathrm{BX}=a+m.\mathrm{CX}$ *tra le lunghezze dei due lati* CX, BX. — Giacchè nella condizione del problema entra la grandezza della retta incognita CX sarà opportuno porre $\mathrm{CX}\bumpeq z\varepsilon^{u}$; perlochè quella condizione sarà $\mathrm{gr}\,\mathrm{BX}=a+mz$. La direzione di questa BX è conosciuta, quindi prendendo BD eguale all' unità di lunghezza avremo $\mathrm{BX}\bumpeq(a+mz)\,\mathrm{BD}$. Così noi abbiamo due equipollenze, il che è appunto quanto occorre per determinare il punto X e le due incognite z, u. Mediante il 1.° canone si elimina tosto il punto X e si ha l' equipollenza $\mathrm{CX}-\mathrm{CB}\bumpeq z\varepsilon^{u}-\mathrm{CB}\bumpeq(a+mz)\,\mathrm{BD}$; essa è essenzialmente di forma trinomia, giacchè i due termini

cogniti possono riunirsi insieme, e divisa per z prende la forma accennata al §. 66 $\varepsilon^u - \frac{1}{z}(CB + a.BD) \bumpeq m.BD$, perciò il problema si risolverà mediante facile costruzione d'un triangolo. Determinate le $BA \bumpeq a.BD$, $BU \bumpeq m.BD$, l'equipollenza diverrà $\varepsilon^u - \frac{1}{z} CA \bumpeq BU$, che paragonata termine per termine coll'identica $BV - UV \bumpeq BU$ insegna di tirare la UV parallela alla CA e tagliarla in V col circolo di centro B e di raggio BD; la CX parallela alla BV soddisfarà alla data condizione $BX = BA + m.CX$, ossia $AX = m.CX$. Questa costruzione potrebbe alcun poco abbreviarsi.

70. Problema. *Due punti mobili partendo contemporaneamente da* A, B (Fig. 15ª) *percorrono colle velocità* AC, BD *le rette* AX, BY; *si dimanda dove avrà luogo il loro massimo avvicinamento* XY. Dopo il tempo t i punti si troveranno in X, Y essendo $AX \bumpeq t.AC$, $BY \bumpeq t.BD$; pel 1.° canone è $XY \bumpeq AB + BY - AX \bumpeq AB + t(BD - AC)$; quindi tirata DE equipollente a CA sarà $XY \bumpeq AB + t.BE \bumpeq AT$. Ora di tutti i punti della retta BE quello che è più vicino al punto A è il piede della perpendicolare AT; la cercata XY sarà quindi equipollente a questa AT, e la si costruirà tirando TY parallela alla AC.

71. Questa soluzione valerebbe eziandio se le rette AC, BD non fossero situate nello stesso piano, poichè i tre primi canoni sussistono anche per lo spazio. Del resto essa poteva facilmente trovarsi anche colla considerazione dei moti relativi, giacchè ciò che nel metodo delle equipollenze diciamo composizione delle rette (§. 5) corrisponde pienamente colla composizione dei movimenti.

72. Problema. *Costruire un triangolo conoscendone due lati* AB (Fig. 16ª) AC, *e la retta* AD, *che divide per metà l'angolo da loro formato, e termina nel lato opposto.* Prendendo la AD per origine delle inclinazioni (§. 13) chiamiamo u l'angolo incognito $CAD = DAB$, sicchè sia $AB \bumpeq c\varepsilon^u$, $AC \bumpeq b\varepsilon^{-u}$, essendo c, b le date lunghezze di quei lati. La condizione che

CD, DB costituiscano una sola retta è espressa da $CD \doteq p.DB$, ossia $AD - b\varepsilon^{-u} \doteq p(c\varepsilon^u - AD)$. Con questa equipollenza e colla sua conjugata $\text{cj}\, AD - b\varepsilon^u \doteq p(c\varepsilon^{-u} - \text{cj}\, AD)$, (nella quale osserveremo che la AD avendo l' inclinazione nulla non differisce dalla propria conjugata) elimineremo il coefficiente numerico p ed avremo

$$bc\varepsilon^{2u} - (b+c)\varepsilon^u.AD + (AD)^2 \doteq bc\varepsilon^{-2u} - (b+c)\varepsilon^{-u}.AD + (AD)^2.$$

Questa equipollenza è del 4.° grado rispetto alla ignota ε^u; essa comprende le due soluzioni espresse da $\varepsilon^u \doteq \pm 1$, per le quali il triangolo ridurrebbesi ad una sola retta. Dividendo adunque per $\varepsilon^u - \varepsilon^{-u}$ si ottiene l'equipollenza trinomia

$c\varepsilon^u + c\varepsilon^{-u} \doteq \frac{b+c}{b} AD$, che paragonata (§. 68) termine per termine colla $AB + BU \doteq AU$ mostra che si tratta di costruire il triangolo AUB, di cui conosciamo il lato

$AU \doteq \frac{b+c}{b} AD$, e le lunghezze c dei lati AB, BU, dei quali ignoriamo le inclinazioni u, $-u$. — Per determinare AU prenderemo sulla retta AKL le $AK = b$, $KL = c$, sicchè la $LU \doteq AU - AL \doteq \frac{b+c}{b}(AD - AK) \doteq \frac{b+c}{b} KD$ si tirerà parallela alla KD. — La AC eguale a b e parallela a BU compirà il cercato triangolo ABC. — Questa soluzione è più diretta di quella data dal Lamé nel suo pregevolissimo *Examen des différentes méthodes employées pour résondre les problémes de Géométrie*. 1818. pag. 15.

73. Sostituendo il trovato valore di $\varepsilon^u + \varepsilon^{-u} \doteq (b+c)AD : bc$ nella somma della prima equipollenza e della sua conjugata si trova $p = b:c$; quindi la retta, che divide per metà un angolo del triangolo, taglia il lato opposto in segmenti proporzionali ai lati adjacenti. Questo teorema può aversi più speditamente nel seguente modo. La condizione che AD dimezzi l' angolo CAB è espressa da (§. 16) $(AD)^2 \doteq n.AB.AC$, essendo n un altro coefficiente numerico, e la condizione che la D appartenga alla retta CB è espressa (§. 44) dall' equipollenza $p.AB - (1+p)AD + AC \doteq 0$, quale risulta

(§. 10) dalla $CD \triangleq p . DB$. Eliminando la AD si ottiene $n(1+p)^2 AB . AC \triangleq p^2 (AB)^2 + (AC)^2 + 2p . AB . AC$, che si riduce tosto ad equazione trinomia e che pel 4.° canone dà $p . \text{gr}\, AB = \text{gr}\, AC$.

74. Problema. *Costruire un triangolo conoscendo le lunghezze di due lati, e le posizioni dei punti, che tagliano due lati in dati rapporti.* Anche questo facile problema servirà a mostrare come senza bisogno di alcuna considerazione geometrica e soltanto traducendo in equipollenze i dati del problema si giunga alla risoluzione. Segnati con b, f, g la lunghezza del lato AC e le due porzioni di AB, con u, v le inclinazioni di questi lati AC, (Fig. 17ª) AB, e con m il rapporto in cui l' altro lato BC dee rimanere tagliato dal dato punto D, si avranno le quattro equipollenze $AC \triangleq b\varepsilon^u$, $AF \triangleq f\varepsilon^v$, $FB \triangleq g\varepsilon^v$, $DC \triangleq m . BD$, che saranno sufficienti a determinare i tre punti ignoti A, B, C e le due inclinazioni u, v. Quei punti facilmente si eliminano (§. 10), e si ottiene la $b\varepsilon^u - f\varepsilon^v - FD \triangleq m(FD - g\varepsilon^v)$, che ha subito la forma trinomia $b\varepsilon^u + (mg - f)\varepsilon^v \triangleq (m+1) FD$. Paragonandola (§. 67) termine per termine colla $VU + FV \triangleq FU$ si vede che costruito sulla $FU \triangleq (m+1) FD$ il triangolo FVU coi lati FV, VU rispettivamente uguali ad $mg - f$, ed a b, essi risulteranno paralleli ai cercati AB, AC.

75. Problema. *Costruire un triangolo* AXY (Fig. 18ª) *simile ad uno dato e che abbia i vertici a date distanze dal punto* O. (*Carnot, Géom. de Posit.* §. 328. *Lamé, Exposit. p.* 81.). Accenno per esercizio i calcoli che ne danno la facile soluzione $OX \triangleq f\varepsilon^u$, $OY \triangleq g\varepsilon^v$, $AY \triangleq n\varepsilon^\alpha . AX$ dove il rapporto n e l' angolo α sono conosciuti. Ne viene $g\varepsilon^v - OA \triangleq$ $\triangleq n\varepsilon^\alpha (f\varepsilon^u - OA)$, ossia $g\varepsilon^v - nf\varepsilon^{\alpha+u} \triangleq (1 - n\varepsilon^\alpha) OA$ che si paragona colla $OY - UY \triangleq OU$, essendo $AU \triangleq n\varepsilon^\alpha . AO$. Questa AU si costruirà adunque formando il triangolo AOU simile a quello cui dev' essere simile AXY, poscia si farà $\text{gr}\, OY = g$, $\text{gr}\, UY = nf = n . \text{gr}\, OF = \text{gr}\, ON$.

76. Problema. *Determinare il punto* X, *da cui sono veduti i lati del triangolo* ABC (Fig. 19ª) *sotto dati angoli*. Le condizioni del problema si esprimono con $BX \bumpeq y\varepsilon^{\gamma}.AX$, $CX \bumpeq z\varepsilon^{-\beta}.AX$, essendo γ, β i dati angoli AXB, CXA. Col solito 1.° canone si hanno le $AX \bumpeq AB + y\varepsilon^{\gamma}.AX \bumpeq$ $\bumpeq AC + z\varepsilon^{-\beta}.AX$, ed eliminando AX, $z\varepsilon^{-\beta}.AB - y\varepsilon^{\gamma}.AC \bumpeq AB - AC \bumpeq CB$, che paragonata (§. 65) colla $VB - VC \bumpeq CB$ conduce a formare gli angoli ABV, ACV eguali ai dati AXC, AXB; dopo di che sarà $VB : AB \bumpeq z\varepsilon^{-\beta} \bumpeq CX : AX$, sicchè rimarrà da costruire il triangolo ACX simile-dritto ad AVB.

77. Questa soluzione affatto differente e più semplice di quella, che si otterrebbe mediante l' intersezione dei due circoli ABX, ACX, mostra come anche in argomento affatto elementare lo studio delle equipollenze possa servire a scoprire alcun che di nuovo. — Per mostrare la fecondità del metodo cerchiamo un' altra soluzione. Sia $AX \bumpeq x\varepsilon^{u}$ (Fig. 20ª), e dalle equipollenze $x\varepsilon^{u} \bumpeq AB + yx\varepsilon^{u+\gamma} \bumpeq AC + zx\varepsilon^{u-\beta}$ proponiamoci di eliminare x, y, z. La prima divisa per $\varepsilon^{u+\gamma}$, poscia sottratta dalla sua conjugata dà

$x(\varepsilon^{\gamma} - \varepsilon^{-\gamma}) \bumpeq \varepsilon^{u+\gamma}.\text{cj}\,AB - \varepsilon^{-u-\gamma}.AB$, similmente si trova $x(\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{-\beta}) \bumpeq \varepsilon^{-u+\beta}.AC - \varepsilon^{u-\beta}.\text{cj}\,AC$; quindi

$$[\varepsilon^{\gamma}(\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{-\beta})\,\text{cj}\,AB + \varepsilon^{-\beta}(\varepsilon^{\gamma} - \varepsilon^{-\gamma})\,\text{cj}\,AC]\,\varepsilon^{u} \bumpeq$$
$$\bumpeq [\varepsilon^{-\gamma}(\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{-\beta})\,AB + \varepsilon^{\beta}(\varepsilon^{\gamma} - \varepsilon^{-\gamma})\,AC]\,\varepsilon^{-u}.$$

Per costruire questa equipollenza gioverà dividerla per $\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{-\beta}$,

e porre $$\frac{\varepsilon^{\gamma} - \varepsilon^{-\gamma}}{\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{-\beta}}\,\varepsilon^{\beta+\gamma}.AC \bumpeq EA,$$ sicchè essa

si ridurrà a $\varepsilon^{u+\gamma}.\text{cj}\,EB \bumpeq \varepsilon^{-u-\gamma}.EB$; ora quando una espressione è equipollente alla propria conjugata (§. 45) ambedue hanno direzione nulla, perciò la EB ha l' inclinazione

$u+\gamma$, ed è parallela alla $BX \bumpeq yx\varepsilon^{u+\gamma}$. Coi principj della Trigonometria, che esporremo in seguito, si rende palese che il punto E si costruirà facendo l' angolo EAC supplemento del dato $CXB=\beta+\gamma$, poscia $ACE=AXB=\gamma$; dopo ciò la retta EB passerà pel cercato punto. Similmente se BAF è supplemento di CXB, ed ang.FBA = ang.CXA, la FC passerà per lo stesso X. — Può meritare attenzione la corrispondenza tra le figure 6ª, 8ª, 19ª, 20ª, a cui si riferiscono i §§. 29, 35, 38..... 41, 76, 77.

78. Problema. *Inscrivere in un circolo un poligono, i cui lati passino per punti dati od abbiano date lunghezze.* — Pochi problemi di Geometria elementare occuparono i Matematici quanto quello d' inscrivere in un circolo un poligono, i cui lati passino per punti dati. La seguente soluzione da me pubblicata nel 1835 è forse più semplice di quelle trovate colle indirette considerazioni sintetiche degli antichi Geometri. — Si voglia inscrivere un quadrilatero XYZW (Fig. 21ª), di cui tre lati XY, YZ, ZW passino rispettivamente pei dati punti A, B, C ed il quarto lato WX abbia lunghezza data. Sia OH il raggio d' inclinazione nulla, e pongasi $OX \bumpeq \varepsilon^x.OH$, $OY \bumpeq \varepsilon^y.OH$, $OZ \bumpeq \varepsilon^z.OH$, $OW \bumpeq \varepsilon^u.OH$; la condizione che XAY sia una linea retta è espressa (§. 44) da $\varepsilon^x.OH - OA \bumpeq n(\varepsilon^y.OH - OA)$; fra essa e la sua conjugata elimineremo n, ed avremo

$$(\varepsilon^x.OH - OA)(\varepsilon^{-y}.OH - \mathrm{cj}\,OA) \bumpeq (\varepsilon^{-x}.OH - \mathrm{cj}\,OA)(\varepsilon^y.OH - OA).$$

Questa equipollenza diviene identica (ed era facile prevederlo) quando $y=x$, perciò essa può dividersi per $\varepsilon^x - \varepsilon^y$, dopo di che dà la relazione tra x ed y

(1) $\varepsilon^x \bumpeq (OA - \varepsilon^y.OH):(OH - \varepsilon^y.\mathrm{cj}\,OA)$. In egual modo le condizioni che i lati YZ, ZW passino pei punti B, C danno le relazioni (2) $\varepsilon^y \bumpeq (OB - \varepsilon^z.OH):(OH - \varepsilon^z.\mathrm{cj}\,OB)$,
(3) $\varepsilon^z \bumpeq (OC - \varepsilon^u.OH):(OH - \varepsilon^u.\mathrm{cj}\,OC)$. Finalmente chiamando δ il dato arco WX sarà (4) $\varepsilon^u \bumpeq \varepsilon^{x-\delta}$. Sostituendo le une nelle altre le predette equipollenze otterremo

l' equipollenza trinomia, che ci insegnerà a determinare l' incognita inclinazione x, cioè la posizione del punto X. Per mostrare come si opererebbe qualunque fosse il numero dei lati del poligono, costruiremo successivamente i coefficienti delle equipollenze, che nascono da tali sostituzioni. Sostituendo la (2) nella (1) avremo

$$\varepsilon^x \simeq (OA.OH - \varepsilon^z.OA.cj\,OB - OB.OH + \varepsilon^z.OH.OH):$$
$$(OH.OH - \varepsilon^z.OH.cj\,OB - cj\,OA.OB + \varepsilon^z.cj\,OA.OH)$$
$$\simeq (OA_1 + \varepsilon^z.OH_1):(cj\,OH_1 + \varepsilon^z.cj\,OA_1),$$ purchè sia
$$OA_1 \simeq OA - OB, \qquad OH_1 \simeq OH - OA.cj\,OB:OH.$$
Similmente $\varepsilon^x \simeq (OA_2 - \varepsilon^u.OH_2):(cj\,OH_2 - \varepsilon^u.cj\,OA_2)$, purchè sia $OA_2 \simeq OA_1 + OH_1.OC:OH$, e $OH_2 \simeq OH_1 + OA_1.cj\,OC:OH$. E così si procederebbe anche in seguito. Nel nostro caso la (4) ci darà

$$\varepsilon^{2x-\delta}\,cj\,OA_2 - \varepsilon^x.cj\,OH_2 + \varepsilon^{x-\delta}.OH_2 + OA_2 \simeq 0, \qquad \text{ossia,}$$
moltiplicando per $\varepsilon^{\delta-x}.OH:cj\,OA_2$,
$$\varepsilon^x.OH + \varepsilon^{\delta-x}.OH.OA_2:cj\,OA_2 \simeq$$
$$\simeq OH(OH_2 + \varepsilon^\delta.cj\,OH_2):cj\,OA_2 \simeq OU,$$
la quale paragonata (§. 68) al solito colla $OX + XU \simeq OU$ c' insegna che il punto X si otterrà tagliando il dato circolo con altro circolo eguale avente il centro nel punto U. — Le precedenti equipollenze mostrano chiaramente come si trovino i punti A_1, H_1.... Si tiri AA_1 equipollente a BO; si costruisca il triangolo OAK simile-rovescio ad OHB, e si tiri $HH_1 \simeq KO$; si formi OH_1L_1 simile-dritto ad OHC, ed OA_1K_1 simile-rovescio allo stesso OHC, e si tirino $A_1A_2 \simeq OL_1$, $H_1H_2 \simeq OK_1$. La corda HI sia uguale al lato WX del cercato quadrilatero, si tiri OT perpendicolare a questa HI, ed avente perciò l' inclinazione $\frac{1}{2}\delta$, e la si tagli in modo che H_2T sia eguale ad OH_2, sarà $OT \simeq OH_2 + \varepsilon^\delta.cj\,OH_2$. Finalmente, costruito OTU simile-rovescio ad OA_2H, la retta che dimezzerà perpendicolarmente la OU taglierà il dato circolo nel vertice X

del desiderato quadrilatero XAYBZCW. — Nella nostra figura l' arbitraria direzione della OH fu presa nella OC, così i triangoli OHC, OH_1L_1, OA_1K_1 si ridussero a tre rette tagliate proporzionalmente.

79. La nostra soluzione ha il vantaggio d' indicare i calcoli coi quali si può determinare numericamente la posizione del vertice X. — Le due soluzioni si riducono ad una sola quando OU è doppia del raggio del circolo, cioè quando la direzione della OT è tale che la projezione su di essa della OH_2 eguaglia la OA_2. In questo caso il lato ZW è massimo tra tutti quelli dei quadrilateri inscrivibili nel circolo, che hanno tre lati passanti pei punti A, B, C.

80. Nel §. 78 ci occorse esprimere la condizione che tre punti sieno in linea retta con una equipollenza, che non contenesse i coefficienti arbitrarii adoperati allo stesso scopo nel §. 44, e noi giungemmo alla bramata formula mediante l' eliminazione e per via affatto diretta. Non è ultimo dei vantaggi del metodo delle equipollenze che non si debba ricorrere a formule già precedentemente dimostrate, e che tutto possa facilmente desumersi dai principii fondamentali. Nulladimeno non sarà inutile fissare un momento l' attenzione sulla funzione *alternata* o *determinante*, che stabilisce la condizione di cui si tratta. Vedemmo al §. 44 che se $p.OA + q.OB + r.OC \triangleq 0$, perchè i punti A, B, C sieno in linea retta, i tre coefficienti numerici deggiono soddisfare alla $p + q + r \triangleq 0$. Aggiungendo a queste equipollenze la conjugata della prima
$p.\text{cj}\,OA + \text{ec.} \triangleq 0$, e notando che esse devono sussistere insieme, la teoria dell' eliminazione c' insegna che: *La condizione che* A, B, C *sieno in linea retta è espressa dalla funzione alternata* $OB.\text{cj}\,OC - OC.\text{cj}\,OB + OC.\text{cj}\,OA - OA.\text{cj}\,OC +$
$+ OA.\text{cj}\,OB - OB.\text{cj}\,OA \triangleq 0$.

81. Cerchiamo ora *la condizione per la quale le perpendicolari agli estremi delle rette* OA', OB', OC' *s' incontrino in uno stesso punto* M. Abbiamo (§. 48) $OM \triangleq OA' + A'M \triangleq$
$\triangleq (1 + l\gamma^\prime)\,OA' \triangleq (1 + m\gamma^\prime)\,OB' \triangleq (1 + n\gamma^\prime)\,OC'$; da

queste equipollenze e dalle loro conjugate si eliminano l, m, n e si trova che la condizione ricercata *è espressa dalla funzione alternata* $OA'.\mathrm{cj}\,OA'(OB'.\mathrm{cj}\,OC' - OC'.\mathrm{cj}\,OB') +$ $+ OB'.\mathrm{cj}\,OB'(OC'.\mathrm{cj}\,OA' - OA'.\mathrm{cj}\,OC') +$ $+ OC.\mathrm{cj}\,OC'(OA'\,\mathrm{cj}\,OB' - OB'\,\mathrm{cj}\,OA') \doteq 0$. La teoria dell' eliminazione dimostra che per conseguenza possono sussistere insieme le tre equipollenze $p'.OA' + q'.OB' + r'.OC' \doteq 0$, $p'.\mathrm{cj}\,OA' +$ ec. $\doteq 0$, $p'.\mathrm{gr}^2.OA' + q'.\mathrm{gr}^2.OB' + r'.\mathrm{gr}^2.OC' \doteq 0$, nell' ultima delle quali (che è anche equazione) scrissi $\mathrm{gr}^2 OA'$ in luogo (§. 52) di $OA'.\mathrm{cj}\,OA'$, ec. Da ciò si potrebbe trarre come conseguenza un noto teorema di Meccanica; senza fermarci su di ciò, osserveremo che la funzione alternata di questo §. si deduce da quella del precedente supponendo $OA' \doteq 1 : \mathrm{cj}\,OA$, ec.; ne viene che quando A, B, C sono in linea retta se per un punto qualunque O si prendano sulle OA, OB, OC le lunghezze OA', ec. inversamente proporzionali alle OA, ec., le tre perpendicolari innalzate in A', B', C' s' incontreranno in uno stesso punto, e viceversa. Ciò è uno dei teoremi fondamentali della *reciprocità* o *derivazione polare* delle figure.

82. Problema. *Circoscrivere ad un circolo un poligono, i cui angoli abbiano i vertici su date rette, oppure abbiano date grandezze.* Le rette saranno opportunamente definite mediante le perpendicolari OA', OB', ... abbassate sulle medesime dal centro O del dato circolo (Fig. 22ª), ed i punti di contatto del triangolo circoscritto sieno espressi da $OX \doteq \varepsilon^x.OH$, $OY \doteq \varepsilon^y.OH$, ... essendo OH quel raggio, che si prende per origine delle inclinazioni. La condizione perchè le tre perpendicolari innalzate agli estremi delle OA', OX, OY s' incontrino in uno stesso punto M fu data precedentemente, ed è $OA'.\mathrm{cj}\,OA'(\varepsilon^{x-y} - \varepsilon^{y-x}) + OH(\varepsilon^y.\mathrm{cj}\,OA' - \varepsilon^{-y}.OA' +$ $+ \varepsilon^{-x}.OA' - \varepsilon^x.\mathrm{cj}\,OA') \doteq 0$; essa diviene identica (ed era facile prevederlo) se $x = y$, divisa per $\varepsilon^x - \varepsilon^y$, poscia risolta dà $\varepsilon^x \doteq (OH.OA' - \varepsilon^y.OA'.\mathrm{cj}\,OA') : (OA'.\mathrm{cj}\,OA' - \varepsilon^y.OH.\mathrm{cj}\,OA')$, la quale si rende identica alla (1) del §. 78 quando vi si ponga

$OA \,\underline{\frown}\, (OH)^2 : \text{cj}\, OA'$, sicchè la condizione che le tangenti in X, Y s' incontrino in un punto della retta A'M è identica coll'altra, che la corda XY passi pel punto A posto nella OA' in guisa che OA.OA' uguagli il quadrato del raggio (cosa notissima nella teoria delle polari). Determinando in simil modo anche il punto B della OB', ecc. ridurremo il problema alle formule più comode del §. 78.

83. Se per esempio il triangolo MNP circoscritto al circolo debba avere due vertici sulle rette A'M, B'N e l'angolo in P massimo; determineremo come sopra i due punti A, B, e tirato il raggio OBH noi taglieremo la OA in K nello stesso modo con cui il raggio OH è tagliato in B. Dopo ciò tireremo le $AA_1 \,\underline{\frown}\, BO$, $HH_1 \,\underline{\frown}\, KO$, e, data alla OS tal direzione che la projezione su di essa della OH_1 equivalga alla OA_1, formeremo l'angolo SOX eguale ad HOA_1. Hanno luogo due soluzioni di massimo dipendenti dalle due posizioni che può prendere la OS, in OS od OS_1.

84. Problema. *Dati tre punti* A, B, C *trovare la base comune di tre triangoli* AXY, BXY, CXY *conoscendo le differenze dei loro angoli nei vertici* A, B, C, *nonchè i rapporti fra i rapporti* AX : AY, BX : BY, CX : CY *dei loro lati.* Questo problema si presentò al Lagrange in alcune sue considerazioni sulle carte geografiche (*Mém. de l'Acad. de Berlin pour* 1779, *pag.* 201, §. 34), e gli sembrò assai difficile risolverlo colla Geometria, e neppure ne tentò la soluzione algebrica non isperando di poterla ridurre a facile costruzione. Colle equipollenze la soluzione è affatto diretta e facilissima. — Le condizioni del problema sono espresse dalle due equipollenze (Fig. 23ª)
$AX.BY : AY.BX \,\underline{\frown}\, CN : CA$, $AX.CY : AY.CX \,\underline{\frown}\, BM : BA$,
purchè la CN abbia tal inclinazione e grandezza che
ang. ACN = ang. YAX — ang. YBX, ed il rapporto CN : CA eguagli il dato quoziente di AX : AY diviso per BX : BY. Dicasi simil cosa della BM. Col 1.° canone tutte le rette incognite si riducono alle due AX, AY, ed è poi facile eliminare quest' ultima ed ottenere la formula di soluzione

$AX \bumpeq (AC.MB + AB.CN):MN \bumpeq AR + AS$, essendo $AR \bumpeq AC.MB:MN$, $AS \bumpeq AB.NC:NM$. Cioè costruiti i triangoli ACR, ABS rispettivamente simili-dritti ai MNB, NMC, sarà $SX \bumpeq AR$. In maniera simile potrà determinarsi Y; nel che gioverà sostituire ai rapporti $CN:CA$, $BM:BA$ i loro equipollenti $CA:CN'$, $BA:BM'$, acciocchè si possa elinare X colla stessa facilità, con cui prima si eliminò Y. Così si troverà $AY \bumpeq AR' + AS'$ essendo $AR' \bumpeq AC.M'B:M'N'$, $AS' \bumpeq AB.N'C:N'M'$, che danno $AR.AR' \bumpeq AS.AS'$.

85. Problema. *Costruire un triangolo conoscendone la base, il prodotto od il rapporto degli altri due lati, e la somma o la differenza dei due angoli alla base.* Segnando con X il vertice incognito del triangolo ABX, e rammentando che $\text{cj}\,AX$ ha egual grandezza di AX, ed inclinazione uguale ma di segno opposto (§. 45), vedremo che le due condizioni di ciascuno dei casi del problema sono comprese in una sola equipollenza, il cui membro incognito è nei quattro casi $AX.\text{cj}\,BX$, $AX.BX$, $AX:BX$, $AX:\text{cj}\,BX$ i due ultimi casi furono già risolti nei §§. 40, 47. Il secondo caso non presenta alcuna difficoltà, poichè l' equipollenza si risolve alla maniera stessa delle equazioni del secondo; noi avremo occasione di risolverlo nel §. 125. — Il primo caso ci darà occasione a fare un' osservazione molto importante. Ponendo (Fig. 24ª)
$AX.\text{cj}\,BX \bumpeq AD.\text{cj}\,BA$, sarà $AD.AB$ il dato prodotto dei due lati, e $\text{ang}.XAD = \text{ang}.XBA$, cioè BAD è la somma dei due angoli alla base. L' equipollenza che esprime le condizioni del problema contiene AX e $\text{cj}\,BX \bumpeq \text{cj}\,AX - \text{cj}\,AB$, bisognerà perciò combinarla colla sua conjugata
$\text{cj}\,AX.(AX - AB) + AB.\text{cj}\,AD \bumpeq 0$. Prendendo AB per origine delle inclinazioni, la prima equipollenza è
$AX(\text{cj}\,AX - AB) + AB.AD \bumpeq 0$; sottraendole l' una dall' altra si ha $AX - \text{cj}\,AX \bumpeq AD - \text{cj}\,AD$, ossia (§. 10) $DX \bumpeq \text{cj}\,DX$; perciò la DX è parallela alla AB, il che poteva dedursi da una facile considerazione geometrica. — Eliminando $\text{cj}\,AX$ si ottiene

$(AX)^2 - (AB + AD - \text{cj}\, AD)\, AX + AB . AD \triangleq 0$, la cui formula di risoluzione si semplificherà ponendo $AB \triangleq 2.AC$, $AD - \text{cj}\, AD \triangleq 2.CE$, cioè (§. 56) tirando la CE perpendicolare nel mezzo della AB, e la DE parallela alla AB, e finalmente costruendo $AF \triangleq AB.AD : AE$, cioè il triangolo ADF simile-dritto all' isoscele AEB. Dopo di che con facile calcolo (§§. 10, 18) si troverà $EX \triangleq \sqrt{EA.EF}$, il che insegna che la EX dovrà essere media proporzionale ed ugualmente inclinata tra le AE, EF.

86. Si ottiene una soluzione ancora più semplice colle seguenti facili trasformazioni, nelle quali P è il piede della perpendicolare abbassata dal punto D sulla retta AB d'inclinazione nulla, sicchè $CE \triangleq PD$, $2.PD \triangleq AD - \text{cj}\, AD$ (§. 56). L'equipollenza del 2.° grado in AX dà
$(EX)^2 \triangleq (AC + PD)^2 - AB(AP + PD) \triangleq$
$\triangleq (AC - AP)^2 - (AP)^2 + (PD)^2 \triangleq (CP)^2 - (AP + PD)(AP - PD) \triangleq$
$\triangleq (CP)^2 - AD . \text{cj}\, AD$, ed osservando che ambedue gli ultimi termini hanno l' inclinazione nulla, vedremo che questa equipollenza è identica all'equazione $\text{gr}^2 EX = \text{gr}^2 CP - \text{gr}^2 AD$, quindi, pel teorema Pitagorico, sulla EC prenderemo la EG eguale alla AD, e taglieremo la ED in X coll' arco di centro G e di raggio eguale a CP.

87. Quando il problema è impossibile la precedente costruzione lo rende palese; non così quella del §. 85; poichè anche se F cade tra E e B, il punto X sarà reale e si troverà sulla EC. — Nel calcolo delle equipollenze può dunque avvenire ciò che talvolta succede anche nell' Algebra, che combinando un' equipollenza colla sua conjugata si ottenga qualche soluzione che non soddisfaccia alla primitiva; il che nel nostro caso torna evidente per non essere più soddisfatta la condizione $DX \triangleq \text{cj}\, DX$.

88. Problema. *Dati tre circoli, che abbiano il punto comune* I (Fig. 25ª), *tirare per questo punto la retta* IXZY *in modo che le parti* XZ, XY *comprese tra i circoli abbiano il dato rapporto* m. Indicata con ε^u l' inclinazione della cercata

retta, la corda $IZ \bumpeq z\varepsilon^u$ del circolo che ha il centro in C sarà data da $z\varepsilon^u - IC \bumpeq CZ \bumpeq IC.\varepsilon^t$, essendo $t = \mathrm{inc}\,CZ - \mathrm{inc}\,IC$: moltiplicando la precedente equipollenza per la sua conjugata $z\varepsilon^{-u} - \mathrm{cj}\,IC \bumpeq \mathrm{cj}\,IC.\varepsilon^{-t}$ ne risulta $z\varepsilon^u \bumpeq \varepsilon^{2u}.\mathrm{cj}\,IC + IC$. Questa espressione di IZ e le due analoghe di IX, IY sostituite nell' equipollenza $XZ - m.XY \bumpeq 0$, danno $\varepsilon^{2u}(\mathrm{cj}\,AC - m.\mathrm{cj}\,AB) + AC - m.AB \bumpeq 0$. Costruendo $AL \bumpeq m.AB$, $AC - m.AB \bumpeq LC$, si ha $\varepsilon^{2u}\,\mathrm{cj}\,LC \bumpeq -LC$, la quale dà $2u - \mathrm{inc}\,LC = \mathrm{inc}.LC - 180^\circ$, ossia $u = \mathrm{inc}\,LC - 90^\circ$. Dunque la retta cercata è perpendicolare alla LC determinata superiormente.

89. Trovata una così breve soluzione è poi facile dimostrarla col mezzo di considerazioni geometriche, ed estenderla eziandio all' analogo problema relativo a quattro sfere, che hanno il punto comune I. — Il problema relativo ai tre circoli fu risolto molto più laboriosamente dal Fergola (Acad. di Napoli 1788, pag. 136); egli ne dedusse la soluzione dell' altro problema proposto dal Newton (*Princ. Math. Lemma* 28) di inscrivere fra quattro rette date un quadrilatero simile ad uno dato; io risolsi quest' ultimo nel §. 48 della mia Memoria del 1843. Il primo problema fu poi proposto dallo Steiner e risolto dal Clausen (J. Crelle Tom. II, 1827, pag. 96 e T. VI, 1830, pag. 404.).

III. Formule trigonometriche, ed alcuni altri esercizii col metodo delle equipollenze.

90. Per chi conosce le espressioni immaginarie delle linee trigonometriche, e ricorda che (§. 48) il ramuno (indicante una retta eguale all' unità ed avente l' inclinazione di $+90^\circ$) si calcola precisamente come il segno $\sqrt{-1}$, sarà facilissimo intendere quanto sono per dire; sicchè posso procedere rapidamente e cominciare dalla risoluzione di un triangolo, i cui lati abbiano le lunghezze a, b, c e gli angoli opposti sieno

A, B, C (Fig. 26ª). L' inclinazione del lato CA sul lato CB sarà C, e l' inclinazione del lato AB sarà $-B$; perlochè il 1° canone $CA + AB \bumpeq CB$ ci darà (1) $b\varepsilon^{C} + c\varepsilon^{-B} \bumpeq a$. Da questa equipollenza, senza bisogno di alcuna considerazione geometrica, trarremo la risoluzione del triangolo, cioè tutte le relazioni tra i cinque elementi a, b, c, B, C. Rispetto all' angolo in A, esso è $A = \text{inc}\, AB - \text{inc}\, AC = -B - (C - \pi)$; perciò (2) $A + B + C = \pi$.

91. Per trovare la relazione tra due lati e gli angoli opposti ci basterà eliminare a dalla (1) combinata colla sua conjugata $b\varepsilon^{-C} + c\varepsilon^{B} \bumpeq a$, ed avremo
(3) $b(\varepsilon^{C} - \varepsilon^{-C}) \bumpeq c(\varepsilon^{B} - \varepsilon^{-B})$. Il canone 11.° ci mostra che $\varepsilon^{C} - \varepsilon^{-C}$ esprime una retta perpendicolare all' origine delle inclinazioni, e la cui lunghezza dipende unicamente dalla grandezza dell' angolo C, giacchè le rette espresse da ε^{C}, ε^{-C} hanno l' unità di lunghezza. La metà di quella retta fu detta il seno dell' angolo C, perciò la (3) divisa per $2\gamma'$ dà $b \operatorname{sen} C = c \operatorname{sen} B$.

92. Se decomponiamo (§. 5) la retta inclinata ε^{C} in una retta d' inclinazione nulla ed in una ad essa perpendicolare, e diciamo coseno e seno queste due componenti, abbiamo
(1) $\varepsilon^{C} \bumpeq \cos C + \gamma' \operatorname{sen} C$, che insieme colla sua conjugata $\varepsilon^{-C} \bumpeq \cos C - \gamma' \operatorname{sen} C$ darà (2) $2\cos C \bumpeq \varepsilon^{C} + \varepsilon^{-C}$, $2\gamma' \operatorname{sen} C \bumpeq \varepsilon^{C} - \varepsilon^{-C}$. Sostituendo a C il suo complemento $\frac{\pi}{2} - C$, e ricordando che $\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \bumpeq \gamma'$ si dimostrerebbe che $\cos C = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$, ma è inutile arrestarsi su cose notissime. La tangente essendo il rapporto del seno al coseno è data da

$$(4) \qquad \operatorname{tg} C \bumpeq \frac{\varepsilon^{C} - \varepsilon^{-C}}{\gamma'(\varepsilon^{C} + \varepsilon^{-C})} \bumpeq \frac{\varepsilon^{2C} - 1}{\gamma'(\varepsilon^{2C} + 1)}.$$

93. Ripigliando la risoluzione del triangolo, cerchiamo la relazione che ha luogo tra i lati ed un angolo. Dalla (1) del (§. 90) dobbiamo eliminare B, il che subito si ottiene moltiplicando la $a - b\varepsilon^{C} \simeq c\varepsilon^{-B}$ per la sua conjugata $a - b\varepsilon^{-C} \simeq c\varepsilon^{B}$, sicchè sarà $a^2 + b^2 - ab(\varepsilon^{C} + \varepsilon^{-C}) \simeq c^2$; possiamo per la (2) del §. 92 dedurne tosto il valore di $\cos c$; oppure risolvendola rispetto ε^{C} abbiamo

(4) $\varepsilon^{C} \simeq \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \gamma \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2}$, la quale paragonata colla (1) del §. 92 dà le espressioni di $\cos c$ e di $\operatorname{sen} c$ col mezzo dei tre lati. Inoltre estraendo la radice della (4) posto $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = m$, si ha (5) $\varepsilon^{\frac{C}{2}} \simeq \sqrt{\frac{1+m}{2}} + \gamma \sqrt{\frac{1-m}{2}}$, da cui provengono tosto le note espressioni di $\cos\frac{c}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{c}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{c}{2}$.

94. Ci rimane da cercare la relazione fra due lati, l'angolo intercetto, ed uno opposto. Dall'equipollenza fondamentale (1) del §. 90 si elimina c sottraendo dalla $b\varepsilon^{B+C} + c \simeq a\varepsilon^{B}$ la sua conjugata; poscia si risolve l'equipollenza rispetto a ε^{B} e si ha $\varepsilon^{2B} \simeq \frac{a - b\varepsilon^{-C}}{a - b\varepsilon^{C}}$. Col mezzo della (4) del §. 92 se ne deduce (6) $\operatorname{tg} B \simeq \frac{b \operatorname{sen} c}{a - b\cos c}$, ed anche

(7) $\operatorname{tg}\left(B + \frac{C}{2}\right) \simeq \left(\frac{a\varepsilon^{C} - b}{a - b\varepsilon^{C}} - 1\right) : \left(\frac{a\varepsilon^{C} - b}{a - b\varepsilon^{C}} + 1\right)\gamma \simeq$
$\simeq \frac{a+b}{a-b}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$. Questa potrebbe anche ottenersi decomponendo, mediante il 2.° canone, l'equipollenza
$b\varepsilon^{\frac{C}{2}} + c\varepsilon^{-B-\frac{C}{2}} \simeq a\varepsilon^{-\frac{C}{2}}$ nelle due equazioni
$c\cos\left(B + \frac{C}{2}\right) = (a - b)\cos\frac{C}{2}$, $c\operatorname{sen}\left(B + \frac{C}{2}\right) = (a + b)\operatorname{sen}\frac{C}{2}$.

95. Non mi fermerò a dimostrare col mezzo delle equipollenze del §. 92 le formule relative alle linee trigonometriche, essendo queste cose conosciute. Piuttosto aggiungerò ancora un esempio che nel nostro metodo non è necessario ricorrere ad alcuna considerazione geometrica. Supponiamo che in un quadrilatero (Fig. 27ª) coi lati a, b, c, d, sia B l'angolo interno compreso tra i lati a, b ed A ambedue gli angoli opposti compresi tra i lati b, c e tra d ed a. Considerando le mutue inclinazioni dei lati si scorge che il 1° canone dà l'equipollenza $a - b\varepsilon^{-B} + c\varepsilon^{-B-A} \triangleq d\varepsilon^{A}$; l'angolo B resterà eliminato moltiplicando membro a membro la $a - d\varepsilon^{A} \triangleq (b - c\varepsilon^{-A})\varepsilon^{-B}$ per la sua conjugata; così si ottiene $(ad - bc)(\varepsilon^{A} + \varepsilon^{-A}) \triangleq a^2 - b^2 - c^2 + d^2$, da cui possono dedursi (§. 93) i valori di $\cos A$, $\operatorname{sen} A$, $\operatorname{sen}\frac{A}{2}$, ecc.

96. Se sia u l'inclinazione della retta LM sopra la AB si ha $\mathrm{LM} : \mathrm{AB} \triangleq \varepsilon^{u} . \mathrm{gr\,LM} : \mathrm{gr\,AB}$, e moltiplicando (§. 52) per $\mathrm{AB} . \mathrm{cj\,AB} \triangleq \mathrm{gr}^2\,\mathrm{AB}$ si ha

(1) $\mathrm{cj\,AB} . \mathrm{LM} \triangleq \mathrm{gr\,AB} . \mathrm{gr\,LM} . \varepsilon^{u}$. Combinando questa (1) colla sua conjugata ne vengono le

(2) $\sqrt{\;}(\mathrm{AB} . \mathrm{cj\,LM} - \mathrm{cj\,AB} . \mathrm{LM}) \triangleq 2 . \mathrm{gr\,AB} . \mathrm{gr\,LM} . \operatorname{sen} u$,

(3) $\mathrm{AB} . \mathrm{cj\,LM} + \mathrm{cj\,AB} . \mathrm{LM} \triangleq 2 . \mathrm{gr\,AB} . \mathrm{gr\,LM} . \cos u$.

Mutando LM in AC la (2) ci dà l'area del triangolo ABC conforme al nostro canone 12.° Le equipollenze (2), (3) possono considerarsi come conseguenze dei canoni 11° e 10°. — Al primo membro della (3) può farsi subire tale trasformazione da ridurre tutti i termini ad avere l'inclinazione nulla, sicchè l'equipollenza si cangi in un'equazione: infatti è

$\mathrm{AB} . \mathrm{cj\,LM} + \mathrm{cj\,AB} . \mathrm{LM} \triangleq \mathrm{AB}(\mathrm{cj\,AM} - \mathrm{cj\,AL}) +$
$+ \mathrm{cj\,AB}(\mathrm{AM} - \mathrm{AL}) \triangleq (\mathrm{AL} - \mathrm{AB})(\mathrm{cj\,AL} - \mathrm{cj\,AB}) -$
$-(\mathrm{AM} - \mathrm{AB})(\mathrm{cj\,AM} - \mathrm{cj\,AB}) - \mathrm{AL} . \mathrm{cj\,AL} + \mathrm{AM} . \mathrm{cj\,AM} \triangleq$
$\triangleq \mathrm{BL} . \mathrm{cj\,BL} - \mathrm{BM} . \mathrm{cj\,BM} - \mathrm{AL} . \mathrm{cj\,AL} + \mathrm{AM} . \mathrm{cj\,AM}$.

Così abbiamo (§. 52)

(4) $2 . \mathrm{gr\,AB} . \mathrm{gr\,LM} . \cos u = \mathrm{gr}^2\,\mathrm{AM} + \mathrm{gr}^2\,\mathrm{BL} - \mathrm{gr}^2\,\mathrm{AL} - \mathrm{gr}^2\,\mathrm{BM}$.

97. Se ai canoni ricordati al §. 61 aggiungiamo le definizioni espresse dalle formule del §. 92 e le (3), (4) del §. precedente noi abbiamo tutti i principii del metodo delle equipollenze applicato allo studio delle figure piane composte di punti, rette, o circoli; torna superflua ogni considerazione geometrica o trigonometrica, perchè tutto è implicitamente compreso nel metodo stesso. Ma essendochè non possa speditamente adoperarsi uno strumento comunque semplice, ove col ripetuto esercizio non se ne renda abituale l' uso, aggiungerò parecchi esempii; dei quali peraltro si potranno studiare soltanto quelli fino al §. 120, od anche soltanto fino al §. 109, passando poscia alla teoria delle curve (§. 133), che formerà l' ultima parte di questa Memoria.

98. Problema. *Dati due lati* CA $= b$ (Fig. 28ª) CB $= a$, *e l' angolo intercetto* c, *determinare la distanza* CE $= z$ *di quel vertice da un punto* E *di data divisione della base.* La condizione del problema è espressa da $AE \bumpeq \frac{e}{c} AB$; chiamato u l' angolo ACE sarà $c\,(z\varepsilon^{u} - b) \bumpeq e\,(a\varepsilon^{C} - b)$. Isolando $z\varepsilon^{u}$, poscia moltiplicando per la sua conjugata sparisce la u, e la z è data da

$$z^2 \bumpeq \frac{b^2\,(c-e)^2 + a^2 e^2}{c^2} + \frac{a\,b\,e\,(c-e)}{c^2}\,(\varepsilon^{C} + \varepsilon^{-C}),$$ dove

(§. 92) è $\varepsilon^{C} + \varepsilon^{-C} \bumpeq 2\cos C$. Se sia c la lunghezza del lato AB (e perciò AE $= e$) si ha $c^2 \bumpeq AB\,.\,\text{cj}\,AB \bumpeq$
$\bumpeq (a\varepsilon^{C} - b)(a\varepsilon^{-C} - b) \bumpeq a^2 + b^2 - a\,b\,(\varepsilon^{C} + \varepsilon^{-C})$; così dalla precedente equazione che dà z^2 possiamo eliminare l'angolo C; ne risulta $c\,z^2 = b^2\,(c-e) + a^2 e - c\,e\,(c-e)$, ossia $AB\,(CE)^2 = AE\,(CB)^2 + EB\,(CA)^2 - AB\,.\,AE\,.\,EB$.

99. Teorema. *Qualunque sieno i punti* A, B, C..... *ed i coefficienti numerici* m, m', m'',.... *esiste un punto* G *tale che* $m\,.\,GA + m'\,.\,GB + m''\,.\,GC + \ldots\ldots \bumpeq 0$. *Nel caso di tre soli punti le aree dei triangoli* GAB, GBC, GCA, ABC *sono proporzionali ai coefficienti* m'', m, m', $(m + m' + m'')$.

Scelto ad arbitrio un punto O (che potrà essere uno dei dati A, B,.....) sarà facile costruire la OG in guisa che $(m + m' + \ldots\ldots)\,OG \bumpeq m\,.\,OA + m'.\,OB + \ldots\ldots,$ e pel 1° canone si vedrà che l' unico punto G così determinato soddisfà alla condizione stabilita nel teorema; noi lo diremo il *baricentro* dei punti A, B,..... rispettivamente accompagnati dai coefficienti (o *masse*) m, m',..... Quando tutti i coefficienti sono eguali G dicesi il *baricentro* dei punti A, B.....

100. Se dalla precedente equipollenza moltiplicata per cj OP sottriamo la sua conjugata moltiplicata per OP otteniamo
$$(m + m' + \ldots\ldots)\,(OG.\,\mathrm{cj}\,OP - \mathrm{cj}\,OG.\,OP) \bumpeq$$
$$\bumpeq m\,(OA.\mathrm{cj}\,OP - \mathrm{cj}\,OA.OP) + m'\,(OB.\mathrm{cj}\,OP - \mathrm{cj}\,OB.OP) + \ldots.$$
Quindi pel 12° canone sarà $(m + m' + \ldots\ldots)\,GOP =$ $= m\,.\,AOP + m'.\,BOP + \ldots\ldots$ Facendo che O, P coincidano successivamente con due dei tre punti A, B, C si hanno le equazioni $(m + m' + m'')\,GBC = m\,.\,ABC,$ $(m + m' + m'')\,GCA = m'.\,BCA,$ $(m + m' + m'')\,GAB = m''.\,CAB,$ che dimostrano la verità della seconda parte del teorema. Si ponga attenzione al segno negativo che prende (§. 57) l' area d' un triangolo quando i vertici presi nell' ordine con cui sono nominati si volgono in verso opposto.

101. Problema. *Quali coefficienti debbono attribuirsi ai vertici di un triangolo* ABC, *perchè il loro* baricentro *sia il centro* R *del circolo circoscritto.* Potrebbero considerarsi come cose notissime che l' angolo ARB (Fig. 28ª) è doppio di $\mathrm{ang}.\,ACB = c,$ e che l' area del triangolo RAB è proporzionale al seno di ARB; nulladimeno dimostriamolo col metodo delle equipollenze. Per esprimere la condizione che R sia equidistante dai tre vertici porremo $RA \bumpeq r\varepsilon^{\alpha}$, $RB \bumpeq r\varepsilon^{\beta}$, $RC \bumpeq r\varepsilon^{\gamma}$. Pel 12° canone e pel §. 51 si ha
$$RAB = \frac{\surd}{4}\,r^2\,(\varepsilon^{\alpha-\beta} - \varepsilon^{-\alpha+\beta}) = \frac{r^2}{2}\,\mathrm{sen}\,(\beta - \alpha);$$
e pei canoni 9° e 1° il doppio dell' inclinazione del lato CB meno il doppio dell' inclinazione di CA, ossia $2c$, è dato da

$CB.\mathrm{cj}\,CA : \mathrm{cj}\,CB.CA \bumpeq (\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{\gamma})(\varepsilon^{-\alpha} - \varepsilon^{-\gamma}) :$ $(\varepsilon^{-\beta} - \varepsilon^{-\gamma})(\varepsilon^{\alpha} - \varepsilon^{\gamma}) \bumpeq \varepsilon^{\gamma+\beta}.\varepsilon^{-\gamma-\alpha} \bumpeq \varepsilon^{2c}$; dunque $\beta - \alpha = 2c$. Quindi pel precedente teorema avremo

(1) $\quad \mathrm{sen}\,2a.RA + \mathrm{sen}\,2b.RB + \mathrm{sen}\,2c.RC \bumpeq 0$.

102. Problema. *Determinare la comune intersezione* H *delle tre altezze di un triangolo* ABC (Fig. 28ª). La condizione che CH, BH sieno perpendicolari ai lati AB, CA vengono espresse da $\surd.CH \bumpeq n.AB$, $\surd.BH \bumpeq m.CA$, colle quali equipollenze dobbiamo determinare m, n. Prima elimineremo il punto ignoto H, sicchè $\surd.CB \bumpeq n.AB - m.CA$; poi col mezzo della sua conjugata otterremo

$\surd(CB.\mathrm{cj}\,CA + \mathrm{cj}\,CB.CA) \bumpeq n(AB.\mathrm{cj}\,CA - \mathrm{cj}\,AB.CA)$.

Mediante le (3), (2) del §. 96, ossia mediante i canoni 10° e 11°, il valore di n si ridurrà ad espressione trigonometrica: posto $CB - CA$ in luogo di AB, si trova $n = \surd(CB.\mathrm{cj}\,CA + \mathrm{cj}\,CB.CA):(CB.\mathrm{cj}\,CA - \mathrm{cj}\,CB.CA) = \cot c$. Onde la CH eguaglia il lato AB diviso per la tangente dell' angolo opposto c. Il punto H non cangerebbe se si cercasse invece l' intersezione delle CH, AH perpendicolari ai lati opposti.

103. Essendo $AB \bumpeq \mathrm{tg}\,c.\surd CH$, $BC \bumpeq \mathrm{tg}\,a.\surd AH$, $CA \bumpeq \mathrm{tg}\,b.\surd BH$, l' equipollenza $BC + CA + AB \bumpeq 0$ ci dà (2) $\mathrm{tg}\,a.HA + \mathrm{tg}\,b.HB + \mathrm{tg}\,c.HC \bumpeq 0$. Le (1), (2) mostrano quali coefficienti debbano attribuirsi ai vertici del triangolo, acciocchè il loro baricentro sia il centro R del circolo circoscritto, oppure il punto H comune alle tre altezze.

104. Riferiamo questo punto H al centro del circolo circoscritto. Colle posizioni fatte nel §. 101 abbiamo

$$AB \bumpeq r(\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{\alpha}), \qquad \mathrm{tg}\,c \bumpeq \frac{\varepsilon^{\beta-\alpha} - 1)}{\surd(\varepsilon^{\beta-\alpha} + 1)} \qquad (\text{§. } 92\ (4));$$

perciò $CH \bumpeq r(\varepsilon^{\beta} + \varepsilon^{\alpha}) \bumpeq RB + RA$, la quale esprime che CH è doppia della distanza del centro R dal lato AB; se ne deduce l' equipollenza degna d' osservazione

(3) $\quad RH \bumpeq RA + RB + RC$. Se G è il baricentro dei

punti A, B, C (e dicesi anche baricentro del triangolo) si ha (qualunque fosse R) $3.RG \bumpeq RA + RB + RC$; dunque $RH \bumpeq 3.RG$, cioè: *In ogni triangolo il baricentro è alla terza parte della retta, che dal centro del circolo circoscritto va al punto d' intersezione delle tre altezze.*

105. Esponiamo qualche facile conseguenza della (3). Se al circolo col centro R appartenga un quarto punto D e si faccia $RI \bumpeq RA + RB + RD$, $RL \bumpeq RA + RD + RC$, $RM \bumpeq RD + RB + RC$, saranno I, L, M i punti d' incontro delle altezze dei triangoli ABD, ADC, DBC. Risulta da quelle equipollenze che $HI \bumpeq RI - RH \bumpeq CD$, $HL \bumpeq BD$, $HM \bumpeq AD$, perciò la figura HILM è uguale e similmente posta della DCBA.

106. I quattro punti A, B, C, H sono tra loro legati da questa comune proprietà che la retta, che unisce due di essi, è perpendicolare a quella che passa per gli altri due; sia O (Fig. 29ª) il loro baricentro, cioè sia (§. 99) $OA + OB + OC + OH \bumpeq 0$. Alla (3) può mediante il 1° canone darsi la forma $2.OR \bumpeq OA + OB + OC - OH$; perciò $OR \bumpeq HO$. Similmente se sieno R_1, R_2, R_3 i centri dei circoli circoscritti a HBC, AHC, ABH sarà $OR_1 \bumpeq AO$, $OR_2 \bumpeq BO$, $OR_3 \bumpeq CO$. La figura $RR_1R_2R_3$ è uguale e similmente posta della HABC; ogni lato di una dimezza perpendicolarmente un lato dell' altra; A è il centro del circolo circoscritto ad RR_2R_3, ecc.

107. Il predetto punto O che viene determinato dall' equipollenza (4) $RO \bumpeq \frac{1}{2}RH \bumpeq \frac{3}{2}RG \bumpeq \frac{1}{2}(RA + RB + RC)$ è degno d' osservazione. Il punto di mezzo A° del lato BC è dato da $RA^\circ \bumpeq \frac{1}{2}(RB + RC)$, perciò $OA^\circ \bumpeq -\frac{1}{2}RA$; quindi i punti A°, B°, C° sono nel circolo che ha il centro O ed il raggio metà di quello del circolo ABC. In quel medesimo circolo $A^\circ B^\circ C^\circ$ il punto A' diametralmente opposto ad A° sarà il punto di mezzo della AH (giacchè O è il baricentro dei quattro punti A, B, C, H); infatti la $OA' \bumpeq -OA^\circ \bumpeq \frac{1}{2}RA$ dà $OA' \bumpeq \frac{1}{2}(OA - OR) \bumpeq \frac{1}{2}(OA + OH)$, perchè (§. 106)

$-OR \simeq OH$. Ogni angolo retto $A^{\circ}A_{1}A'$ è inscritto nella mezza circonferenza col centro O, perciò quel circolo passa anche per A_{1}, quindi: *Per ogni triangolo* ABC *vi è un circolo* (*con raggio metà del circoscritto*) *il quale taglia i lati nei loro punti di mezzo, nonchè nei piedi delle tre altezze del triangolo, e dimezza pure le predette perpendicolari* AH, BH, CH *terminate al loro punto d' intersezione; il suo centro è alla metà della retta che dal centro del circolo circoscritto va al punto d' intersezione* H *delle tre altezze.*

108. Problema. *Determinare il centro* P *del circolo inscritto nel triangolo* ABC (Fig. 29ª). I triangoli PAB, PBC, PCA avendo uguali altezze sono proporzionali alle basi AB, BC, CA, le quali sono proporzionali ai seni degli angoli opposti; perciò (§. 99) (5) $\mathrm{sen}\,a\,.\,PA + \mathrm{sen}\,b\,.\,PB + \mathrm{sen}\,c\,.\,PC \simeq 0$. Così possiamo esprimere le (1), (2), (5) dicendo che: *Il centro del circolo circoscritto, — il punto comune delle tre altezze, — ed il centro del circolo inscritto sono i baricentri dei vertici del triangolo quando ad essi si attribuiscono dei coefficienti proporzionali ai prodotti del seno pel coseno, — alle tangenti, — od ai seni degli angoli rispettivi.* Divisi per metà gli archi BC, CA, AB del circolo circoscritto nei punti $A^{\circ\circ}$, $B^{\circ\circ}$, $C^{\circ\circ}$; il centro P del circolo inscritto è l'intersezione delle rette $AA^{\circ\circ}$, $BB^{\circ\circ}$, $CC^{\circ\circ}$, le quali sono perpendicolari ai lati del triangolo $A^{\circ\circ}B^{\circ\circ}C^{\circ\circ}$; dunque P è rispetto a questo triangolo quello che è H rispetto ad ABC, e perciò la (3) ci dà

(6) $RP \simeq RA^{\circ\circ} + RB^{\circ\circ} + RC^{\circ\circ}$. Se non si avesse voluto profittare di queste facili considerazioni geometriche le formule del §. 101 avrebbero condotto direttamente all'equipollenza (6), alla quale può darsi la forma $A^{\circ\circ}P \simeq C^{\circ 1}B^{\circ\circ} \simeq B^{\circ 1}C^{\circ\circ}$, essendo $C^{\circ 1}$, $B^{\circ 1}$, $A^{\circ 1}$ i punti diametralmente opposti ai $C^{\circ\circ}$, $B^{\circ\circ}$, $A^{\circ\circ}$. Anche quelli, non meno dei $C^{\circ\circ}$, $B^{\circ\circ}$, $A^{\circ\circ}$, dimezzano gli archi AB, CA, BC, e si hanno altri tre punti P_{1}, P_{2}, P_{3} equidistanti dai lati del triangolo ABC, i quali sono centri dei circoli *ex-inscritti*, essi sono dati dalle equipollenze

$RP_{1} \simeq RA^{\circ\circ} + RB^{\circ 1} + RC^{\circ 1} \simeq RA^{\circ\circ} - RB^{\circ\circ} - RC^{\circ\circ}$,

$RP_2 \bumpeq - RA^{00} + RB^{00} - RC^{00}$, $RP_3 \bumpeq - RA^{00} - RB^{00} + RC^{00}$. Queste mostrano che i A^{00}, B^{00}, C^{00}, A^{01}, B^{01}, C^{01} sono i punti di mezzo delle distanze PP_1, PP_2, PP_3, P_2P_3, P_1P_3, P_2P_1, e che (7) $RP + RP_1 + RP_2 + RP_3 \bumpeq 0$, cioè: *Il centro del circolo circoscritto è il baricentro dei quattro centri dei circoli inscritto ed ex-inscritti.* Quel che i punti H, O sono rispetto al triangolo ABC, lo sono P, R rispetto al triangolo $P_1P_2P_3$ e sulla retta PR potrebbero pur determinarsi i punti che fossero pel secondo triangolo quel che sono G, R pel primo.

109. Cerchiamo di determinare per via diretta il raggio p del circolo inscritto mediante quello r del circoscritto. Se le inclinazioni α, β, γ (§. 101) dei raggi RA, RB, RC procedono in ordine di grandezza dalla minore alla maggiore, le perpendicolari abbassate da P sui lati AB, BC, CA saranno $p\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$, $p\varepsilon^{\frac{\beta+\gamma}{2}}$, $-p\varepsilon^{\frac{\gamma+\alpha}{2}}$. Perchè il piede della prima cada sulla retta AB, i cui estremi sono dati da $RA \bumpeq r\varepsilon^{\alpha}$, $RB \bumpeq r\varepsilon^{\beta}$, dovrà essere (§. 44)

$$RP + p\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \bumpeq (1-m)\, r\varepsilon^{\alpha} + m r\varepsilon^{\beta}, \qquad \text{ossia}$$

$$\frac{RP + p\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - r\varepsilon^{\alpha}}{\varepsilon^{\beta} - \varepsilon^{\alpha}} \bumpeq mr,$$ il primo membro deve adunque esser equipollente al suo conjugato $$\frac{\mathrm{cj}\, RP + p\varepsilon^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} - r\varepsilon^{-\alpha}}{\varepsilon^{-\beta} - \varepsilon^{-\alpha}} \bumpeq$$

$$\bumpeq \frac{\varepsilon^{\alpha+\beta}.\,\mathrm{cj}\, RP + p\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}} - r\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon^{\alpha} - \varepsilon^{\beta}}; \qquad \text{quindi}$$

$$2p \bumpeq r\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} + r\varepsilon^{\frac{\beta-\alpha}{2}} - \varepsilon^{-\frac{\alpha+\beta}{2}}.\, RP - \varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}}.\,\mathrm{cj}\, RP.$$

Nello stesso modo le altre due perpendicolari daranno

$$2p \bumpeq r\left(\varepsilon^{\frac{\beta-\gamma}{2}} + \varepsilon^{\frac{\gamma-\beta}{2}}\right) - \varepsilon^{-\frac{\beta+\gamma}{2}}.\,\mathrm{RP} - \varepsilon^{\frac{\beta+\gamma}{2}}.\,\mathrm{cj\,RP}$$

$$-2p \bumpeq r\left(\varepsilon^{\frac{\gamma-\alpha}{2}} + \varepsilon^{\frac{\alpha-\gamma}{2}}\right) - \varepsilon^{-\frac{\gamma+\alpha}{2}}.\,\mathrm{RP} - \varepsilon^{\frac{\gamma+\alpha}{2}}.\,\mathrm{cj\,RP}.$$

In queste tre equipollenze considereremo RP, cj RP, $2p$ come tre incognite differenti e troveremo

$$\mathrm{RP} \bumpeq r\left(\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \varepsilon^{\frac{\beta+\gamma}{2}} - \varepsilon^{\frac{\gamma+\alpha}{2}}\right),$$

$$(8)\qquad \frac{2(p+r)}{r} \bumpeq \varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} + \varepsilon^{\frac{\beta-\alpha}{2}} + \varepsilon^{\frac{\beta-\gamma}{2}} + \varepsilon^{\frac{\gamma-\beta}{2}} - \varepsilon^{\frac{\gamma-\alpha}{2}} - \varepsilon^{\frac{\alpha-\gamma}{2}},$$

cioè $\frac{p}{r} + 1 = \cos c + \cos b + \cos a$. È facile conoscere che $r\cos c$ è la distanza di R del lato AB, e noi lo dimostreremo osservando che $r\left(\varepsilon^{\frac{\alpha-\beta}{2}} + \varepsilon^{\frac{\beta-\alpha}{2}}\right)$ non differisce se non se nella direzione da $r(\varepsilon^{\alpha} + \varepsilon^{\beta}) \bumpeq \mathrm{RA} + \mathrm{RB}$, che a motivo di $\mathrm{gr\,RA} = \mathrm{gr\,RB}$ è il doppio di quella distanza. Abbiamo inoltre $2\frac{p}{r} - 1 \bumpeq -\left(\varepsilon^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \varepsilon^{\frac{\beta+\gamma}{2}} - \varepsilon^{\frac{\gamma+\alpha}{2}}\right)$

$\left(\varepsilon^{-\frac{\alpha+\beta}{2}} + \varepsilon^{-\frac{\beta+\gamma}{2}} - \varepsilon^{-\frac{\gamma+\alpha}{2}}\right) \bumpeq -\frac{1}{r^2}\mathrm{RP}\,.\,\mathrm{cj\,RP}$; perciò:

La somma dei raggi r, p *dei circoli circoscritto ed inscritto eguaglia* (§. 104) *la semisomma delle distanze dei vertici del triangolo dal punto* H *comune alle tre altezze; e la distanza* RP *dei centri è media proporzionale tra* r *ed* r — 2p.

110. Problema. *Determinare il baricentro* F *del perimetro di un triangolo.* Il baricentro del lato AB è il suo punto di mezzo C°, perciò la composta-equipollente di tutte le rette, che da un punto qualunque F vanno a tutte le porzioncelle infinitesime di quel lato, il cui numero è proporzionale alla

lunghezza c, sarà $c.FC^{o} \doteq \frac{c}{2}(FA+FB)$. Dicasi la stessa cosa per gli altri due lati $BC=a$, $CA=b$, ed acciocchè F sia il baricentro dell' insieme di quei tre lati dovrà essere (§. 99) (9) $(b+c)FA+(c+a)FB+(a+b)FC \doteq 0$. A rendere pienamente diretta e facile la maniera d' adoperare questa equipollenza, giova riferire (mediante il 1° canone) tutti i punti ad un punto arbitrario O, allora la (9) diventa $2(a+b+c)OF \doteq (b+c)OA+(c+a)OB+(a+b)OC$. La (5) del §. 108, a motivo della proporzionalità dei lati a, b, c ai seni degli angoli opposti, diventa
$(a+b+c)OP \doteq a.OA+b.OB+c.OC$; perciò
$2.OF+OP \doteq OA+OB+OC \doteq 3.OG$ essendo G il baricentro dei tre punti A, B, C. Mutando O in F si ha (10) $FP \doteq 3.FG$, che combinata colla (3) del §. 104 $RH \doteq 3.RG$ dà eziandio (11) $HP \doteq 2.FR$; perciò: *In ogni triangolo il baricentro* G *è alla terza parte della retta, che dal baricentro* F *del perimetro va al centro* P *del circolo inscritto; e la retta fra l' intersezione* H *delle tre altezze ed il centro del circolo inscritto è equipollente al doppio di quella fra il baricentro del perimetro ed il centro* R *del circolo circoscritto.*

111. Potrebbe anche dimostrarsi che F è il punto di mezzo della retta da H al centro del circolo che passa pei centri P_1, P_2, P_3 dei circoli ex-inscritti al triangolo ABC. Le relazioni (3), (4), (10) tra i punti R, H, G, O, P, F, permettono di determinarli quando se ne conoscano tre soli, purchè tra loro indipendenti.

112. Analoghe relazioni hanno luogo rispetto ai punti F_1, F_2, F_3 baricentri dei tre lati del triangolo, quando alle porzioncelle infinitesime di uno dei lati si attribuisce coefficiente negativo. Come al §. 106 si trova che la figura $FF_1F_2F_3$ è simile e similmente posta della $PP_1P_2P_3$, i lati della prima sono le metà di quelli della seconda.

113. Problema. *Esprimere il prodotto delle aree di due poligoni mediante le distanze tra i vertici dell' uno e quelli dell' altro.*

Nel caso di due triangoli ABC, LMN il 12° canone (§. 57) ci dà pel cercato prodotto un' equipollenza, che potremmo bensì costruire, ma che non sarebbe facile da calcolare, perchè i termini indicano rette non parallele; fortunatamente che essa può risolversi in quattro di quei binomii, che nel §. 96 vedemmo ridursi a termini tutti d'inclinazione nulla; così l'equipollenza si converte nella desiderata equazione. Ecco il calcolo:

$$16.\, ABC.LMN \simeq$$
$$\simeq -(AB.\mathrm{cj}\,AC - \mathrm{cj}\,AB.AC)(LM.\mathrm{cj}\,LN - \mathrm{cj}\,LM.LN) \simeq$$
$$\simeq AB.\mathrm{cj}\,AC.\mathrm{cj}\,LM.LN + \mathrm{cj}\,AB.AC.LM.\mathrm{cj}\,LN -$$
$$- AB.\mathrm{cj}\,AC.LM.\mathrm{cj}\,LN - \mathrm{cj}\,AB.AC.\mathrm{cj}\,LM.LN \simeq$$
$$\simeq (AB.\mathrm{cj}\,LM + \mathrm{cj}\,AB.LM)(AC.\mathrm{cj}\,LN + \mathrm{cj}\,AC.LN) -$$
$$- (AB.\mathrm{cj}\,LN + \mathrm{cj}\,AB.LN)(AC.\mathrm{cj}\,LM + \mathrm{cj}\,AC.LM) \simeq$$
$$\simeq (\mathrm{gr}^2 AM + \mathrm{gr}^2 BL - \mathrm{gr}^2 AL - \mathrm{gr}^2 BM)$$
$$(\mathrm{gr}^2 AN + \mathrm{gr}^2 CL - \mathrm{gr}^2 AL - \mathrm{gr}^2 CN) -$$
$$- (\mathrm{gr}^2 AN + \mathrm{gr}^2 BL - \mathrm{gr}^2 AL - \mathrm{gr}^2 BN)$$
$$(\mathrm{gr}^2 AM + \mathrm{gr}^2 CL - \mathrm{gr}^2 AL - \mathrm{gr}^2 CM).$$

Nello sviluppo dell' ultimo membro i termini dipendenti dai lati AB, LM si riducono ai due soli $\mathrm{gr}^2 AL.\mathrm{gr}^2 BM - \mathrm{gr}^2 AM.\mathrm{gr}^2 BL$; ed un analogo binomio si ottiene per ciascheduna combinazione di un lato del triangolo ABC con un lato del triangolo LMN; bene avvertendo che i lati si prendano nei due triangoli per lo stesso verso. Così il prodotto delle aree di due triangoli è dato da un polinomio di 18 termini, che possono esprimersi simbolicamente con

(1) $16.\, ABC.LMN = [AB + BC + CA][LM + MN + NL]$,

purchè nello sviluppo del secondo membro ad ogni prodotto AB.LM si sostituisca il binomio $(AL.BM)^2 - (AM.BL)^2$.

114. Se al triangolo ABC sia addossato un altro triangolo ACD sicchè insieme formino il quadrilatero ABCD si avrà il valore di $16.\, ABCD.LMN$, aggiungendo al primo fattore del secondo membro della (1) i termini $AC + CD + DA$. Ora i binomii che risultano dal termine AC (e che sono per

esempio $(AL.CM)^2 - (AM.CL)^2$) distruggono evidentemente quelli risultanti da CA (e che sono $(CL.AM)^2 - - (CM.AL)^2$, ec.). Dunque ammessa la precedente convenzione (§. 113) avremo $16.\,ABCD.LMN = = [AB + BC + CD + DA][LM + MN + NL]$. Collo stesso ragionamento estenderemo la formula al prodotto di due poligoni, ed avremo risolto il problema, restando da combinare ciascun lato di un poligono con ciascun lato dell' altro, e per ogni combinazione calcolare uno dei predetti binomii.

115. Questo teorema insieme col suo analogo relativo al prodotto di due poliedri, e con parecchi altri fu da me pubblicato negli Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto Tom. IV. 1834. pag. 256, e nel T. VIII. 1838. pag. 96, §. 108. Esso fu poscia riprodotto nel *Journal für die Mathematik B.* XXIV. 1842. S. 252; anche nei *Nouvelles Annales de Mathématiques* è attribuito allo Staudt.

116. Se R sia il centro del circolo circoscritto al triangolo ABC, la formula simbolica (1) si riduce a $16.\,ABC.RMN = = [AB + BC + CA][MN]$; perchè i termini espressi simbolicamente da $[AB + BC + CA][RM + NR]$ sono tutti moltiplicati per una delle quantità uguali $(AR)^2 = (BR)^2 = (CR)^2$ e si distruggono vicendevolmente. — Sia R_1 il centro del circolo circoscritto al triangolo ACD, la somma $16.\,ABC.RMN + 16.\,ACD.R_1MN$ sarà espressa (§. 114) da $[AB + BC + CD + DA][MN]$, che dipende dai lati e non dalle diagonali del poligono ABCD. Per lo che se questo poligono si tagliasse in altro modo in triangoli, non pertanto resterebbe costante la somma dei prodotti di ciascun triangolo pel triangolo, che ha per vertice il centro del circolo circoscritto a quel triangolo, e che ha per base una retta MN scelta ad arbitrio. Risulta da ciò e da una nota proprietà dei baricentri (che facilmente può dedursi dalla datane definizione §. 99) che: *Per ogni poligono o complesso di poligoni (posti in uno stesso piano) esiste un punto che è il baricentro di masse proporzionali alle aree dei singoli triangoli,*

nei quali il poligono può spartirsi, situate, anzichè nei loro baricentri, *nei centri dei circoli circoscritti a tali triangoli.* A questo osservabile punto, cui non so se alcuno abbia posto attenzione, io diedi il nome di *pseudocentro.*

117. Supponiamo per esempio che un triangolo ABC sia spartito in tre triangoli GBC, GCA, GAB, le cui aree sieno α, β, γ, perlochè (§. 100) sia $\alpha . GA + \beta . GB + \gamma . GC \bumpeq 0$. Il pseudocentro del triangolo ABC, cioè il centro R del suo circolo circoscritto, sarà pure il pseudocentro dell' insieme dei tre triangoli, cioè sarà il baricentro dei centri R_1, R_2, R_3 dei circoli circoscritti ai GBC, GCA, GAB provveduti dei coefficienti numerici o masse α, β, γ; vale a dire sarà
$\alpha . RR_1 + \beta . RR_2 + \gamma . RR_3 \bumpeq 0$. In particolare se G sia il baricentro del triangolo ABC, R lo sarà del triangolo $R_1R_2R_3$.

118. Potremo chiamare *multilatero* un sistema di rette MN, PQ, ..., la cui composta-equipollente è nulla, e le quali sono per conseguenza equipollenti ai lati di un poligono chiuso. La somma dei triangoli OMN, OPQ,.... che hanno un vertice comune O, e per basi i lati del multilatero sarà pel 12° canone espressa da

$$\frac{\surd}{4}(OM . cj MN + OP . cj PQ + ... - cj OM . MN - cj OP . PQ - .....);$$

similmente per un altro punto O_1 avremo

$$\frac{\surd}{4}(O_1M . cj MN + O_1P . cj PQ + ... - cj O_1M . MN - ....);$$

la differenza di queste due espressioni è

$$\frac{\surd}{4}[OO_1 (cj MN + cj PQ + ...) - cj OO_1 (MN + ...)]$$

che, a motivo di $MN + PQ + ... \bumpeq 0$, è nulla; dunque: Teorema. *La somma delle aree dei triangoli che hanno per basi i lati di un multilatero* MN, PQ.... *ed il vertice comune, è costante, qualunque sia questo vertice; essa si dirà l' area del multilatero.* — Il più semplice dei multilateri è quello formato da due rette parallele e dirette oppostamente, cioè tali che $MN + PQ \bumpeq 0$; la sua area è la metà di quella del parallelogrammo MNPQ.

119. Teorema. *Il prodotto delle aree di un poligono* ABCD *e di un multilatero* MN, PQ,..... *è colle convenzioni del* §. 113 *espresso simbolicamente da*
$\frac{1}{16}$ [AB + BC + CD + DA] [MN + PQ + ...]. Lo si dimostra prendendo per area del multilatero la somma dei triangoli RMN, RPQ,...., che hanno per vertice comune il pseudocentro R del poligono ABCD.

120. Date alquante rette MN, PQ,...., se si voglia determinare una retta XY in guisa che il multilatero MN, PQ,.... XY abbia area nulla, si dovrà da prima scegliere la grandezza e direzione della RS in guisa che sia
MN + PQ + ... + RS ≏ o, sicchè XY ≏ RS. Poscia l' altra condizione OMN + OPQ + ... + OXY = o sarà soddisfatta se si determini il punto X in guisa che sia
OM . cj MN + OP . cj PQ + ... + OX . cj RS ≏ o. Determinato in questo modo il punto X, e considerato che un multilatero d' area nulla può rappresentare un sistema di forze in equilibrio si vede che: *Se le forze* MN, PQ,..... *girano di uno stesso angolo intorno ai loro punti d' applicazione* M, N,..... *la risultante* YX *gira essa pure intorno ad un punto* X.

121. Vedemmo al §. 29 che AB.CD + AD.BC ≏ AC.BD, il che può scriversi $\frac{\text{AB.CD}}{\text{AD.CB}} + \frac{\text{AC.BD}}{\text{AD.BC}}$ ≏ 1. I doppii rapporti che formano i due termini del primo membro di questa equipollenza sono detti dal Chasles *rapporti anarmonici*, purchè peraltro i quattro punti A, B, C, D sieno in linea retta; ma pel teorema generalissimo (§. 24) relativo al metodo delle equipollenze ogni proprietà dei punti in linea retta si estende ai punti di un piano. Presentiamo qualche esempio di questa teoria.

122. Prima dimostrerò una formula molto facile da ritenersi a memoria, che comprende come casi particolari moltissime delle formule date dal Möbins, dal Chasles, ec. Si tratta di esprimere un doppio-rapporto $\frac{\text{DE.FG}}{\text{DG.FE}}$ col mezzo dei doppii-rapporti $\frac{\text{AB.CD}}{\text{CB.AD}}$, $\frac{\text{AB.CE}}{\text{CB.AE}}$, $\frac{\text{AB.CF}}{\text{CB.AF}}$, $\frac{\text{AB.CG}}{\text{CB.AG}}$, nei quali i quattro

punti del primo sono riferiti a tre punti costanti A, B, C. Indichiamo con d, e, f, g questi ultimi doppii-rapporti. Si avverta che qui non seguiamo l' uso da noi sempre adottato d' indicare colle lettere d, ec. dei rapporti numerici, poichè invece ciascuna di esse potrà esprimere un numero moltiplicato per una qualche potenza del *ramuno*. — Mediante il succitato teorema (§. 29) si ha $-AC.DE \triangleq AE.CD - AD.CE$, $-AC.FG \triangleq AG.CF - AF.CG$, $-AC.DG \triangleq AG.CD - AD.CG$, $-AC.FE \triangleq AE.CF - AF.CE$; sostituendo questi valori nel doppio rapporto $\frac{DE.FG}{DG.FE}$, esso diventa $\frac{(AE.CD-AD.CE)(AG.CF-AF.CG)}{(AG.CD-AD.CG)(AE.CF-AF.CE)}$, che facilmente si riconosce essere identico a $\frac{(d-e)(f-g)}{(d-g)(f-e)}$. La stessa dimostrazione può estendersi a più complicati rapporti di forma analoga ai precedenti, e che noi diremo *rapporti multiplici*; dunque: *Conoscendo tutti i doppii rapporti* $\frac{AB.CD}{CB.AD} \triangleq d$, ec., *ogni altro rapporto multiplice sarà determinato da una formola analoga alla* $\frac{DE.FG.MN}{DN.MG.FE} \triangleq \frac{(d-e)(f-g)(m-n)}{(d-n)(m-g)(f-e)}$. Che se nel rapporto, che vuol esprimersi col mezzo dei doppii rapporti d, e, f,... entrasse alcuno dei punti A, B, C valerebbe la stessa formula, purchè si notasse che evidentemente è $c \triangleq \frac{AB.CC}{CB.AC} \triangleq 0$, $b \triangleq \frac{AB.CB}{CB.AB} \triangleq 1$, $a \triangleq \frac{AB.CA}{CB.AA} \triangleq \infty$. Così, per esempio, sarà $\frac{AC.BD}{BC.AD} \triangleq \frac{b-d}{b-c} \triangleq 1-d \triangleq 1-\frac{AB.CD}{CB.AD}$, $\frac{AC.DE}{DC.AE} \triangleq \frac{d-e}{d}$, $\frac{AE.BD}{BE.AD} \triangleq \frac{1-d}{1-e} \triangleq \left(\frac{CB}{AB}-\frac{CD}{AD}\right):\left(\frac{CB}{AB}-\frac{CE}{AE}\right)$, che è la formula con cui il Chasles (*Géom. supér.* §. 33) esprime il rapporto anarmonico dei punti A, E, B, D col mezzo di un quinto punto C.

123. Presi ad arbitrio i punti A, B, C, D....., e pure ad arbitrio i tre punti A', B', C', che si considerino come corrispondenti ai tre primi, si determinino i punti D', E',.... in

guisa che sia $\frac{AB.CD}{CB.AD} \bumpeq \frac{A'B'.C'D'}{C'B'.A'D'}$, ec.; ogni rapporto multiplice tra i punti A, B, C, D.... sarà equipollente al rapporto formato dai punti corrispondenti A', B', C', D'..... Questa è un' immediata conseguenza del teorema del §. 122.

124. Se al primo sistema di punti si consideri appartenere un punto J posto a distanza infinita, qualunque sia la direzione delle rette verso esso rivolte sarà $\frac{CJ}{AJ} \bumpeq 1$, perciò
(1) $\frac{AB.CJ}{CB.AJ} \bumpeq \frac{AB}{CB} \bumpeq \frac{A'B'.C'J'}{C'B'.A'J'}$. Similmente il punto I del primo sistema, che corrisponde ad ogni punto I' situato a distanza infinita e considerato come appartenente al secondo sistema, è dato da (2) $\frac{AB.CI}{CB.AI} \bumpeq \frac{A'B'}{C'B'}$. Dividendo l' una per l' altra queste due equipollenze si ottiene
(3) $IA.J'A' \bumpeq IC.J'C'$. — Siccome quanto si trovò per A, C potrebbe ripetersi per due altri punti, così: *Le rette, che dai due punti* I, J' *corrispondenti in ciascun sistema ai punti all' infinito dell' altro sistema vanno a due punti corrispondenti, hanno prodotto costante in grandezza ed in direzione.*

125. Le due figure *inverse* essendo situate sul medesimo piano, potremo cercare quel punto E, che coincide col proprio corrispondente E'. Servirà a tal uopo l' equipollenza
$IE.J'E \bumpeq IA.J'A'$ (Vegg. §. 85), ossia $IE(IE-IJ') \bumpeq IA.J'A'$. Posto $IJ' \bumpeq 2.IO$ sarà $(IE)^2 - 2.IO.IE + (IO)^2 \bumpeq$ $\bumpeq IA.J'A' + (IO)^2$. Per estrarre più facilmente la radice del secondo membro poniamo che O' sia nella seconda figura il punto corrispondente ad O considerato come appartenente alla prima figura, sicchè (§. 124) $IA.J'A' \bumpeq IO.J'O'$; dopo ciò avremo (4) $IE - IO \bumpeq \pm\sqrt{IO(IO+J'O')} \bumpeq$ $\bumpeq \pm\sqrt{OJ'.OO'}$. Quindi: *Due sono i punti* E, F *che in due figure inverse coincidono coi proprii corrispondenti; la retta* FOE *divide per metà l' angolo* J'OO', e le $OE \bumpeq FO$ *sono medie proporzionali tra le* OJ', OO'. Queste conclusioni sono identiche con quelle che valgono per punti posti in una sola

linea retta (*Chasles, Géom. supér.* §. 154). — Se i punti L, L_1 sieno determinati dall' equipollenza (5) $(OL)^2 \triangleq IO.J'O'$ vedremo in altro momento che E, F sono i fochi dell' ellisse, che ha i due diametri conjugati IOJ', LOL_1.

126. Conoscendo le tre paja di punti corrispondenti A, B, C, A', B', C' i *centri d' inversione* I, J' vengono determinati dalle equipollenze

(5) $AI \triangleq \frac{AB.AC.C'B'}{AB.C'B' - A'B'.CB}$, $A'J' \triangleq \frac{A'B'.A'C'.CB}{A'B'.CB - AB.C'B'}$;

le quali divengono più semplici se si conoscano i punti E, F corrispondenti a sè medesimi, poichè allora si ha

(6) $EI \triangleq \frac{CE.C'F}{CC'}$, $EJ' \triangleq \frac{EC'.CF}{CC'}$.

127. Mediante i punti E, F (ognuno corrispondente a sè medesimo) per ogni pajo di punti corrispondenti è costante il doppio-rapporto (7) $\frac{EA'.FA}{EA.FA'} \triangleq -\mu$. Infatti si ha (§. 123) $\frac{EB.FA}{EA.FB} \triangleq \frac{EB'.FA'}{EA'.FB'}$. Alla (7) può darsi la forma $\mu.\frac{EA}{FA} + \frac{EA'}{FA'} \triangleq 0$, oppure (8) $\frac{\mu}{FA} + \frac{1}{FA'} \triangleq \frac{\mu+1}{FE}$ (giacchè sommando la prima colla seconda moltiplicata per FE si ha un' equipollenza identica); la (8) può esprimersi dicendo che E è *rispetto all' origine* F il *centro armonico* dei punti A, A' dotati dei coefficienti μ, 1; dove μ è generalmente parlando un immaginario. Si ha eziandio $\mu\frac{A'F}{AF} + \frac{A'E}{AE} \triangleq 0$, ossia (9) $\frac{\mu}{AF} + \frac{1}{AE} \triangleq \frac{\mu+1}{AA'}$, quindi A' è rispetto all' origine A il centro armonico dei punti F, E dotati dei coefficienti μ, 1.

128. L' immaginario μ si esprime molto facilmente col mezzo dei centri d' inversione I, J'. Infatti basta far andare all' infinito uno dei punti A, A', perchè la (7) dia

(10) $-\mu \triangleq \frac{FI}{EI} \triangleq \frac{EJ'}{FJ'}$, ossia $\mu.J'F + J'E \triangleq 0$, cioè (§. 99) J' è il baricentro dei punti F, E dotati dei coefficienti μ, 1.

129. Nel caso particolare di $AB.C'B' \mathrel{\underline{\frown}} A'B'.CB$ non esistono i punti I, J', e le due figure anzichè *inverse* sono *simili*: il precedente E che coincide col proprio corrispondente è uno solo, ed è determinato da $\frac{AB}{AE} \mathrel{\underline{\frown}} \frac{A'B'}{A'E}$; noi lo abbiamo già trovato nel §. 40 disegnandolo colla lettera I.

130. Quando due figure inverse hanno i centri d' inversione coincidenti in un solo punto I, bastano per trovarlo due sole paja di punti corrispondenti A, A', B, B'; infatti dalla $IA.IA' \mathrel{\underline{\frown}} IB.IB'$ si deduce $IA.AA' \mathrel{\underline{\frown}} IA(AB'+AB) + AB.AB'$, ossia (1) $AI \mathrel{\underline{\frown}} \frac{AB.AB'}{AB+A'B'}$. I punti E, F sono determinati dalla (2) $IE \mathrel{\underline{\frown}} -IF \mathrel{\underline{\frown}} \sqrt{IA.IA'}$. In questo caso speciale il valore di μ è (§. 128) $-FI:IF \mathrel{\underline{\frown}} 1$; perciò si ha (§. 127) il doppio rapporto *armonico* $\frac{EA'.FA}{EA.FA'} \mathrel{\underline{\frown}} -1$. Il quale esprime che il quadrilatero EAFA' oltre essere inscrivibile nel circolo ha il prodotto di due lati opposti eguali al prodotto degli altri due; io lo dico un quadrilatero *armonico*, perchè è rispetto ad un piano quello che sono rispetto ad una retta due paja di punti conjugati-armonici. Così colla costruzione delle (1), (2) si trovano i due punti E, F che formano un quadrilatero armonico tanto con A, A' quanto con B, B'.

131. Nel suddetto caso di un solo centro d' inversione I egli è evidente che, mentre al punto A della prima figura corrisponde il punto A' della seconda, se questo A' si consideri come appartenente alla prima figura gli corrisponderà nella seconda il punto A. Sarà perciò (§. 123) (3) $\frac{AB.CA'}{AA'.CB} \mathrel{\underline{\frown}} \frac{A'B'.C'A}{A'A.C'B'}$, ossia (4) $\frac{AB.CA'.B'C'}{AC'.B'A'.CB} \mathrel{\underline{\frown}} 1$. Insieme con questa equipollenza e per la stessa guisa sussistono altre tre equipollenze, che si ottengono disponendo in altro modo i punti delle tre paja A, A', B, B', C, C'. Ha pur luogo l' equipollenza (5) $\frac{AB.A'C}{AC.A'B} \mathrel{\underline{\frown}} \frac{A'B'.AC'}{A'C'.AB'}$, ossia (6) $\frac{AB.A'C.AB'.A'C'}{AC'.A'B'.AC.A'B} \mathrel{\underline{\frown}} 1$, ed altre due di analoghe. Di questa simultanea relazione tra

sei punti di un piano abbiamo già trattato al §. 42. Oltre del punto I esistono i due punti E, F, che formano i tre quadrilateri armonici EAFA', EBFB', ECFC'.

132. Potrei estendere molto di più queste applicazioni del metodo delle equipollenze, ma quanto dissi mi pare sufficiente a far conoscere i vantaggi che esso presenta in confronto della ordinaria applicazione dell' Algebra alla Geometria; ed è poi evidente che con questa non si fa alcuna cosa che ugualmente non possa ottenersi col calcolo delle equipollenze; per esempio quando un punto M si riferisce a due assi coordinati passanti per l' origine O, e si determina mediante le coordinate x, y, ciò è lo stesso come porre OM $\triangleq x + y\varepsilon^{a}$ (essendo a l'angolo dei due assi coordinati). Il metodo delle equipollenze oltre i vantaggi, che nascono dagli artificii che gli sono proprii, ha pur quello di determinare le rispettive posizioni delle parti delle figure senza che rimanga alcun pericolo di sbagliare, perlochè non è necessario aver sott' occhio alcuna figura, e tutto si eseguisce col noto algoritmo e seguendo regole fisse.

IV. VARIE APPLICAZIONI ALLA TEORIA DELLE CURVE.

133. Passando allo studio delle curve avremo ancora occasione di scorgere i vantaggi del nostro metodo. Se i punti di una curva vogliono riferirsi alle coordinate ortogonali si potrà porre OM $\triangleq x + y\gamma^{\prime}$, ed immaginare che le due variabili reali x, y sieno tra loro legate da un' equazione. Ma ci gioverà considerare la cosa sotto un punto di vista più generale; così tratteremo nello stesso tempo e delle coordinate parallele e delle coordinate focali, e di altre maniere di espressioni, che tornino più opportune alle differenti speciali circostanze. — Supponendo che O sia un punto fisso, se OM fosse data da un' equipollenza senz' alcuna variabile, anche il punto M sarebbe pienamente determinato: ma se in quell' equipollenza entri una variabile t, la quale possa ricevere tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$, a ciascun valore di t corrisponderà

un differente punto M, e tutti questi punti costituiranno un luogo geometrico, ossia una linea. Dunque l' espressione generale di una linea retta o curva è $OM \triangleq \varphi(t)$; nella funzione φ entreranno due o più rette conosciute di grandezza e posizione, e potrà pure entrare il ramuno. Nei casi speciali che la forma della funzione sia $OM \triangleq x + y\gamma^{v}$, oppure $OM \triangleq z\varepsilon^{u}$, essendo x, y, oppure z, u funzioni reali della t, la curva sarà riferita alle coordinate ortogonali oppure focali.

134. Immaginando che t sia il tempo, la predetta equipollenza $OM \triangleq \varphi(t)$ esprime il moto di un punto lungo una determinata curva e con determinata legge; sicchè cogli stessi calcoli studieremo anche le varie sorta di movimento. La scienza del moto (Cinematica dell' Ampère), considerato come un fatto senza badare alla causa, va ognora più associandosi alla scienza dell' estensione. Del resto noi potremo fare astrazione da ciò, e considerare una curva indipendentemente dal moto di un punto generatore.

135. I problemi intorno alle curve noi li risolveremo relativamente alla forma generale $OM \triangleq \varphi(t)$ senza attribuire a questa funzione una forma piuttostochè l' altra, e ci servirà un calcolo affatto simile all' algebrico senza alcun bisogno di ricorrere alle considerazioni della Geometria degli infinitesimi, od a quelle altre, forse più rigorose e certo più laboriose, che vi sostituiscono alcuni Matematici più Lagrangioni dello stesso Lagrange. Prima di venire alle generalità spero di riuscir più chiaro occupandomi di qualche caso particolare.

136. Cerchiamo le proprietà della curva espressa dall' equipollenza (1) $OM \triangleq t^2 . OA + t . OB$, dove OA, OB (Fig. 30ª) sono due rette determinate non parallele, e t è la variabile reale. Ponendo $t = 0$ vediamo che la curva passa pel punto O; ponendo $t = \pm\infty$ si scorge che la curva ha due rami infiniti, i quali sempre più si avvicinano al parallelismo colla retta OA (giacchè $t = \infty$ rende trascurabile $t . OB$ in confronto di $t^2 . OA$); quei rami non hanno assintoti, poichè ogni retta parallela alla OA è da essi tagliata. La curva dicesi parabola.

137. Se il punto M_1 della curva corrisponde a $t+\omega$ si ha $MM_1 \bumpeq OM_1 - OM \bumpeq 2t\omega . OA + \omega . OB + \omega^2 . OA$; diminuendo indefinitamente la ω, la MM_1 ha per limite una retta, che dicesi la tangente alla curva. La direzione della MM_1 è quella stessa della $MT \bumpeq MM_1 : \omega \bumpeq 2t . OA + OB + \omega . OA$, il cui limite corrispondente a ω infinitesima è

(2) $MT \bumpeq 2t . OA + OB$. Così si vede che nel punto O, corrispondente a $t=0$, la curva è tangente alla retta OB.

138. Per trovare il punto S in cui la tangente MT incontra la OA, osserviamo che $OS \bumpeq OM + MS$ dovrà essere un *multiplo* della OA (intendendo con ciò che dovrà essere equipollente alla OA moltiplicata per un numero reale intero o frazionario, positivo o negativo), il che esprime (§. 4) che il punto A appartiene alla retta OA; similmente MS dovrà essere un multiplo della $MT \bumpeq 2t . OA + OB$; quindi essendo $OM \bumpeq t^2 . OA + t . OB$ si vede a colpo d'occhio che, acciocchè nell'espressione di OS non entri la OB dev'essere $OS \bumpeq OM - t . MT \bumpeq - t^2 . OA$. La OM è composta-equipollente delle $OP \bumpeq t^2 . OM$, $PM \bumpeq t . OB$; perciò (3) $SO \bumpeq OP$, nota proprietà della tangente della parabola.

139. Tirando la MG, che formi colla tangente MT un angolo eguale alla inclinazione di questa MT sulla OA, una porzione della MG sarà espressa (§. 16) da

$MG \bumpeq g(MT)^2 : OA \bumpeq 4gt^2 . OA + 4gt . OB + g(OB)^2 : OA$, e sarà $OG \bumpeq OM + MG$. Se F è il punto della retta MG corrispondente a $g = -\frac{1}{4}$, si ha (4) $OF \bumpeq -(OB)^2 : 4OA$ che è indipendente da t; perciò nella parabola vi è un punto F (foco) tale che ogni raggio vettore FM forma colla tangente in M angolo eguale all'inclinazione di questa sul diametro OA.

140. Se un punto grave è lanciato nel vuoto il suo movimento viene espresso dall'equipollenza $OM \bumpeq t^2 . OA + t . OB$: la velocità corrispondente a tal moto è data in grandezza e direzione della $MT \bumpeq 2t . OA + OB$, che è la derivata della OM rispetto al tempo t. I calcoli del §. precedente danno

$FM \bumpeq (MT)^2 : 4OA$, la qual equipollenza significa che la velocità del punto grave è in ragion sudduplicata della sua distanza dal foco.

141. La retta (5) $NM \bumpeq t.OB + (OB)^2 : 2OA$ fa colla tangente $MT \bumpeq 2t.OA + OB$ un angolo eguale a quello che la OB forma colla OA (§. 16). Essendo $PM \bumpeq t.OB$ si ha (6) $PN \bumpeq -(OB)^2 : 2OA \bumpeq 2.OF$; cioè tirata dal piede P dell' ordinata una retta equipollente alla costante $2.OF$ si ha un punto della predetta retta MN. Se l' angolo AOB è retto, questa è la nota proprietà della sunnormale PN.

142. Mutando l'origine O possiamo giungere al caso dell'angolo AOB retto, il che rende i calcoli più semplici. Infatti se C è un punto della parabola, sicchè $OC \bumpeq c^2.OA + c.OB$ avremo $CM \bumpeq (t^2 - c^2)OA + (t-c)OB \bumpeq$
$\bumpeq (t-c)^2 OA + (t-c)(2c.OA + OB)$, equipollenza della stessa forma della $OM \bumpeq t^2.OA + t.OB$ (come riesce evidente mutando $t-c$ in t, e $2c.OA + OB$ in CB_1); e sarà sempre possibile dare a c tal valore che $2c.OA + OB$ sia perpendicolare ad OA. — Mutando t in at si possono inoltre render uguali le due rette che sono moltiplicate per t^2 e per t; sicchè prendendole per unità di lunghezza si può dare all' equipollenza della parabola la forma più semplice
(7) $CM \bumpeq t^2 + t\surd$. In questo caso il foco è dato da $CF \bumpeq 1:4$, la tangente in M dà (8) $MT \bumpeq 2t + \surd$, e la normale (9) $MN \bumpeq \frac{1}{2} - t\surd$ (Fig. 31ª).

143. Un punto qualunque R della normale è dato da $CR \bumpeq CM + 2p.MN \bumpeq t^2 + p + (t - 2pt)\surd$. Perchè questo R sia il punto d' intersezione della normale MN con quella ad essa infinitamente vicina, bisogna che il punto R non cangi quando a t si dia un accrescimento infinitesimo ω, e p soffra un corrispondente cangiamento ϖ. Secondo i principii del calcolo differenziale ciò si esprime con $dCR \bumpeq 0$, ossia $(2t + \surd - 2p\surd)\omega + (1 - 2t\surd)\varpi \bumpeq 0$; separando la parte moltiplicata per ramuno, questa equipollenza dà le due equazioni $2t\omega + \varpi = 0$, $(1-2p)\omega - 2t\varpi = 0$, se ne

deduce $2p = 4t^2 + 1$. Perciò (10) $CR \simeq \frac{1}{2} + 3t^2 - 4t^3 \gamma'$ è l' equipollenza dell' evoluta della parabola.

144. Il raggio di curvatura è dunque espresso in grandezza e direzione da $MR \simeq 2t^2 + \frac{1}{2} - (t + 4t^3)\gamma' \simeq$ $\simeq (1 + 4t^2)(\frac{1}{2} - t\gamma') \simeq (1 + 4t^2) MN$. La MN, essendo composta-equipollente di due rette perpendicolari, ha la lunghezza $\frac{1}{2}\sqrt{1 + 4t^2}$; perciò il raggio di curvatura MR è proporzionale al cubo della normale MN terminata all' asse della parabola. Se $ML \simeq \frac{1}{2} MR$, cioè se L è il punto di mezzo della MR, essendo $CF \simeq \frac{1}{4}$, sarà $FL \simeq CM + ML - CF \simeq$ $\simeq 2t^2 + (\frac{1}{2} - 2t^2) t\gamma'$, cioè perpendicolare alla $FM \simeq t^2 - \frac{1}{4} + t\gamma'$; quindi il raggio di curvatura è doppio della porzione ML di normale che è ipotenusa del triangolo MFL rettangolo nel ſoco F. Se la $MK \simeq LM$ si prende sulla prolungazione del raggio RM si ha

(11) $CK \simeq -\frac{1}{4} + \left(\frac{3t}{2} + 2t^3\right)\gamma'$, e perciò il punto K appartiene alla direttrice DK della parabola.

145. L' ellisse è espressa dall' equipollenza

(1) $OM \simeq x.OA + y.OB$ (Fig. 32ª), purchè le quantità reali x, y soddisſacciano all' equazione (2) $x^2 + y^2 = 1$, il che si può fare ponendo $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$. I due valori (positivo e negativo ma equivalenti) che riceve ciascuna variabile per ogni valore dell' altra mostrano che OA ed OB sono due diametri conjugati dell'ellisse. La direzione della tangente nel punto M è data da $dx.OA + dy.OB$, le dx, dy essendo tra loro legate dall' equazione $x dx + y dy = 0$, che è la derivata della $x^2 + y^2 = 1$. Perciò determineremo la direzione della tangente mediante la (3) $MT \simeq -y.OA + x.OB$, che si avrebbe tosto derivando la $OM \simeq \cos t.OA + \operatorname{sen} t.OB$ rispetto alla t. Questa MT incontra la retta OA nel punto S, che si determina unendo ad OM un *multiplo* di MT tale che sparisca il termine contenente OB; quindi

(4) $OS \simeq OM - \frac{y}{x} MT \simeq \left(x + \frac{y^2}{x}\right) OA \simeq \frac{1}{x} OA$; perciò se $OP \simeq x.OA$, (sicchè PM sia parallela ad OB) si ha $OP.OS \simeq (OA)^2$.

146. La $MN \bumpeq MT.OB:OA \bumpeq -y.OB + x(OB)^2:OA$ forma (§. 16) colla tangente l'angolo costante AOB; ora si ha (5) $ON \bumpeq OM + MN \bumpeq x.OA + x(OB)^2:OA \bumpeq x.A_1E$, essendo $OE \bumpeq (OB)^2:OA$, ed $A_1O \bumpeq OA$ (cioè essendo formato il triangolo BOE simile-dritto ad AOB). Ne viene inoltre $PN \bumpeq ON - OP \bumpeq x.OE$, ed il triangolo OPN è omotetico col triangolo costante A_1OE. — Quando OA, OB sono gli assi, la MN diventa la normale, ed essa taglia in rapporto costante l'ascissa OP.

147. Se $c^2 + d^2 = 1$, e (6) $OC \bumpeq c.OA + d.OB$, $OD \bumpeq -d.OA + c.OB$, questi OC, CD ognuno dei quali è parallelo (§. 145) alla tangente condotta nell'estremo dell'altro, sono due semidiametri conjugati dell'ellisse. Infatti se ne deduce $OA \bumpeq c.OC - d.OD$, $OB \bumpeq d.OC + c.OD$, e sostituendo $OM \bumpeq (cx + dy)OC + (cy - dx)OD$, equipollenza della stessa forma della $OM \bumpeq \cos t.OA + \operatorname{sen} t.OB$; giacchè è facile verificare che $(cx + dy)^2 + (cy - dx)^2 = 1$. La prima espressione del 12° canone (§. 57) dimostra immediatamente che le aree dei triangoli OCD, OAB sono tra loro uguali.

148. Per due qualisivogliano semidiametri conjugati ha luogo (§. 147) l'equipollenza $(OC)^2 + (OD)^2 \bumpeq (OA)^2 + (OB)^2$; perciò ponendo (7) $(OA)^2 + (OB)^2 \bumpeq (OF)^2$ determineremo due punti indipendenti dalla scelta dei diametri: questi osservabili punti F, F_1 sono i fochi dell'ellisse. L'equipollenza $(OA)^2 \bumpeq (OF - OB)(OF + OB)$, la quale mediante la $OF \bumpeq -OF_1$ si trasforma pel primo canone nella $(OA)^2 \bumpeq -BF.BF_1$, dimostra che *per qualunque punto* B *dell'ellisse i due raggi vettori* BF, BF_1 *formano angoli eguali colla tangente della curva, ed il loro prodotto eguaglia il quadrato del semidiametro* OA *parallelo a tal tangente.*

149. Il problema dati due semidiametri conjugati dell'ellisse trovarne i fochi è direttamente risolto dalla nostra equipollenza (7). La si può costruire in più maniere. Determinata la OE (§. 146) si ha $(OF)^2 \bumpeq OA(OA + OE) \bumpeq A_1O.A_1E$; perciò l'eccentricità OF sarà media proporzionale tra OA ed

A_1E, e sarà parallela alla retta dimezzante l'angolo OA_1E. — Oppure osservando che $(OF)^2 \triangleq (OB + \gamma^{\prime}.OA)(OB - \gamma^{\prime}.OA)$ basterà condurre le BK, BK_1 perpendicolari ed uguali al semidiametro OA, e sarà $OF \triangleq \pm \sqrt{OK.OK_1}$, quindi l'eccentricità è media proporzionale anche tra le OK, OK_1, e ne dimezza l'angolo.

150. Sopra una delle OK, OK_1 si prenda $OL \triangleq y.OK \triangleq y(OB + BK)$, sarà $LM \triangleq x.OA - y.BK \triangleq \triangleq (x - y\gamma^{\prime})OA$. Ora la $x - y\gamma^{\prime}$, a motivo di $x^2 + y^2 = 1$, esprime una retta eguale all' unità, perciò LM è uguale ad OA. La LM si prolunghi fino ad incontrare la OA in I; bisognerà adunque unire alla $OL \triangleq y(OH + HK)$ un tal multiplo della $LM \triangleq x.OA - y.BK$ che OI abbia la stessa direzione della OA, cioè della OH; e siccome le HK, BK hanno egual direzione, così la LI si otterrà moltiplicando LM pel rapporto numerico HK : BK; (sicchè $OI \triangleq y.OH + + x.OA.HK : BK$). Essendosi or ora trovato che $\mathrm{gr}\, LM = \mathrm{gr}\, OA = \mathrm{gr}\, BK$ ne viene che $\mathrm{gr}\, LI = \mathrm{gr}\, HK$; perciò *l' ellisse è descritta dal punto* M *della retta* IL *di costante lunghezza, che si muove tra le rette fisse* OA, OK.

151. Nel movimento espresso dall' equipollenza $OM \triangleq \cos t.OA + \mathrm{sen}\, t.OB$ la velocità è data in grandezza e direzione dalla prima derivata, rispetto al tempo t, $MT \triangleq - \mathrm{sen}\, t.OA + \cos t.OB$. La seconda derivata è $- \cos t.OA - \mathrm{sen}\, t.OB \triangleq MO$, questa essendo la derivata della velocità può dirsi la *turbazione del movimento*, ed essa eguaglia in direzione e grandezza ciò che dicesi *forza acceleratrice*. La precedente equipollenza mostra che la turbazione del supposto movimento è espressa dal semidiametro dell' ellisse; sicchè il moto è quello stesso di un punto attratto dal centro in ragione diretta della distanza.

152. Ricordando le formule del §. 92 non vi sarà chi non veda che l'equipollenza dell' ellisse (§. 145) può scriversi sotto la forma $OM \triangleq \frac{OA - \gamma^{\prime}.OB}{2} \varepsilon^{t} + \frac{OA + \gamma^{\prime}.OB}{2} \varepsilon^{-t}$,

ossia, colla costruzione del §. 150, sotto la forma

$\mathrm{OM} \doteq \frac{1}{2\sqrt{}} \mathrm{OK} . \varepsilon^t + \frac{\sqrt{}}{2} \mathrm{OK}_1 . \varepsilon^{-t}$. I due termini del secondo membro esprimono due moti circolari coi raggi $\frac{1}{2}$ OK, $\frac{1}{2}$ OK$_1$ eseguiti con eguali velocità ma in verso opposto, come è indicato dall'opposizione di segno degli esponenti di ε^t, ε^{-t}; perciò l'ellisse può descriversi colla composizione di due movimenti circolari; ne viene che essa è un'ipocicloide.

153. In simil modo se un moto rettilineo si componga con uno circolare uniforme al primo, si avrà (prendendo le costanti nel modo, che in seguito tornerà più opportuno)
(1) $\mathrm{OM} \doteq t - \sqrt{}\,\varepsilon^t$. La curva M può supporsi generata da un punto di un circolo di raggio $= 1$, che si muove sulla circonferenza nel mentre che il centro percorre una retta d'inclinazione nulla, e siccome l'intera rotazione del punto mobile è compiuta quando $t = 2\pi$, così è facile vedere che la curva è la cicloide ordinaria.

154. Per determinare la tangente della cicloide ci occorre conoscere la derivata rispetto a t di $\varepsilon^t \doteq e^{t\sqrt{}}$. L'Algebra degli immaginarii c'insegna che tal derivata è $\sqrt{}\,e^{t\sqrt{}} \doteq \sqrt{}\,\varepsilon^t$. Se vorremo una dimostrazione geometrica supporremo che nel circolo espresso da $\mathrm{CM} \doteq \varepsilon^t$, t riceva l'accrescimento ω, la corda corrispondente MM$_1$ divisa per ω, cioè per la lunghezza del corrispondente archetto del circolo di raggio $= 1$, dà MM$_1 : \omega$, il cui limite corrispondente ad ω infinitesimo sarà una retta eguale ad uno e perpendicolare al raggio CM; dunque la derivata di $\mathrm{CM} \doteq \varepsilon^t$ è la stessa ε^t moltiplicata pel ramuno.

155. La tangente della cicloide è data in direzione dalla derivata della (1), cioè da (2) $\mathrm{MT} \doteq 1 + \varepsilon^t$, e la normale ha la direzione $\mathrm{MN} \doteq \sqrt{} + \sqrt{}\,\varepsilon^t$. Ne viene $\mathrm{ON} \doteq t + \sqrt{}$; e siccome $\mathrm{OC} \doteq t$ determina (Fig. 33^a) la posizione variabile del centro C del circolo generatore, così la normale passa

per l' estremo dcl raggio $CN \bumpeq \gamma\surd$ perpendicolare sulla base DB. Si vede che tal proprietà della cicloidc si è trovata in maniera affatto spontanea; il calcolo sarà un poco meno facile se cercheremo dove la tangente MT incontri la retta NCQ. A tal uopo porremo $OQ \bumpeq t - q\gamma\surd \bumpeq OM + p \,.\, MT \bumpeq$ $\bumpeq t + p + (p - \gamma\surd)\,\varepsilon^t$, essendo q, p due quantità reali che rimangono da determinarsi mediante le due equazioni, nella quale si decompone quell' equipollenza separando la parte reale dall' immaginaria: $t = t + p + p \cos t + \operatorname{sen} t$, $-q = p \operatorname{sen} t - \cos t$. Queste equazioni danno $q = 1$, e perciò la tangente MT taglia il circolo generatore nel punto Q diametralmente opposto ad N. (Cosa evidente.)

156. La derivata della velocità MT è la (3) $\gamma\surd\varepsilon^t \bumpeq MC$; questa è la *turbazione* del movimento espressa dalla (1); ossia in altre parole il punto M che si muove per la cicloide secondo quella legge può considerarsi come attratto con forza costante dal centro mobile C del circolo generatore.

157. Se come al §. 143 cerchiamo quel punto R della normale MN, in cui essa incontra la normale infinitamente vicina, dobbiamo uguagliare a zero la derivata di $OR \bumpeq t - \gamma\surd\varepsilon^t + p\gamma\surd(1 + \varepsilon^t)$, cioè $(1 + \varepsilon^t - p\varepsilon^t)\,dt +$ $+ \gamma\surd(1 + \varepsilon^t)\,dp \bumpeq 0$; considerandovi $dt : dp$ come un rapporto affatto arbitrario, si scorge che il prodotto $(1 + \varepsilon^t - p\varepsilon^t)\,\mathrm{cj}\,(\gamma\surd + \gamma\surd\varepsilon^t) \bumpeq -\gamma\surd - \gamma\surd\varepsilon^t + p\gamma\surd\varepsilon^t - \gamma\surd\varepsilon^{-t} - \gamma\surd + p\gamma\surd$ dev' essere identico al proprio conjugato, perciò $p = 2$. Dunque il raggio di curvatura MR è doppio della normale MN. Il luogo di tutti i centri R, cioè l' evoluta è data dall' equipollenza (4) $OR \bumpeq 2\gamma\surd + t + \gamma\surd\varepsilon^t$; essa è quindi una cicloide eguale alla primitiva $OM \bumpeq t - \gamma\surd\varepsilon^t$; i raggi dei circoli generatori in M ed in R sono $-\gamma\surd\varepsilon^t$, $\gamma\surd\varepsilon^t$, vale a dire paralleli, ma diretti oppostamente.

158. Da ogni punto M della cicloide si tiri la retta MS che formi col raggio di curvatura MR un dato angolo α, ed abbia con esso un dato rapporto a, cioè sia $MS \bumpeq a\varepsilon^{\alpha} \,.\, MR$, e si cerchi il luogo di tutti i punti S. Si ha tosto

(5) $OS \simeq t - \gamma^{\nu}\varepsilon^{t} + 2a\gamma^{\nu}\varepsilon^{\alpha}(1+\varepsilon^{t}) \simeq 2a\gamma^{\nu}\varepsilon^{\alpha} + t + (2a\varepsilon^{\alpha} - 1)\gamma^{\nu}\varepsilon^{t}$;
il che mostra che anche la curva S è generata dalla composizione del moto progressivo espresso dal termine t col moto rotatorio di raggio costante $2a\varepsilon^{\alpha} - 1$. Perciò la curva S è una cicloide, che è ordinaria ogniqualvolta sia $\mathrm{gr}(2a\varepsilon^{\alpha} - 1) = 1$, cioè (§. 52) $(2a\varepsilon^{\alpha} - 1)(2a\varepsilon^{-\alpha} - 1) \simeq 1$, ossia (§. 92) $a = \cos\alpha$; nel qual caso la curva S è l' evoluta imperfetta della M.

159. Come altra applicazione del nostro metodo e della maniera molto semplice di esprimere una cicloide ricerchiamo la trajettoria ortogonale di tutte le posizioni che prende la cicloide muovendosi parallelamente alla sua base. Queste infinite cicloidi sono espresse da (6) $OM \simeq \tau + t - \gamma^{\nu}\varepsilon^{t}$, essendo τ il parametro di posizione che distingue l' una dall' altra le cicloidi eguali. La (6) esprimerà anche la cercata trajettoria quando t sia tale funzione di τ, che individui in ciascuna cicloide il punto, in cui è tagliata dalla trajettoria. La tangente della trajettoria sarà perciò espressa dalla derivata della (6) presa rispetto a t, questa derivazione noi la segneremo colla caratteristica d, e la tangente $d\tau + 1 + \varepsilon^{t}$ dovrà poi (per la condizione della trajettoria ortogonale) essere perpendicolare alla tangente $1 + \varepsilon^{t}$ (§. 155) di ciascuna cicloide. Quindi $d\tau + 1 + \varepsilon^{t}$ dev' essere parallela a $\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\varepsilon^{t}$, cioè
$(d\tau + 1 + \varepsilon^{t})(-\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}\varepsilon^{-t}) \simeq -(1+\varepsilon^{-t})\gamma^{\nu}d\tau - 2\gamma^{\nu} - \gamma^{\nu}(\varepsilon^{t} + \varepsilon^{-t})$
dev' essere equipollente alla propria conjugata, il che dà $d\tau = -2$, onde $\tau = c - 2t$. Perciò tutte le cercate trajettorie ortogonali sono espresse da $OM \simeq c - t - \gamma^{\nu}\varepsilon^{t}$, cioè sono altre cicloidi uguali alle proposte ed aventi le basi sulla AQP.

160. La definizione geometrica della lunghezza dell' arco curvilineo AM si è il limite della somma delle corde infinitesime (cioè diminuentesi oltre ogni quantità) in esso inscritte; perciò la derivata di quella lunghezza sarà il limite del rapporto della corda MM_1 al corrispondente accrescimento della t,

cioè sarà precisamente la lunghezza della MT data dalla (2) del §. 155. Dunque la derivata dell' arco di cicloide è (§. 52)

$$\mathrm{d}s = \mathrm{gr\,MT} = \sqrt{(1+\varepsilon^t)(1+\varepsilon^{-t})} = \varepsilon^{\frac{t}{2}} + \varepsilon^{-\frac{t}{2}} = 2\cos\frac{t}{2},$$

e contando l' arco dal punto A corrispondente a $t=0$ si ha $s = \mathrm{AM} = 4\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2}$, ed $\mathrm{AMB} = 4$.

161. Si trova che l' area σ del triangolo mistilineo APM limitato dall' arco AM e dall' ordinata PM ha per derivata il doppio del triangolo MPT, cioè pel 12° canone

$\mathrm{d}\sigma = \frac{\gamma^\nu}{2}(\mathrm{MP}.\mathrm{cj\,MT} - \mathrm{cj\,MP}.\mathrm{MT})$. Nel nostro caso la distanza del punto M dalla OC è $\frac{1}{2}(\mathrm{OM} - \mathrm{cj\,OM}) \triangleq$ $\triangleq -\frac{\gamma^\nu}{2}(\varepsilon^t + \varepsilon^{-t})$, perciò $\mathrm{MP} \triangleq -\gamma^\nu + \frac{\gamma^\nu}{2}(\varepsilon^t + \varepsilon^{-t})$; e quindi $\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(\varepsilon^{2t} + \varepsilon^{-2t}) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$, la cui retroderivata è $\sigma = \mathrm{APM} = \frac{t}{2} - \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2t$.

162. Con questi pochi esempii spero aver mostrato come il metodo delle equipollenze si applichi anche allo studio delle curve, e queste possano essere espresse da equipollenze di forme differenti dalle due $\mathrm{OM} \triangleq x + y\gamma^\nu$, $\mathrm{OM} \triangleq z\varepsilon^u$, corrispondenti ai due sistemi di coordinate, che sogliono adoperarsi nella Geometria analitica. Così l' equipollenza della cicloide (§. 153) è certamente più semplice di ogni altra sua espressione, e quindi conduce più brevemente alla risoluzione dei problemi. — Ora noi risolveremo i principali problemi relativi alle curve lasciando all' equipollenza (§. 133) $\mathrm{OM} \triangleq \phi(t)$ tutta la sua generalità.

163. Problema. *Trovare l' evoluta di una data curva* M. Prendendo le derivate rispetto alla variabile reale t, di cui la OM si suppone funzione, sarà (1) $\mathrm{MT} \triangleq \mathrm{dOM}$ la retta tangente alla curva nel punto M. Per maggiore speditezza ommetteremo nelle derivate il punto O che è fisso, e scriveremo dM in luogo di dOM. Un punto qualunque della normale è

perciò dato da (2) $MR \bumpeq \frac{\gamma}{\lambda} dM$, essendo λ un coefficiente reale arbitrario. — L'evoluta come l'inviluppo di tutte le normali sarà data da $OR \bumpeq OM + \frac{1}{\lambda}\gamma . dM$, purchè la λ sia tal funzione della t, che la MR riesca tangente all' evoluta nel punto R; perciò la

$dR \bumpeq dM + \frac{1}{\lambda}\gamma . d^2M - \frac{d\lambda}{\lambda^2}\gamma . dM$ dev'essere parallela a $\gamma . dM$. Moltiplicando per $cj\, dM$ si vede che

$dM . cj\, dM + \frac{1}{\lambda}\gamma\, cj\, dM . d^2M$ dev' essere parallela a γ; quindi sommandovi la sua conjugata sarà

$2 . dM . cj\, dM + \frac{1}{\lambda}\gamma\,(cj\, dM . d^2M - dM . cj\, d^2M) \bumpeq 0$. Sostituendo nella (2) si ha pel raggio di curvatura l' espressione

$$(3) \qquad MR \bumpeq \frac{2\,(dM)^2\, cj\, dM}{dM . cj\, d^2M - cj\, dM . d^2M}.$$

164. Invece di adoperare questa (3) potrà riuscir comodo di decomporre $d^2M : dM$ nelle sue parti reale ed immaginaria, cioè porre (4) $\frac{d^2M}{dM} \bumpeq l + \lambda\gamma$; e siccome questa supposizione rende identica la precedente

$2 + \frac{\gamma}{\lambda}\left(\frac{d^2M}{dM} - \frac{cj\, d^2M}{cj\, dM}\right) \bumpeq 0$, così si vede che il valore di λ da sostituirsi nella (2) è precisamente quello dato dalla (4).

165. Applichiamo la (3) al caso che la curva M sia riferita alle solite coordinate ortogonali, cioè abbiasi $OM \bumpeq x + y\gamma$, le x, y essendo funzioni della variabile t, rispetto alla quale si prendono le derivate segnate colla caratteristica d. I valori di $dM \bumpeq dx + dy\,\gamma$, $cj\, dM \bumpeq dx - dy\,\gamma$, ecc. sostituiti nella (3) danno tosto

$$(5) \quad MR \bumpeq \frac{2\,(dx^2 + dy^2)(dx + \gamma dy)}{2\,(dy\, d^2x - dx\, d^2y)\gamma} \bumpeq \frac{(dx^2 + dy^2)(dy - \gamma dx)}{dy\, d^2x - dx\, d^2y}.$$

Così è pienamente determinata la posizione del centro di curvatura R, e per la grandezza del raggio MR si ha

$\pm (dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}} : (dy\, d^2x - dx\, d^2y)$.

166. Un secondo esempio ce lo dia la curva espressa da $OM \bumpeq e^{at}\,\varepsilon^{t}$, che è una spirale logaritmica, perchè il logaritmo del raggio vettore $\mathrm{gr}\,OM = e^{at}$ è proporzionale all' azimutto $\mathrm{inc}\,OM = t$. Prendendo le derivate rispetto alla t sarà $dM \bumpeq (a + \gamma^{\nu})\, e^{at}\,\varepsilon^{t}$, $d^2M \bumpeq (a + \gamma^{\nu})^2\, e^{at}\,\varepsilon^{t}$; quindi la (4) dà $l + \lambda\gamma^{\nu} \bumpeq a + \gamma^{\nu}$, cioè $\lambda = 1$, e per la (2) si ha $MR \bumpeq (a\gamma^{\nu} - 1)\, e^{at}\,\varepsilon^{t}$. L' evoluta data dalla $OR \bumpeq OM + MR \bumpeq a\gamma^{\nu}\, e^{at}\,\varepsilon^{t}$ è una spirale logaritmica eguale alla M.

167. La decomposizione adoperata nel §. 164 può costruirsi geometricamente: oltre la $MT \bumpeq dM$, abbiasi (Fig. 34ª) la $MU \bumpeq d^2M$, e si tiri UL perpendicolare su MT, sarà $LU \bumpeq \lambda\gamma^{\nu}.MT$, e quindi la (2) ci darà (6) $MR \bumpeq (MT)^2 : UL$. Così, per esempio, nell' ellisse espressa da $OM \bumpeq \cos t\,.\,OA + \mathrm{sen}\, t\,.\,OB$ la $MT \bumpeq -\mathrm{sen}\, t.OA + \cos t.OB$ è equipollente al semidiametro ON conjugato ad OM, e la $MU \bumpeq -OM$ mostra che U cade nel centro O dell' ellisse. Perciò il centro di curvatura R potrà determinarsi innalzando le perpendicolari MR, Tv e tirando TR perpendicolare ad Mv. — Nella supposizione che la curva sia generata dal moto del punto M, t essendo il tempo, MT è la velocità, ed MU (§. 151) la *turbazione* del movimento; perciò il raggio di curvatura è uguale al quadrato della velocità diviso per quella componente della turbazione, che è perpendicolare alla velocità (forza centrifuga).

168. Oltre le espressioni $OM \bumpeq x + y\gamma^{\nu}$, $OM \bumpeq z\,\varepsilon^{u}$ merita speciale considerazione la (7) $OM \bumpeq \int \varepsilon^{\phi}\, ds$, ove ϕ (inclinazione della tangente) è funzione della s, oppure (il che torna lo stesso) ambedue sono funzioni della variabile indipendente t. La predetta espressione dà $d^2M \bumpeq (d^2 s + \gamma^{\nu}\, d\phi\, ds)\,\varepsilon^{\phi}$; e per la (4) si ha $l + \lambda\gamma^{\nu} \bumpeq \frac{d^2 s}{ds} + \gamma^{\nu}\, d\phi$, ed il raggio di curvatura è espresso da (8) $MR \bumpeq \gamma^{\nu}\frac{ds}{d\phi}\,\varepsilon^{\phi}$.

169. Problema. *Determinare l' ordine del contatto di due curve, e trovare il circolo osculatore di una curva data.* Le due curve sieno espresse da $OM \bumpeq F(t)$, $ON \bumpeq f(u)$, e la u sia funzione indeterminata della t, la quale riceva uno speciale valore che renda $OM \bumpeq ON$, cioè M sia punto comune alle due curve. Attribuiamo alla t l'accrescimento infinitesimo ω, e determiniamo la u funzione della t in guisa che

$M'N' \bumpeq ON' - OM' \bumpeq \omega^{n+1}.OP$ sia la più piccola possibile (essendo OP una retta finita), il numero n sarà l' ordine del contatto. Ordinariamente n è un numero intero, perchè all' accrescimento ω corrispondono

$$OM' \bumpeq OM + \omega.dM + \frac{\omega^2}{2}.d^2M + \text{ec.}, \qquad ON' \bumpeq ON + \text{ec.}$$

$M'N' \bumpeq \omega(dN - dM) + \frac{\omega^2}{2}(d^2N - d^2M) + \text{ec.}$ Così il contatto è almeno del 2° ordine quando si possano soddisfare le tre equipollenze $OM \bumpeq ON$, $dM \bumpeq dN$, $d^2M \bumpeq d^2N$.

170. Ci servano di esempio la parabola $OM \bumpeq t^2 + t\gamma^{\nu}$ ed il circolo $ON \bumpeq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\gamma^{\nu} + (1 - \gamma^{\nu})(1 - \varepsilon^u)$, che hanno un punto comune corrispondente a $t = \frac{1}{2}$, $u = 0$; poscia la $dM \bumpeq dN$ dà $2t + \gamma^{\nu} \bumpeq -(\gamma^{\nu} + 1)\varepsilon^u du$, che rimane soddisfatta da $du = -1$. Anche la $d^2M \bumpeq d^2N$, ossia $2 \bumpeq -(\gamma^{\nu} + 1)(d^2u + \gamma^{\nu} du^2)\varepsilon^u$ resta soddisfatta da $d^2u = -1$. Nol potrebbe poi essere la $d^3M \bumpeq d^3N$, qualunque fosse il valor reale di d^3u. Dunque il contatto tra la parabola ed il circolo è del 2° ordine.

171. Se si avessero a paragonare due movimenti, anzichè due curve, sarebbe data u in funzione di t, e quindi l' *accostamento* dei due movimenti potrebbe essere minore di quello delle curve. Così il movimento parabolico dei gravi cadenti espresso da $OM \bumpeq t^2 + t\gamma^{\nu}$, ed il movimento circolare uniforme espresso da $ON \bumpeq \frac{5}{4} - \frac{1}{2}\gamma^{\nu} + (\gamma^{\nu} - 1)\varepsilon^{\frac{1}{2} - t}$ danno per $t = \frac{1}{2} + \omega$, $M'N' \bumpeq -(1 + \gamma^{\nu})\frac{\omega^2}{2}$; perciò l' accostamento dei due movimenti è soltanto del 1° ordine.

172. Coi principii ora stabiliti ci sarà facile determinare il circolo osculatore di una data curva in un suo punto M: se R ne è il centro, il circolo è espresso dall'equipollenza $ON \stackrel{\frown}{=} OR + \varepsilon^u . RM$; nel prendere le derivate bisogna considerare OR, RM come costanti, perlochè è $dN \stackrel{\frown}{=} \gamma^\nu \varepsilon^u du . RM$, $d^2N \stackrel{\frown}{=} (\gamma^\nu d^2 u - du^2)\varepsilon^u . RM$, nelle quali dobbiamo fare $u = 0$, questo essendo il valore che fa coincidere N con M. Perchè il contatto sia del 2° ordine dovrà essere $dM \stackrel{\frown}{=} \gamma^\nu du . RM$, $d^2M \stackrel{\frown}{=} (\gamma^\nu d^2 u - du^2) . RM$. Dividendole l' una per l' altra, la (4) del §. 164 ci dà $l + \lambda\gamma^\nu \stackrel{\frown}{=} \frac{d^2 u}{du} + \gamma^\nu du$; sicchè $\lambda = du$, e la $dM \stackrel{\frown}{=} \gamma^\nu du . RM$ è identica colla (2) del §. 163.

173. L' inviluppo di tutte le rette MS, che fanno colle tangenti $MT \stackrel{\frown}{=} dM$ l' angolo costante α si trova collo stesso processo del §. 163 ponendo $MS \stackrel{\frown}{=} p\varepsilon^\alpha . dM$, poscia determinando p in guisa che dS sia parallela alla stessa MS. Così si trova (9) $MS \stackrel{\frown}{=} \operatorname{sen}\alpha \frac{\varepsilon^\alpha}{\gamma^\nu} MR$; nota relazione dei punti S dell' evoluta imperfetta ai punti R dell' evoluta propriamente detta.

174. Problema. *Determinare la curva* P *parallela alla data* M, *cioè che ha con essa comuni tutte le normali* MP. Il punto P appartendo alla normale della data curva nel punto M sarà $OP \stackrel{\frown}{=} OM + p\gamma^\nu . dM$; inoltre la tangente in P, che è determinata in direzione da $dP \stackrel{\frown}{=} dM + p\gamma^\nu . d^2M + \gamma^\nu dp . dM$, dev' essere parallela alla tangente dM. Moltiplicando per cj dM avremo $p\gamma^\nu . \text{cj}\, dM . d^2M + \gamma^\nu dp . dM . \text{cj}\, dM$ parallela a $dM . \text{cj}\, dM$, cioè d' inclinazione nulla, e quindi equipollente alla propria conjugata $-p\gamma^\nu . dM . \text{cj}\, d^2M - \gamma^\nu dp . dM . \text{cj}\, dM$. Ne viene $-\frac{2\,dp}{p} = \frac{d^2M}{dM} + \text{cj}\frac{d^2M}{dM}$, e retroderivando sarà $p = c : \sqrt{dM . \text{cj}\, dM}$. Quindi la distanza delle due curve è (10) $MP \stackrel{\frown}{=} c\gamma^\nu \sqrt{dM : \text{cj}\, dM}$, vale a dire di grandezza costante, e le curve sono veramente parallele. Colla posizione (4) del §. 164 si ha $p = c\, e^{-\int l\, dt}$.

175. Questi calcoli sarebbero riusciti più spediti ponendo (§. 168) (7) $\mathrm{d}M \bumpeq \varepsilon^{\varphi}\mathrm{d}s$. Supponiamo più generalmente che la MP formi colla tangente dM un angolo costante a, sarà $OP \bumpeq OM + p\varepsilon^{a+\varphi}\mathrm{d}s$, e se la tangente
$\mathrm{d}P \bumpeq \varepsilon^{\varphi}\mathrm{d}s + p\varepsilon^{a+\varphi}(\mathrm{d}^2s + \gamma^{\nu}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\varphi) + \varepsilon^{a+\varphi}\mathrm{d}p\,\mathrm{d}s$ debba esser parallela alla dM sarà $p\varepsilon^{a}(\mathrm{d}^2s + \gamma^{\nu}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\varphi) + \varepsilon^{a}\mathrm{d}p\,\mathrm{d}s =$
$= p\varepsilon^{-a}(\mathrm{d}^2s - \gamma^{\nu}\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\varphi) + \varepsilon^{-a}\mathrm{d}p\,\mathrm{d}s$; la retroderivata di questa equazione dà $p\,\mathrm{d}s = c\,a^{-\varphi}$, essendo c la costante arbitraria, ed $a = e^{\cot a}$; perciò (11) $MP \bumpeq c\,a^{-\varphi}\varepsilon^{a+\varphi}$. Dunque tutte le rette MP, che sono tagliate sotto un uguale e costante angolo dalle due curve M, P, sono rispettivamente equipollenti ai raggi vettori di una spirale logaritmica (§. 166) che li taglia sotto quel medesimo angolo.

176. Problema. *Determinare le sviluppanti di una data curva* M, *cioè le trajettorie ortogonali delle sue tangenti* MT. Diciamo T il punto della cercata trajettoria, e poniamo
$OT \bumpeq OM + q.\mathrm{d}M$; la tangente della curva T è data da $\mathrm{d}T \bumpeq (1 + \mathrm{d}q)\mathrm{d}M + q\,\mathrm{d}^2M$, e dev' essere perpendicolare a dM; quindi colla solita supposizione (4) $\mathrm{d}^2M : \mathrm{d}M \bumpeq l + \lambda\gamma^{\nu}$ sarà $1 + \mathrm{d}q + ql = 0$, e quindi

(12) $MT \bumpeq -e^{-\int l\,\mathrm{d}t}.\int e^{\int l\,\mathrm{d}t}\mathrm{d}t.\mathrm{d}M$.

177. I calcoli sono più brevi se l'equipollenza della curva M sia data sotto la forma (7), allora, posto $MT \bumpeq q\varepsilon^{\varphi}$, sarà $\mathrm{d}T \bumpeq \varepsilon^{\varphi}(\mathrm{d}s + \mathrm{d}q) + q\gamma^{\nu}\varepsilon^{\varphi}\mathrm{d}\varphi$ perpendicolare a ε^{φ}, cioè dovrà essere $\mathrm{d}s + \mathrm{d}q = 0$, retroderivando si ha $q = c - s$, e quindi (13) $MT \bumpeq (c - s)\varepsilon^{\varphi}$. — Ci sarà facile dimostrare che la sviluppante T ha per evoluta la curva M. Infatti abbiamo $\mathrm{d}T \bumpeq (c - s)\gamma^{\nu}\varepsilon^{\varphi}\mathrm{d}\varphi$, e (supposto per brevità $\mathrm{d}\varphi$ costante) $\mathrm{d}^2T \bumpeq (s - c)\varepsilon^{\varphi}\mathrm{d}\varphi^2 - \gamma^{\nu}\varepsilon^{\varphi}\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}s$, e perciò la (4) (§. 164) dà, rispetto alla curva T, $\lambda = \mathrm{d}\varphi$, ed il raggio di curvatura in T è $\frac{1}{\lambda}\gamma^{\nu}\mathrm{d}T \bumpeq (s - c)\varepsilon^{\varphi} \bumpeq TM$.

178. Applichiamo le precedenti formule allo sviluppo del circolo di raggio uno $OR \bumpeq \varepsilon^{\phi}$ (Fig. 35ª); la derivata del suo arco è $ds = d\phi$, ossia all' equipollenza si può dare la forma $OR \bumpeq \gamma' \int \varepsilon^{\phi} d\phi$, perciò la sviluppante del circolo è espressa da $OM \bumpeq (1 - \phi\gamma')\varepsilon^{\phi}$. Per trovare la seconda sviluppante BT diamo all'equipollenza della prima sviluppante AM la forma $OM \bumpeq \int \varepsilon^{\phi} \phi\, d\phi$; così ora avremo $ds = \phi\, d\phi$, e $MT \bumpeq (c - \frac{1}{2}\phi^2)\varepsilon^{\phi}$, quindi
$OT \bumpeq (1 + c - \phi\gamma' - \frac{1}{2}\phi^2)\varepsilon^{\phi} \bumpeq \gamma' \int \varepsilon^{\phi}(c - \frac{1}{2}\phi^2) d\phi$. Il raggio di curvatura della BT in T è $c - \frac{1}{2}\phi^2$, quello della sua evoluta M è ϕ, e quello della R è $= 1$.

179. Problema. *Determinare la direzione della retta* MW, *che partendo dal punto* M *di una curva taglia per metà la corda infinitamente vicina e parallela alla tangente in* M, *e trovare la parabola che ha colla curva un contatto del* 3° *ordine.* (Questo è l' ultimo problema della *Géomètrie de Position*, io lo risolsi nel §. 25 del mio Saggio (1835) prima del Transon (1841) e del Dupin (1848)). Se N, L sono i due punti della curva corrispondente a $t + \omega$ ed a $t - \psi$ si ha
$ON \bumpeq OM + \omega\, dM + \frac{\omega^2}{2} d^2M + \text{ec.}$, $OL \bumpeq OM - \psi\, dM + \text{ec.}$,
$LN \bumpeq (\omega + \psi)\, dM + \frac{1}{2}(\omega^2 - \psi^2)\, d^2M + \frac{1}{6}(\omega^3 + \psi^3)\, d^3M + \text{ec.}$;
e perchè questa corda sia parallela alla tangente dM, bisognerà che lo sia pure la $3(\omega - \psi)\, d^2M + (\omega^2 - \omega\psi + \psi^2)\, d^3M$ (che moltiplicata per la quantità reale $\frac{1}{6}(\omega + \psi)$ e composta colla $(\omega + \psi)\, dM$ dà la LN). Dovendo essere ω, ψ infinitesime, bisognerà che $\omega - \psi$ sia infinitesima del 2° ordine come lo è $\omega^2 - \omega\psi + \psi^2 = \omega^2$. Posto $\omega - \psi = q\omega^2$ dovremo determinare la quantità reale q in modo che

(14) $3q \,.\, d^2M + d^3M \bumpeq r \,.\, dM$, essendo anche r reale;

dopo di che la direzione della retta che da M va al punto di mezzo della LN sarà data da

$$MN + ML \bumpeq (\omega - \psi)\, dM + \tfrac{1}{2}(\omega^2 + \psi^2)\, d^2M,$$

ossia dalla (15) $MW \bumpeq q \,.\, dM + d^2M$.

180. Una parabola che nel punto M abbia colla data curva un contatto del 3° ordine possiamo esprimerla con
$MN \bumpeq y . MT + \frac{y^2}{2} MW$, essendo N il punto generico della parabola, MT la sua tangente, MW la direzione del diametro (§. 179), ed y la variabile, da cui dipendono i varii punti della parabola. Perchè tra la data curva M e la parabola N abbia luogo un contatto del 3° ordine bisogna (§. 169) che per la y possa prendersi tale funzione della t, che $y = 0$ renda
$dM \bumpeq dy . MT + y dy . MW$, $d^2M \bumpeq d^2y . MT + (y d^2y + dy^2) MW$,
$d^3M \bumpeq d^3y . MT + (y d^3y + 3 dy d^2y) MW$, nei cui secondi membri le rette MT, MW si considerano come fisse. Perciò ritenuto che sia $MT \bumpeq dM$, quando $y = 0$ dovrà essere $dy = 1$, poscia (15) $d^2M \bumpeq -q . dM + MW$, essendo $-q$ il valore che prende d^2y quando $y = 0$, e finalmente
$d^3M \bumpeq d^3y . dM - 3q . MW$, e sostituendo in questa il valore di MW dato dalla (15) sarà
(14) $d^3M + 3q . d^2M \bumpeq (d^3y - 3q^2) dM$, la qual equipollenza servirà a determinare q per poscia sostituirla nella $MW \bumpeq q . dM + d^2M$. Si vede adunque che questa MW è quella stessa del §. precedente.

181. Per prima applicazione cerchiamo la parabola che ha un contatto del 3° ordine colla sviluppante del circolo espressa (§. 178) da $OM \bumpeq \int \varepsilon^{\phi} \bar{\varphi} \, d\bar{\varphi}$. Posto per brevità $d\bar{\varphi} = 1$, cioè prese le derivate rispetto alla $\bar{\varphi}$, per la (14) dovremo rendere $3q (1 + \bar{\varphi} \gamma^{\nu}) + (2\gamma^{\nu} - \bar{\varphi})$ reale, perciò sarà $q = -\frac{2}{3\phi}$, e sostituendo nella (15) avremo
$MW \bumpeq (\frac{1}{3} + \bar{\varphi} \gamma^{\nu}) \varepsilon^{\phi}$. Dunque (Fig. 35ª) se il raggio di curvatura $OR = 1$ dell' evoluta AR si prolunghi di
$RW \bumpeq \frac{1}{3} OR$, la retta MW dimezzerà la corda della curva AM che è parallela ed infinitamente vicina alla tangente nel punto M. Questa relazione tra il raggio di curvatura MR, quello RO della sua evoluta, e la direzione della retta MW sussiste per qualsiasi curva M. Se questa è una conica, MW ne è un diametro, così si ha un modo facile di costruire il raggio di curvatura RO dell' evoluta di una conica.

182. Una curva riferita alle coordinate parallele, sieno desse ortogonali oppure obblique, è espressa dall' equipollenza $\mathrm{OM} \bumpeq x.\mathrm{OA} + y.\mathrm{OB}$; prendendo le derivate rispetto alla x avremo $\mathrm{dM} \bumpeq \mathrm{OA} + \mathrm{d}y.\mathrm{OB}$, $\mathrm{d}^2\mathrm{M} \bumpeq \mathrm{d}^2 y.\mathrm{OB}$, $\mathrm{d}^3\mathrm{M} \bumpeq \mathrm{d}^3 y.\mathrm{OB}$. Per la (14) del §. 179 dovendosi ridurre $(3q\,\mathrm{d}^2 y + \mathrm{d}^3 y)\,\mathrm{OB}$ parallela ad $\mathrm{OA} + \mathrm{d}y.\mathrm{OB}$, ciò non potrà ottenersi se non se supponendo $3q\,\mathrm{d}^2 y + \mathrm{d}^3 y = 0$; dopo ciò la (15) darà $\mathrm{MW} \bumpeq -\frac{\mathrm{d}^3 y}{3\,\mathrm{d}^2 y}(\mathrm{OA} + \mathrm{d}y.\mathrm{OB}) + \mathrm{d}^2 y.\mathrm{OB}$.

183. Nella spirale logaritmica $\mathrm{OM} \bumpeq e^{at}\varepsilon^t$ si ha $\mathrm{dM} \bumpeq e^{at}\varepsilon^t(a + \gamma^{\nu})$, $\mathrm{d}^2\mathrm{M} \bumpeq e^{at}\varepsilon^t(a + \gamma^{\nu})^2$, ec., dunque per la (14) $3q(a + \gamma^{\nu})^2 + (a + \gamma^{\nu})^3 \bumpeq r(a + \gamma^{\nu})$, cioè $3q + 2a = 0$, e sarà $\mathrm{MW} \bumpeq (\frac{a}{3} + \gamma^{\nu})(a + \gamma^{\nu})e^{at}\varepsilon^t$.

184. Problema. *Trovare la sezion conica che ha un contatto del 4° ordine con una data curva nel suo punto* M. Consideriamo l' ellisse, che passa pel punto M, ha il centro W, e il cui semidiametro conjugato a WM è equipollente alla retta MT, che dee supporsi tangente alla data curva; essa avrà (§. 145) l' equipollenza $\mathrm{WN} \bumpeq x.\mathrm{WM} + y.\mathrm{MT}$, essendo $x^2 + y^2 = 1$; quindi $\mathrm{MN} \bumpeq (1 - \sqrt{1 - y^2})\,\mathrm{MW} + y.\mathrm{MT}$. L' iperbola col centro C è $\mathrm{CN} \bumpeq \sqrt{1 + y^2}.\mathrm{CM} + y.\mathrm{MT}$, e posto $\mathrm{CM} \bumpeq \mathrm{MW}$ sarà $\mathrm{MN} \bumpeq (\sqrt{1 + y^2} - 1)\,\mathrm{MW} + y.\mathrm{MT}$. Così tenendo conto dei soli termini del 4° ordine potremo assumere per la conica osculatrice l' equipollenza $\mathrm{MN} \bumpeq (\frac{1}{2}y^2 \pm \frac{1}{8}y^4)\,\mathrm{MW} + y.\mathrm{MT}$, il segno superiore valendo pel caso dell' ellisse, l' inferiore per l' iperbola; la stessa equipollenza esprime la parabola (§. 180) quando si sopprime il termine dotato del doppio segno. Ora le condizioni del contatto del 4° ordine tra la curva M, e la conica (rispetto alla quale i punti M, W, T deggiono considerarsi come fissi) si ottengono derivando, e dopo facendo $y = 0$, sicchè supposto per brevità che quando $y = 0$ sia $\mathrm{d}y = p$, $\mathrm{d}^2 y = -pq$, $\frac{\mathrm{d}^3 y}{p} - 3q^2 = r$, si hanno per la determinazione delle rette MT, MW le equipollenze (16). $p.\mathrm{MT} \bumpeq \mathrm{dM}$,

(17) $p^2 . MW \triangleq d^2M + q . dM$, purchè le quantità reali p, q, r rendano soddisfatta la (18) $d^3M \triangleq -3q . d^2M + r . dM$, e sia (19) $d^4M - (4r + 15q^2 \pm 3p^2) d^2M$ parallela alla dM. Il valore di q dato dalla (18) è quello stesso che si trova colla (14) del §. 179, perciò la MW della (17) ha la stessa direzione di quella della (15) (§. 179).

185. Nella sviluppante del circolo (§. 178, 181) abbiamo già trovato $q = -\frac{2}{3\phi}$, sicchè la (18) dà

$$\varepsilon^{\phi}(2\gamma^{\prime} - \phi) - \frac{2}{\phi}\varepsilon^{\phi}(1 + \phi\gamma^{\prime}) \triangleq \phi r \varepsilon^{\phi},$$ quindi

$r = -1 - \frac{2}{\phi^2}$, $4r + 15q^2 = -4 - \frac{4}{3\phi^2}$, e per la (19) dobbiamo rendere reale $-3 - \phi\gamma^{\prime} + (4 + \frac{4}{3\phi^2} \mp 3p^2)(1 + \phi\gamma^{\prime})$, il che non può ottenersi se non se col segno superiore e ponendo $p^2 = 1 + \frac{4}{9\phi^2}$; dopo di che le (16), (17) determineranno due diametri conjugati dell' ellisse osculatrice. Potremo dire che la sviluppante del circolo ha in tutti i suoi punti la *curvatura ellittica*, poichè ha un contatto del 4° ordine con un' ellisse.

186. Nel caso generale di $OM \triangleq x . OA + y . OB$ essendo y funzione della variabile indipendente x, abbiamo già trovato (§. 182) $3q\, d^2y + d^3y = 0$, e la (18) dà $r = 0$; poscia per la (19) si ha $\pm p^2 = \frac{d^4y}{3\,d^2y} - \frac{5}{9}\left(\frac{d^3y}{d^2y}\right)^2$; il segno di questo secondo membro mostra se la curvatura sia *ellittica* od *iperbolica*, e la curvatura è *parabolica* se esso si annulla.

187. Per la spirale logaritmica (§. 183) $OM \triangleq e^{at}\varepsilon^{t}$ si ha $3q + 2a = 0$, $r = 3qa + a^2 - 1 = -a^2 - 1$, e dobbiamo rendere reale $(a + \gamma^{\prime})^3 - (\frac{8}{3}a^2 - 4 \pm 3p^2)(a + \gamma^{\prime})$, cioè $\pm p^2 = \frac{1}{9}a^2 + 1$; così deve prendersi il segno superiore, la curvatura è ellittica e l' ellisse osculatrice ha il centro determinata da $(\frac{1}{3}a - \gamma^{\prime}) MW \triangleq (a + \gamma^{\prime}) OM$. — Con simili calcoli si trova che anche la cicloide ha in tutti i suoi punti la curvatura ellittica; la logaritmica e la sinusoide hanno invece la curvatura iperbolica; la parabola od iperbola

$OM \triangleq x . OA + x^n . OB$ ha la curvatura sempre ellittica se n cade tra $\frac{1}{2}$ e 2, e sempre iperbolica se n è minore di $\frac{1}{2}$, o maggiore di 2. La Lemniscata espressa da $OM \triangleq \sqrt{1 + \varepsilon^t}$ ha presso i vertici la curvatura ellittica e presso i flessi la curvatura iperbolica, e quindi ha quattro punti corrispondenti a $\cos\frac{t}{2} = 1 : 4$, e facilmente costruibili, colla curvatura parabolica.

188. Problema. *Trovare l' inviluppo di un sistema di curve espresso dalla* $OM \triangleq \varphi(t, \tau)$; *dove* τ *è un parametro, i cui valori reali danno tutte le curve del sistema.* — Siccome ogni punto della curva ricercata deve trovarsi sopra una delle date; così quella stessa equipollenza ci rappresenterà anche la curva richiesta, purchè si supponga τ una certa funzione di t. Ora nel punto M la tangente della curva corrispondente ad un determinato valore del parametro τ è data in direzione (§. 163) dalla derivata $D_t M$ presa rispetto alla sola variabile t: invece la tangente della curva espressa da $OM \triangleq \varphi(t, \tau)$, quando si suppone che τ sia funzione della t, è espressa dalla derivata $dM \triangleq D_t M + D_\tau M . d\tau$, essendo $d\tau$ la derivata della τ rispetto alla t. Perchè la seconda curva sia l' inviluppo delle prime bisogna che queste due tangenti abbiano identica direzione; perciò la $D_t M$ dovrà esser parallela alla $D_t M + D_\tau M . d\tau$, e quindi anche alla $D_\tau M$. La relazione tra t e τ si otterrà adunque mediante l' equipollenza (20) $D_t M \triangleq p . D_\tau M$, essendo p un coefficiente reale indeterminato.

189. Supponiamo che nella $OM \triangleq \varphi(t, \tau)$ sia t il parametro variabile da curva a curva, e τ sia la variabile che in ciascuna curva distingue un punto dall' altra; per tal maniera l' equipollenza rappresenterà un secondo sistema di curve affatto differente dal primo; se cerchiamo il loro inviluppo ricadiamo sulla stessa (20); perciò *i due sistemi di curve espresse dalla* $OM \triangleq \varphi(t, \tau)$ *hanno il medesimo inviluppo.*

190. Sieno OA, OB (Fig. 36ª) due semidiametri conjugati di un' ellisse, da ciascun punto R di questa sieno tirate a

quelli le parallele RQ, RP, e si ricerchi l'inviluppo della retta PQ. Questa retta è individuata da un parametro τ, essendo (§. 145) $OP \bumpeq \cos\tau . OA$, $OQ \bumpeq \operatorname{sen}\tau . OB$, ed un punto qualunque M di tal retta è espresso (§. 44) da
$OM \bumpeq t . OP + (1 - t) OQ \bumpeq t \cos\tau . OA + (1 - t) \operatorname{sen}\tau . OB$.
— La medesima equipollenza riguardandovi t come un parametro, e τ come la variabile da punto a punto, esprime un sistema di ellissi, che hanno i due semidiametri conjugati $t . OA$, $(1 - t) OB$. — Queste ellissi avranno (§. 189) lo stesso inviluppo delle rette PQ. — Nel presente caso la condizione (20) diventa $\cos\tau . OA - \operatorname{sen}\tau . OB) \bumpeq$
$\bumpeq p [- t \operatorname{sen}\tau . OA + (1 - t) \cos\tau . OB]$, che dà $t = \cos^2\tau$. Dunque il predetto inviluppo è la curva espressa dall'equipollenza $OM \bumpeq \cos^3\tau . OA + \operatorname{sen}^3\tau . OB$.

191. Secondo i miei principii per la classificazione delle curve (Vegg. la Memoria sulla classificazione delle curve del 3° ordine; Soc. Italiana, T. XXV) l'ultima equipollenza esprime una *Specie* di curve *algebrico-razionali* (chiamando così quelle che da prima diceva curve algebriche d'ordine *baricentrico*) del sesto ordine e della quarta classe, che può dirsi *Tetracuspide* in quanto che presenta quattro punti di regresso posti agli estremi di due diametri di *simmetria* tra loro conjugati. — Nel caso che OA, OB sieno perpendicolari si ha quella particolare *Varietà*, nella quale i diametri di simmetria sono tra loro perpendicolari; queste curve sono le Evolute delle ellissi. — Che se le OA, OB oltre che perpendicolari sieno eguali, la curva è di quella particolare *Forma*, che può dirsi *Tetracuspide regolare.* In questo caso essa è nello stesso tempo l'inviluppo della retta PQ di costante lunghezza, che si muove dentro dell'angolo retto AOB, e delle ellissi concentriche, la cui somma degli assi è costante. La sua equipollenza è (posto $OA = OB = 1$) $OM \bumpeq \cos^3\tau + \operatorname{sen}^3\tau . \gamma^{\surd} \bumpeq$
$\bumpeq \frac{1}{8}(\varepsilon^{\tau} + \varepsilon^{-\tau})^3 - \frac{1}{8}(\varepsilon^{\tau} - \varepsilon^{-\tau})^3 \bumpeq \frac{3}{4}\varepsilon^{\tau} + \frac{1}{4}\varepsilon^{-3\tau}$, perlochè essa può esser generata dalla composizione di due moti rotatorii

coi raggi $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{4}$, e con eguali velocità assolute, sicchè essa è un' *Ipocicloide ordinaria.*

192. Problema. *Determinare le trajettorie obbliquangole delle ellissi concentriche e confocali.* — Per una nota proprietà dell' ellisse (§. 148) questo problema si riduce all' altro di trovare la curva M, la cui tangente abbia l' inclinazione eguale alla semisomma delle inclinazioni dei due raggi vettori OM, FM più un angolo costante; problema forse per la prima volta risolto nel mio Saggio ec. (1835), dando maggior generalità ad un problema reputato difficile dall' Eulero (*Mém. Acad. Pétersbourg.* 1826. Tom. X.). La condizione del problema $\text{inc}\, dM = \frac{1}{2}(\text{inc}\, OM + \text{inc}\, FM) + \alpha$ è espressa da $dM \bumpeq p\varepsilon^{\alpha}\sqrt{OM.FM}$. A motivo dell' arbitrarietà nel modo di far entrare la variabile t nella funzione OM, noi possiamo dare a p quel valor reale, che ci renda più semplici le formule. Poniamo $p = dt:\text{sen}\,\alpha$, $OF \bumpeq 4$, $OC \bumpeq 2$ (Fig. 37ª) l' equipollenza $dM \bumpeq (\text{ctg}\,\alpha + \gamma^{\nu})\sqrt{(CM+2)(CM-2)}\,dt$ retroderivata colle note regole di calcolo integrale (§. 18), rammentando (§. 163) che $dM \bumpeq dCM$, dà

$CM \bumpeq c\,e^{t(\text{ctg}\,\alpha + \gamma^{\nu})} + \frac{1}{c}\,e^{-t(\text{ctg}\,\alpha + \gamma^{\nu})}$. Posto $e^{\text{ctg}\,\alpha} = a$, l' equipollenza della curva ricercata è

(1) $CM \bumpeq c\,a^{t}\varepsilon^{t} + 1 : c\,a^{t}\varepsilon^{t}$.

193. Cerchiamo direttamente le trajettorie obbliquangole delle ellissi confocali; esprimeremo queste ellissi col mezzo dell' equipollenza (§. 152) (2) $CM \bumpeq e^{\tau}\varepsilon^{t} + e^{-\tau}\varepsilon^{-t}$; essendo e^{τ}, $e^{-\tau}$ due quantità reali costanti, il cui prodotto si fece $= 1$, perchè l' eccentricità è $CF \bumpeq 2$; τ è quindi un parametro che varia da un' ellisse all' altra. (Può notarsi per incidenza che se viceversa si supponesse τ variabile da punto a punto e t parametro costante per ciascuna curva, la stessa (2) esprimerebbe la serie d' iperbole che hanno i fochi F, O). La tangente dell'ellisse è data da (3) $D_{t}M \bumpeq (e^{\tau}\varepsilon^{t} - e^{-\tau}\varepsilon^{-t})\gamma^{\nu}$,

e la (2) ci esprimerà (§. 188) anche la cercata trajettoria quando si supponga che τ sia, anzichè un parametro costante, una opportuna funzione di t; in questa ipotesi la tangente della trajettoria sarà data da

(4) $D_t M + D_\tau M . d\tau \triangleq (e^\tau \varepsilon^t - e^{-\tau} \varepsilon^{-t}) \gamma^\nu + (e^\tau \varepsilon^t - e^{-\tau} \varepsilon^{-t}) d\tau .$

Dovendo per la condizione delle trajettorie obbliquangole esser costante la differenza delle inclinazioni delle (3), (4) avremo, tolto il fattore comune $e^\tau \varepsilon^t - e^{-\tau} \varepsilon^{-t}$,

$\gamma^\nu + d\tau \triangleq p \varepsilon^\alpha \triangleq p \cos\alpha + p \operatorname{sen}\alpha\, \gamma^\nu$, perciò $d\tau = \operatorname{ctg}\alpha$, cioè $\tau = t \operatorname{ctg}\alpha + \log c$; così la (2) diventa la (1) del §. 192.

194. Accenniamo alcune proprietà della trovata curva. — La equipollenza (1) si decompone nelle due

(5) $CP \triangleq c a^t \varepsilon^t$, $PM \triangleq c^{-1} a^{-t} \varepsilon^{-t}$, le quali esprimono che M descrive intorno al punto P una spirale logaritmica nello stesso tempo che P ne descrive un' altra intorno a C, i due movimenti sono tra loro legati col mezzo della

(6) $CP . PM \triangleq 1$. Così la nostra curva è rispetto alla spirale logaritmica quel che l' ellisse considerata come ipocicloide (§. 152) è rispetto al circolo.

195. Se poniamo $CK \triangleq 2 CP \triangleq 2 c a^t \varepsilon^t \triangleq 2 e^\tau \varepsilon^t$, $CK_1 \triangleq 2 . PM \triangleq 4 : CK$, il punto M è alla metà della retta $K_1 K$. La tangente in M alla nostra curva forma colla MK l' angolo α; infatti prendendo le derivate rispetto (per brevità) alla variabile indipendente $x = t : \operatorname{sen}\alpha$ si ha

(7) $dM \triangleq (c a^t \varepsilon^t - c^{-1} a^{-t} \varepsilon^{-t}) (\operatorname{ctg}\alpha + \gamma^\nu) dt \triangleq$

$\triangleq (c a^t \varepsilon^t - c^{-1} a^{-t} \varepsilon^{-t}) \varepsilon^\alpha \triangleq \varepsilon^\alpha . MK .$ Inoltre

(8) $d^2 M \triangleq \varepsilon^{2\alpha} . CM$, $d^3 M \triangleq \varepsilon^{3\alpha} . MK$, $d^4 M \triangleq \varepsilon^{4\alpha} . CM$, ec.

Quindi per la (4) del §. 164 porremo $\varepsilon^\alpha . CM \triangleq (l + \lambda \gamma^\nu) MK$ ed il raggio di curvatura sarà dato da $MR \triangleq \frac{\gamma^\nu}{\lambda} \varepsilon^\alpha MK$.

Potremo costruire queste due equipollenze tirando la MQ che abbia sulla MC l' inclinazione $\alpha + \frac{\pi}{2}$, poscia innalzando KQ

parte II. pag. 309
Fig. 12
C
A
P
C
V
V
A
B
Fig. 17
B
V

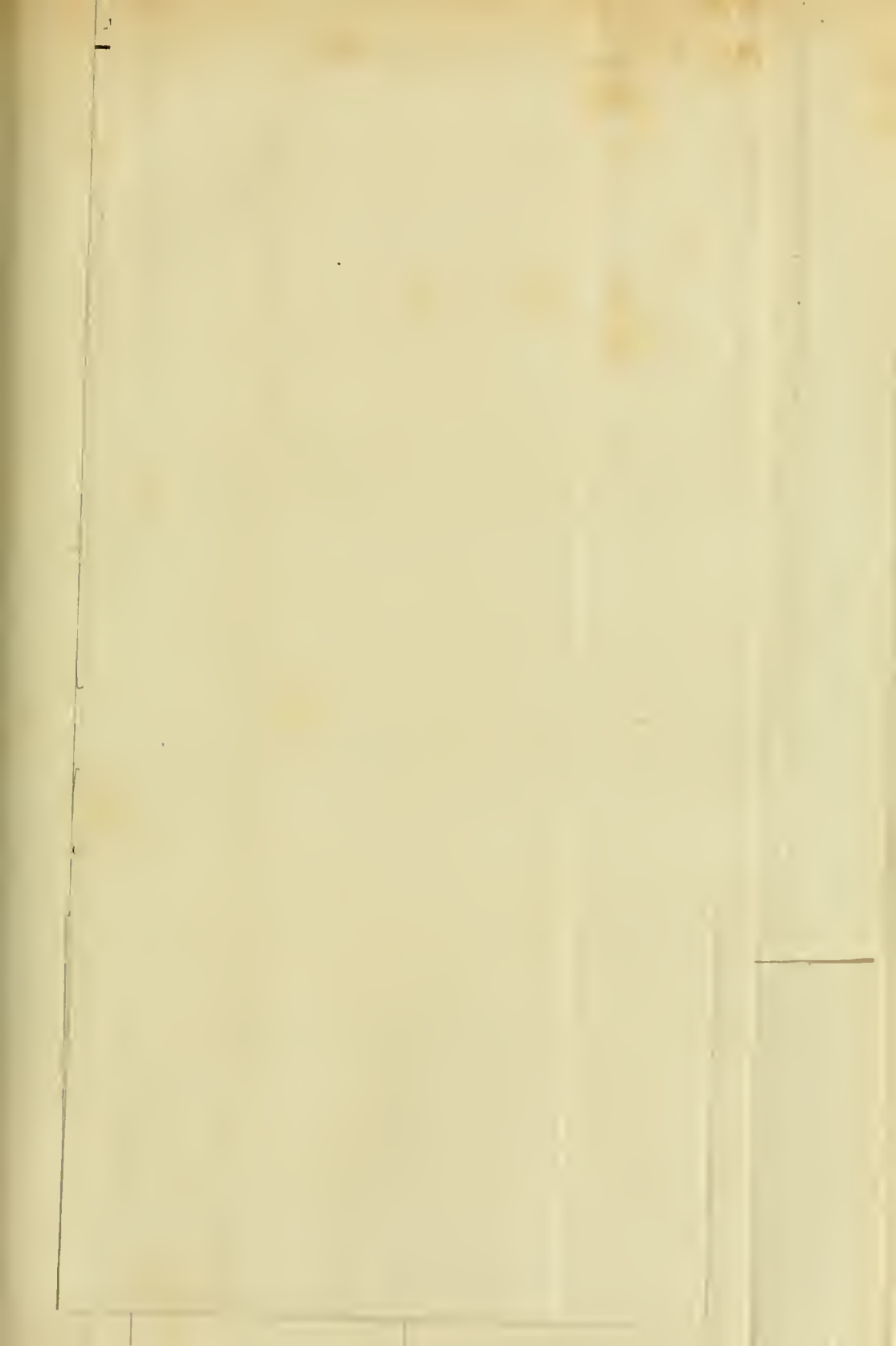
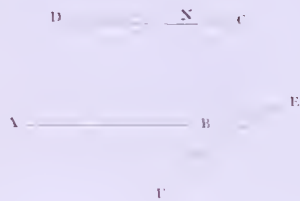
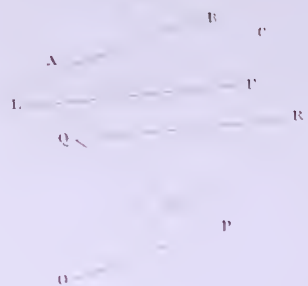
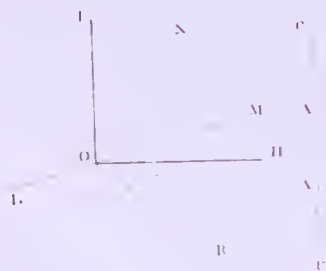
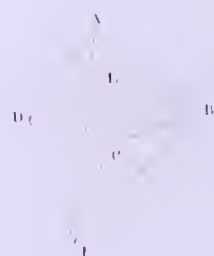
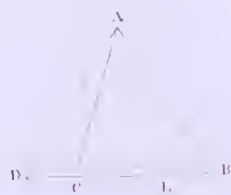
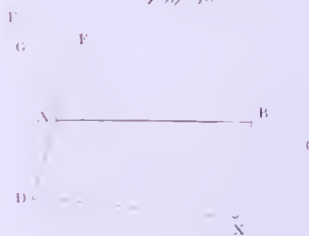
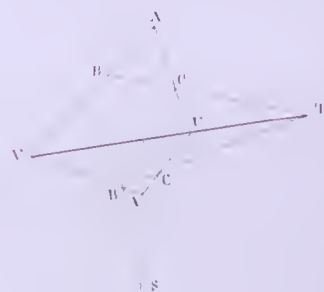
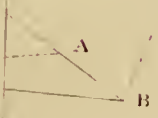
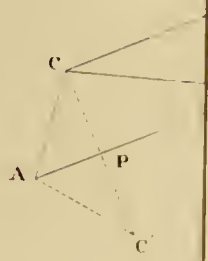
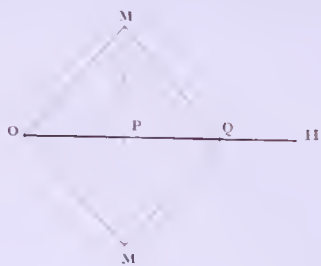
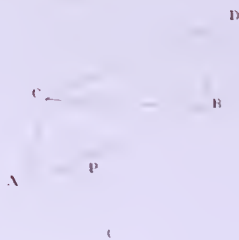
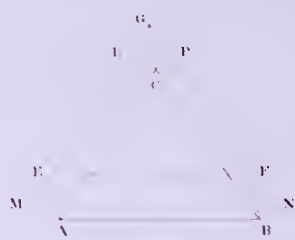



Fig. 11
Fig. 12
Fig. 13
Fig. 14
Fig. 16
Fig. 17
Fig. 18
Fig. 19

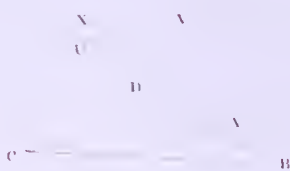
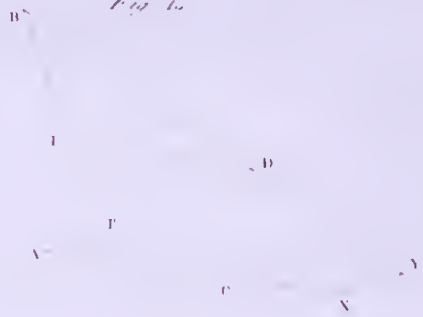
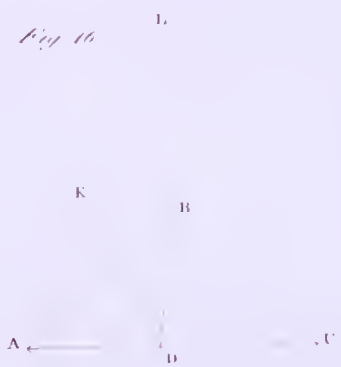



Fig. 22.

Fig. 24.

Y

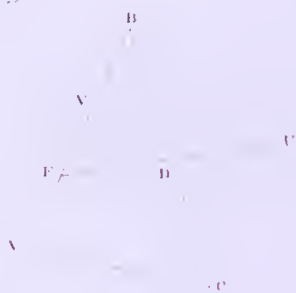
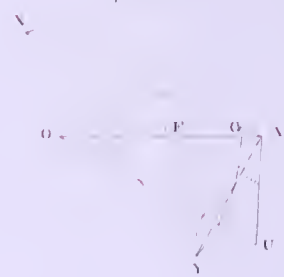
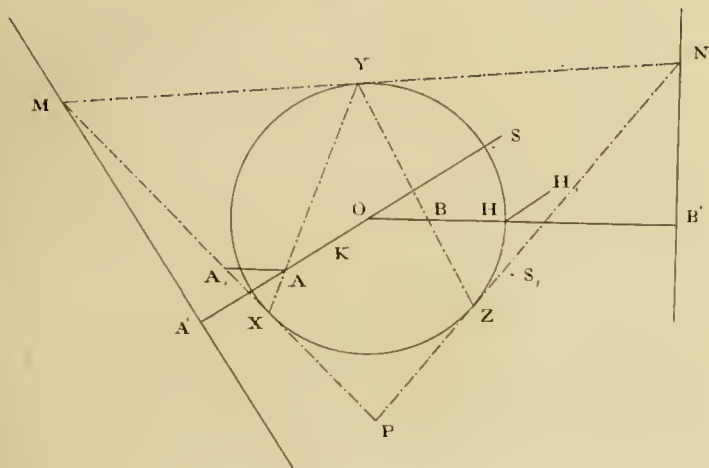
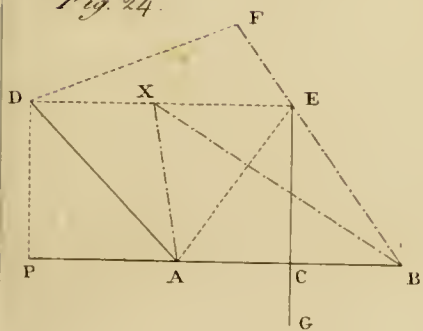
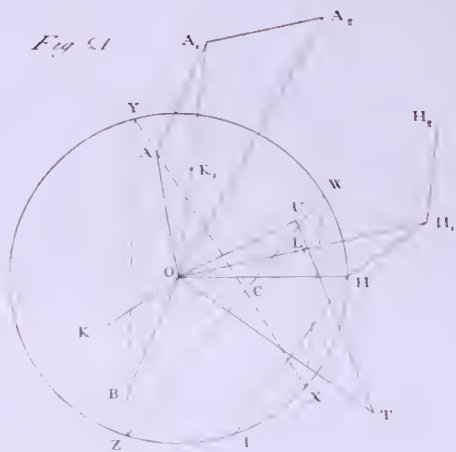
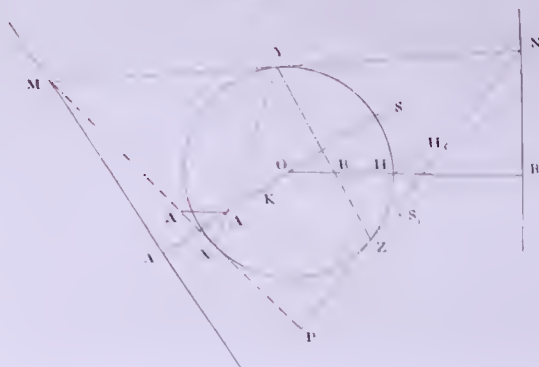



Fig. 25.

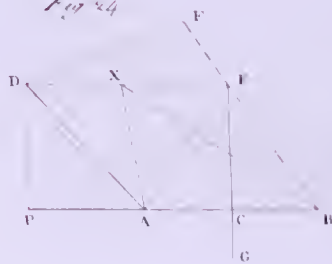
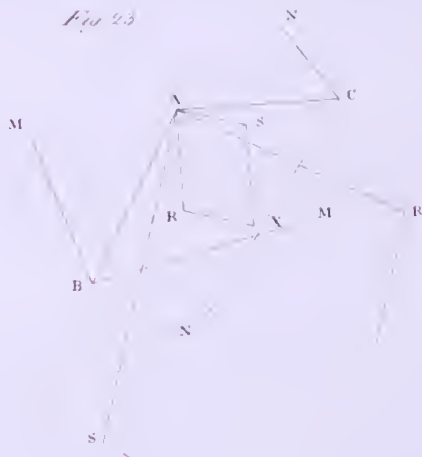
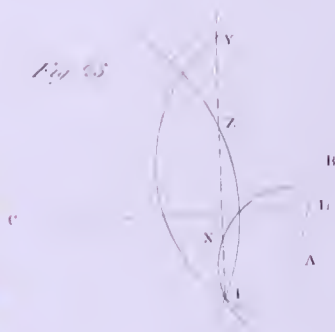
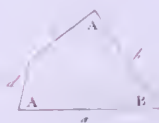
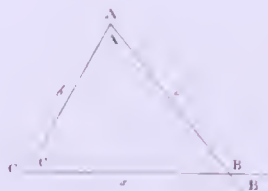
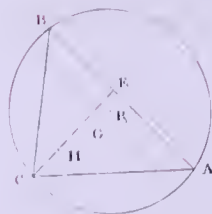
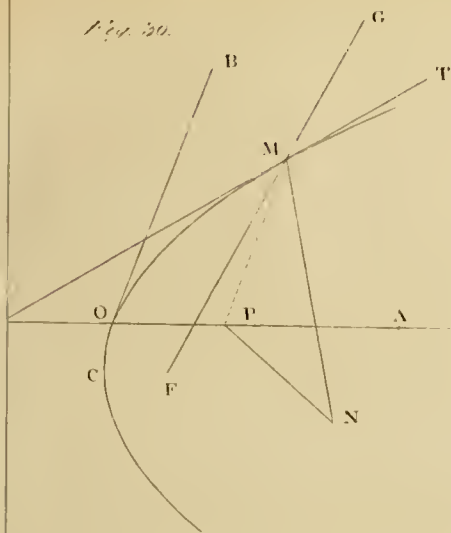
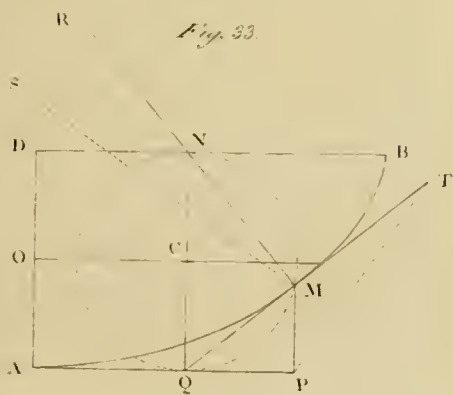
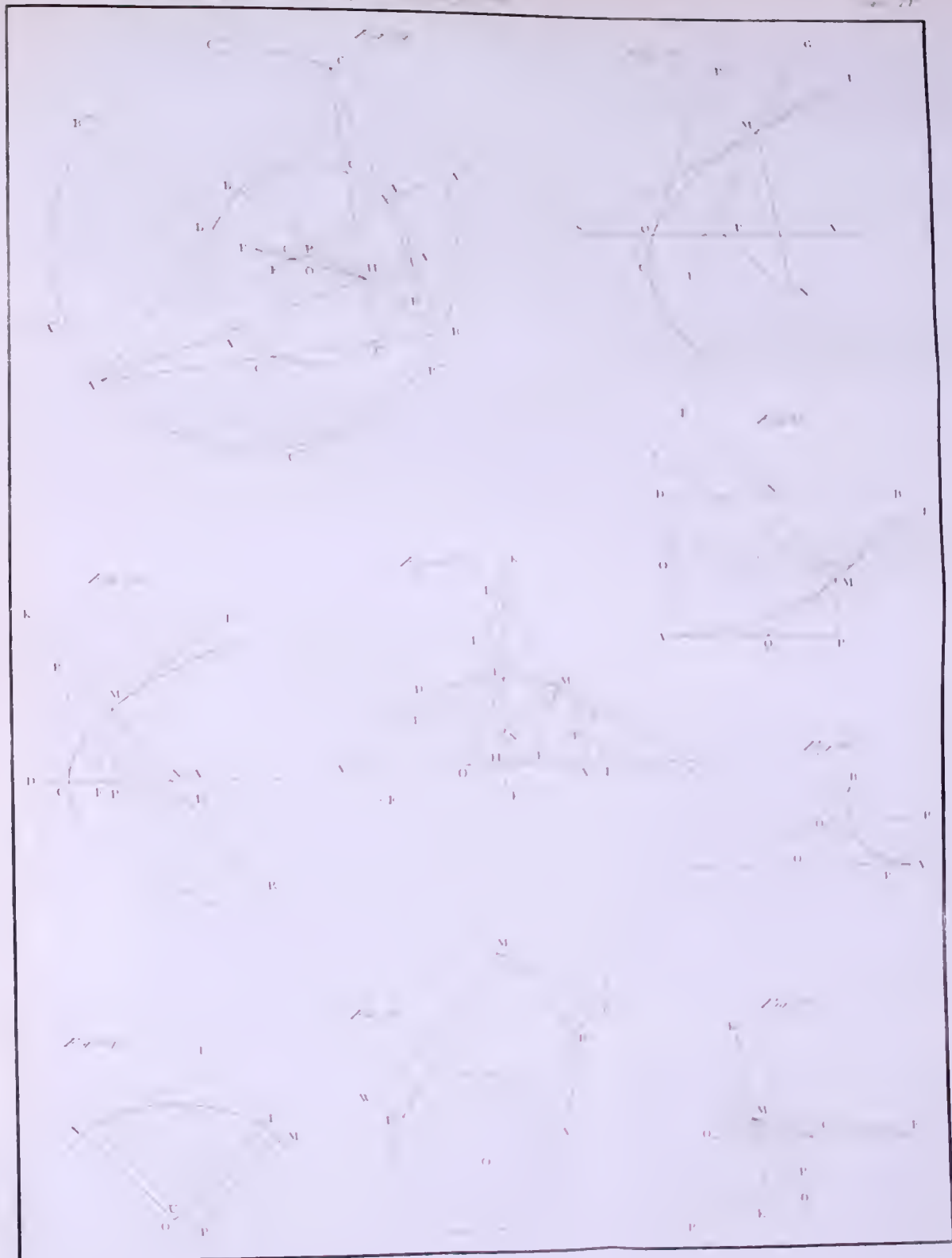



Fig. 21
Fig. 22
Fig. 23
Fig. 24
Fig. 25
Fig. 26
Fig. 27
Fig. 28

Fig. 30.
B
G
T
M
O
P
A
C
F
N
R
Fig. 33.
S
D
N
B
T
O
C
M
A
Q
P
Fig. 36.

C C B L L F C P F O H H B A F C
G F I M O F A C I
I D B I O M A F O
K I F M D C F P E A E
K I I D M I F H I O H E F
E H O F O F A
M F M I O A M F O M F P O E P

perpendicolare alla MK, sicchè paragonando la $MK + KQ \bumpeq MQ$ colla precedente $MK + \frac{l}{\lambda\gamma^{\nu}} MK \bumpeq \frac{\gamma^{\nu}}{\lambda} \varepsilon^{a} . MC$ vedremo che $MR \bumpeq MQ . MK : MC$, perlochè il triangolo MQR sarà simile-dritto ad MCK. — Il raggio vettore condotto dal foco O è $OM \bumpeq e^{\tau} \varepsilon^{t} + 2 + e^{-\tau} \varepsilon^{-t}$; quindi la sua radice $e^{\frac{\tau}{2}} \varepsilon^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{\tau}{2}} \varepsilon^{-\frac{t}{2}}$ è della stessa forma di CM; inoltre (§. 52) si ha $\text{gr}\, OM = e^{\tau} + e^{-\tau} + \varepsilon^{t} + \varepsilon^{-t}$, similmente $\text{gr}\, FM = e^{\tau} + e^{-\tau} - \varepsilon^{t} - \varepsilon^{-t}$; dunque le due variabili τ, t, che sono legate (§. 193) da un' equazione del 1° grado, dipendono l' una dalla somma e l' altra dalla differenza dei due raggi vettori.

SOPRA GLI INTEGRALI GENERALI
DI ALCUNE EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI A COEFFICIENTI COSTANTI
MEMORIA

DEL SOCIO ATTUALE

PROFESSORE AB. BARNABA TORTOLINI

Ricevuta adì 17 *Ottobre* 1854.

Introduzione.

Le ricerche intraprese in questa Memoria sono principalmente dirette alla generale integrazione di certe equazioni a derivate parziali, dalle quali dipende la risoluzione di alcuni importanti problemi di Fisica Matematica. Sceglieremo di preferenza: 1° l' equazione di second' ordine, che s' incontra in un gran numero di problemi di Meccanica razionale, ed in particolare nel celebre problema sulle attrazioni: 2° l'equazione di quarto ordine, che serve ad esprimere nella sua funzione principale le componenti delle forze elastiche nell' interno di un corpo solido omogeneo, e di elasticità costante lorchè è in equilibrio di elasticità: 3° un triplo sistema di equazioni di second' ordine, che s' incontra nel problema relativo all' equilibrio di un prisma rettangolare. L' uso dei simboli e delle caratteristiche esteso ad alcune formole di integrali definiti, ed in particolare ad una formola generale data da *Poisson* nel 1819 per la riduzione di un' integrale doppio ad un' integrale semplice somministrerà sotto una forma elegante i valori delle funzioni principali atti ad esprimere gli integrali generali delle sopraccennate equazioni, e di altre molte, nelle quali il coefficiente simbolico della *funzion principale* sia una certa funzione irra-

zionale delle caratteristiche. I problemi testè nominati sono desunti dalla celebre moderna Opera del Sig. Prof. *Lamé. Leçons sur la théorie mathématique de l'elasticité des corps solides.* Paris 1852. I cultori dell' analisi matematica scorgeranno una nuova applicazione delle formole simboliche sì comunemente ed elegantemente usate dai Geometri, e come queste potranno forse servire a facilitare la risoluzione di qualcuna delle importanti questioni proposte dall'esimio Autore della citata Opera. Verremo perciò a sviluppare nei seguenti paragrafi quanto ci siamo proposti.

INTEGRALI DELLE EQUAZIONI A DERIVATE PARZIALI.

1.° Richiamiamo brevemente gli integrali delle equazioni a derivate parziali di primo ordine a coefficienti costanti. Siano $x, y, z, \ldots. t$ le variabili indipendenti, u la *funzione principale* ed $a, b, c, \ldots. m$ altrettante costanti, e $D_x, D_y, D_z, \ldots. D_t$ i simboli delle derivate parziali; è chiaro che un' equazione di primo ordine sarà generalmente della forma

$$(D_t - aD_x - bD_y - cD_z - \ldots. - m)\, u = f(x, y, z, \ldots. t)$$

Se per le caratteristiche $D_x, D_y, D_z, \ldots.$ pongasi per brevità

$$\square = aD_x + bD_y + cD_z$$

è noto, che l' equazion caratteristica è soddisfatta generalmente dal valor simbolico

$$u = e^{mt}\, e^{t\square} \int e^{-mt}\, e^{-t\square} f(x, y, z, \ldots. t)\, dt.$$

Nell' integrale relativo a t si deve aggiungere la funzione arbitraria delle rimanenti variabili $x, y, z, \ldots.$ per cui se l' integrazione abbia luogo a partir da $t = t_0$, il valore di u diviene

$$u = e^{mt}\, e^{t\square}\, \psi(x, y, z, \ldots.)$$

$$+ \int_{t_0}^{t} e^{m(t-\tau)}\, e^{(t-\tau)\square} f(x, y, z, \ldots. \tau)\, d\tau.$$

Le operazioni indicate dal simbolo $\square$ si riducono al teorema di Taylor, e ponendo in fine

$$F(\tau) = f[x + a(t-\tau),\ y + b(t-\tau),\ z + c(t-\tau), \ldots .\tau],$$

si avrà

$$u = e^{mt}\psi(x + at,\ y + bt,\ z + ct, \ldots) + \int_{t_0}^{t} e^{m(t-\tau)} F(\tau)\, d\tau.$$

Quando il secondo membro dell' equazione sia nullo, in allora per l' integrale di

$$(D_t - a D_x - b D_y - c D_z - \ldots . - m)\, u = 0,$$

si ha soltanto

$$u = e^{mt}\psi(x + at,\ y + bt,\ z + ct, \ldots .).$$

La funzione arbitraria ψ si determina col supporre, che per un valor particolare di t, la u riducasi ad una funzione cognita delle restanti variabili $x, y, z, \ldots .$

2.° Consideriamo particolarmente un' equazione fra le tre variabili indipendenti x, y, z, e prendiamo

$$(a D_x + b D_y + c D_z)\, u = f(x, y, z).$$

Dividendo il primo e secondo membro per uno dei coefficienti a, e posto per brevità $\frac{b}{a} = -a'$, $\frac{c}{a} = -b'$, si avrà

$$(D_x - a' D_y - b' D_z)\, u = \frac{f(x, y, z)}{a},$$

d' onde chiamando ψ la funzione arbitraria, e supponendo che l' integrazione abbia luogo a partir da $x = x_0$, avremo per l' integrale

$$u = e^{(a' D_y + b' D_z) x} \frac{\psi(y, z)}{a} + \int_{x_0}^{x} e^{(x-s)(a' D_y + b' D_z)} \frac{f(s, y, z)}{a}\, ds.$$

Sia nullo il secondo membro dell' equazione, e si eseguiscano le operazioni indicate dai simboli esponenziali, e si sostituiscano nuovamente i valori di a', b', è chiaro che l' integrale della equazione

$$(a D_x + b D_y + c D_z)\, u = 0,$$

sarà
$$a u = \psi \left(\frac{a y - b x}{a}, \frac{a z - c x}{a} \right).$$

Per la funzione arbitraria ψ può supporsi, che per un valor particolare X della x, la u riducasi ad una funzione cognita $F(y, z)$; in questo caso ognun vede che l' integrale generale sarà espresso per

$$u = F \left(\frac{a y + b (X - x)}{a}, \frac{a z + c (X - x)}{a} \right).$$

Questo valore soddisfa all' equazione data, e alla condizione richiesta. Dall' integrale di un' equazione lineare del primo ordine si passa facilmente alla determinazione della funzione principale u, che verifichi l' equazione caratteristica

$$F(D_x, D_y, D_z) u = f(x, y, z),$$

nella quale $F(D_x, D_y, D_z)$ sia una funzione intera delle caratteristiche D_x, D_y, D_z e decomponibile in fattori lineari uguali o disuguali. Quest' importante argomento ad imitazione di altri Geometri fu già da me con qualche estensione trattato in una serie di Memorie pubblicate nel Giornale Arcadico negli anni 1842, 1843. Per lo scopo ora prefissoci non considereremo che il caso, nel quale la funzione delle caratteristiche D_x, D_y, D_z si riduca ad una potenza intera simbolica di una funzione lineare delle medesime caratteristiche.

3.° Sia dunque da integrarsi l' equazion simbolica dell' ordine n, e della forma

$$(a D_x + b D_y + c D_z)^n u = f(x, y, z).$$

Se qui pure pongasi

$$\frac{b}{a} = -a', \quad \frac{c}{a} = -b', \quad \square = a' D_y + b' D_z,$$

si avrà

$$(D_x - \square)^n u = \frac{f(x, y, z)}{a^n},$$

d' onde per il valore dell' integrale simbolico

$$u = \frac{f(x, y, z)}{a^n (D_x - \square)^n}.$$

Mediante l' analogia delle potenze con le differenze si potrà facilmente riconoscere il significato del secondo membro della u. Infatti considerata u qual funzione di x, y, z abbiamo dalla derivazione parziale

$$D_x^n e^{-x\square} u = e^{-x\square} (D_x - \square)^n u,$$

ovvero

$$D_x^n e^{-x\square} u = e^{-x\square} \frac{f(x, y, z)}{a^n},$$

d' onde si trae

$$u = e^{x\square} \frac{e^{-x\square} f(x, y, z)}{a^n D_x^n} = e^{x\square} \int\int\int \ldots e^{-x\square} \frac{f(x, y, z)\, dx^n}{a^n}.$$

Se questo integrale multiplo ha luogo a partir da $x = x_0$, si potrà esso decomporre in un integrale semplice per mezzo della formola generale

$$\int\int\int \ldots F(x)\, dx^n = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^{n-1} F(s)\, ds}{1.2.3 \ldots n-1}$$

e perciò

$$u = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^{n-1}}{1.2.3 \ldots n-1}\, e^{(x-s)\square} \frac{f(s, y, z)\, ds}{a^n}.$$

Per porre in evidenza le n funzioni arbitrarie delle rimanenti variabili y, z si sviluppi il binomio $(x-s)^{n-1}$ e per ciascuna integrazione otterremo

$$u = \frac{x^{n-1}}{a^n} e^{x\square} \varphi(y, z) + \frac{x^{n-2}}{a^n} e^{x\square} \varphi_1(y, z) + \ldots$$
$$+ \frac{1}{a^n} e^{x\square} \varphi_{(n-1)}(y, z)$$
$$+ \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^{n-1}}{(1.2.3 \ldots n-1)\, a^n} e^{(x-s)\square} f(s, y, z)\, ds.$$

Le operazioni indicate dal simbolo $\square$ si riducono al teorema di Taylor nelle funzioni arbitrarie $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{(n-1)}$, in modo che si avrà

$$e^{x(a' D_y + b' D_z)} \varphi(y, z) = \varphi(y + a' x, z + b' x),$$

ovvero per la sostituzione dei valori di a', b'

$$e^{x\Box}\varphi(y, z) = \varphi\left(\frac{ay - bx}{a}, \frac{az - cx}{a}\right).$$

Le formole relative ai casi di $n = 2$, $n = 4$ sono quelle che ci serviranno per le applicazioni che ci siamo prefissi, e che andremo a svolgere successivamente.

4.° Per la supposizione di $n = 2$ l'integrale generale della equazione

$$(a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}_y + c\mathrm{D}_z)^2 u = f(x, y, z)$$

sarà

$$u = \frac{x}{a^2}\varphi\left(\frac{ay - bx}{a}, \frac{az - cx}{a}\right) + \frac{1}{a^2}\varphi_1\left(\frac{ay - bx}{a}, \frac{az - cx}{a}\right) +$$

$$+ \int_{x_0}^{x}\frac{(x - s)\,e^{(x-s)\Box}}{a^2} f(s, y, z)\,ds.$$

Che se di più sia nullo il secondo membro dell' equazione in modo da essere

$$(a\mathrm{D}_x + b\mathrm{D}y + c\mathrm{D}_z)^2 u = 0$$

si avrà solamente

$$u = \frac{x}{a^2}\varphi\left(\frac{ay - bx}{a}, \frac{az - cx}{a}\right) + \frac{1}{a^2}\varphi_1\left(\frac{ay - bx}{a}, \frac{az - cx}{a}\right).$$

La determinazione delle funzioni arbitrarie φ, φ_1 dipende dalle condizioni, alle quali si assoggetta la funzione u. Non è mio scopo presentemente di entrare in questo vasto argomento, dal quale dipende la risoluzione di un gran numero di problemi di Fisica Matematica, e possono consultarsi le classiche Memorie di *Poisson*, *Fourier*,..... del Signor *Cauchy* pubblicate per la maggior parte nei volumi dell' Accademia delle scienze di Parigi. Il Sig. Cauchy occupandosi più di una volta dell' integrazione delle equazioni ne' suoi *Esercizj di Matematica* sì antichi che nuovi, nelle Memorie dell' Istituto di Francia, nel Giornale della scuola politecnica, dà nello stesso tempo dei metodi tanto per la determinazione delle costanti arbitrarie, quanto per la determinazione delle funzioni. Fra gl' innumerevoli e dotti scritti

del Sig. Cauchy su questo soggetto io citerò una Memoria di Calcolo integrale pubblicata nel Tom. 22°, 1850, delle Memorie dell' Accademia delle scienze. L' illustre Geometra avea presentato questo prezioso lavoro all' Accademia fin dal 27 Dicembre 1824, e ci duole che sia stato pubblicato dopo un lungo tratto di 26 anni (*). Nelle mie citate Memorie del 1842, 1843 diedi un metodo generale per la determinazione delle funzioni arbitrarie negli integrali delle equazioni a derivate parziali dell' ordine n, quando si supponga che per un valor particolare di una delle variabili indipendenti x, tanto la funzione

(*) L' Accademia delle scienze di Parigi pubblicò nel Tom. 7° *des Savants Etrangers* 1841 una classica ed originale Memoria di *Abel* sulle funzioni trascendenti: essa era stata presentata fin dal 1826. A questa Memoria si riferisce quanto il celebre *Jacobi* diceva nel Tom. 9°, *Journal de M.r Crelle*, pag. 397, an. 1832: « Cl. Abel commentationem *de proprietatibus singularibus integralium functionum algebraicarum* jam an. 1826 Academiae » Parisiensi exhibuit, quam illustris Academia commentationibus *eruditorum alienorum* inse- » rendam decrevit. Quarum tamen publicatio cum in dies proferatur, valde optandum esset » ut illustri Academiae inter ipsas ejus commentationes eam exhibere placeat, vel si forte » usus vetat ut parti certe historicae commentationum inseratur. Quamquam pietatis quodam- » modo foret, honorem et insuetum tribuere memoriae juvenis eximii, cui ipsos honores » Academicos praeclusit fatum irrevocabile. Quod dum Parisiis agebam a Cl. *Fourrier* pre- » cibus meis concessum, utinam mortuo viro excellentissimo illustris ejus successor ratum » facere velit. » Verso la fine del 1843 feci conoscere in Roma al detto Jacobi la pubblicata Memoria di Abel. Esso restò maravigliato, che un lavoro sì perfetto del gran Geometra Norvegiano fosse rimasto inedito per sì lungo tempo. L' immortale Geometra di Königsberg parlando anche di alcune Memorie inedite di altri insigni Geometri esprime il desiderio della pubblicazione: p. es. nel Tom. 12°, *Journal de M.r Crelle*, pag. 1ª, an. 1834 si propone di dimostrare per sostituzioni lineari

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \ldots + y_n^2$$

e soggiunge: « Quaestiones de eadem re a praestantissimo *Sturm* Academiae Parisiensi com- » missas nondum lucem vidisse dolemus. » Lo stesso Jacobi nel Tom. 23° di *Crelle*, pag. 3ª, an. 1842 parla di una Memoria inedita del celebre *Charpit* sull' integrazione dell' equazioni, ed aggiunge: « Si commentatio juvenis praematura morte abrepti an. 1782 Academiae Pari- » siensi communicata per tot discrimina rerum adhuc conservata est, optandum est ut Cl. » *Liouville* eam in insigni cujus publicationi praeest Diario Mathematico collocare, atque a » scriniis academicis resuscitare velit. »

principale u quanto le sue derivate $D_x u$, $D_x^2 u$, $D_x^3 u$, ... $D_x^{n-1} u$ si riducano a funzioni date delle rimanenti variabili y, z. Senza richiamare qui le formole generali, che ci porterebbero troppo a lungo, ci serviremo di alcuni modi puramente elementari tanto per le equazioni fino ad ora contemplate, quanto per le altre che verremo ad esaminare.

5.° Riprendiamo il precedente valore

$$u = \frac{x}{a^2} \phi \left(\frac{ay - bx}{a}, \frac{az - cx}{a} \right) + \frac{1}{a^2} \phi_1 \left(\frac{ay - bx}{a}, \frac{az - cx}{a} \right)$$

e poniamo di più

$$\frac{b}{a} = -a', \quad \frac{c}{a} = -b', \quad y + a'x = \xi, \quad z + b'x = \eta;$$

mutiamo il simbolo ϕ_1 in ψ, e scriviamo semplicemente ϕ, ψ per le funzioni di ξ, η; è chiaro che si ha

$$a^2 u = x\phi + \psi.$$

Derivando relativamente ad x si ha

$$a^2 D_x u = \phi + x D_x \phi + D_x \psi$$

e quindi, eseguite le derivazioni in ϕ, ψ,

$$a^2 D_x u = \phi + x\,(a'\phi_y' + b'\phi_z') + a'\psi_y' + b'\psi_z'.$$

Se ora per un valore $x = X$ si supponga

$$u = F_0(y, z), \qquad D_x u = F_1(y, z)$$

è chiaro in allora che ponendo

$$y + a'X = \rho, \qquad z + b'X = \rho_1$$

le ξ, η si trasformeranno in ρ, ρ_1. Che se dopo la sostituzione di $x = X$, si ponga nelle due funzioni $F_0(y, z)$, $F_1(y, z)$, invece di y, z, rispettivamente $y + a'(x - X)$, $z + b'(x - X)$ è evidente che ρ, ρ_1 si ridurranno nuovamente a ξ, η, per cui fatto per brevità

$$y + a'(x - X) = \lambda, \quad y + b'(x - X) = \mu$$

otterremo dai valori di u, $D_x u$

$$a^2 F_0(\lambda, \mu) = X\varphi + \psi$$

$$a^2 F_1(\lambda, \mu) = \varphi + X D_x\varphi + D_x\psi.$$

Si eseguisca nella prima una derivazione rapporto ad x, dopo ciò avremo subito dall' eliminazione

$$\frac{\varphi}{a^2} = F_1(\lambda, \mu) - D_x F_0(\lambda, \mu)$$

$$\frac{\psi}{a^2} = F_0(\lambda, \mu) - X[F_1(\lambda, \mu) - D_x F_0(\lambda, \mu)].$$

Di qui per il valore di u si ottiene

$$u = F_0(\lambda, \mu) + (x - X)[F_1(\lambda, \mu) - D_x F_0(\lambda, \mu)].$$

Per maggior semplicità scriviamo F_0, F_1 per le due funzioni, si avrà

$$u = F_0 + (x - X)(F_1 - D_x F_0).$$

Questo valore soddisfa tanto all'equazione, quanto alle richieste condizioni, e si potrà inoltre scrivere sotto la forma simbolica

$$u = F_0 - (x - X)(D_x - F)^1,$$

perchè nello sviluppo alle potenze o ed 1 di F s' intende sostituito F_0, F_1.

6.° Proponiamoci ancora per $n = 4$ d'integrare l'equazione

$$(a D_x + b D_y + c D_z)^4 u = f(x, y, z).$$

Ritenute tutte le precedenti denominazioni si chiamino $\varphi, \psi, \Phi, \chi$, le quattro funzioni arbitrarie delle variabili ξ, η definite come al principio del parag. 5°, si avrà per l' integrale

$$a^4 u = x^3\varphi + x^2\psi + x\Phi + \chi + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-s)^3}{1.2.3} e^{(x-s)\Box} f(s, y, z)\, ds.$$

Volendo supporre il secondo membro nullo, è chiaro che per l' integrale dell' equazione

$$(a D_x + b D_y + c D_z)^4 u = 0$$

si avrà solamente

$$a^4 u = x^3 \varphi + x^2 \psi + x \Phi + \chi .$$

Qui pure determineremo le quattro funzioni arbitrarie φ, ψ, Φ, χ sotto la condizione che per $x = X$, risulti

$$u = F_0(y, z),\ D_x u = F_1(y, z),\ D^2_x u = F_2(y, z),\ D^3_x u = F_3(y, z).$$

Dalla derivazione del valore generico di u abbiamo

$$a^4 D_x u = 3x^2 \varphi + 2x\psi + \Phi + x^3 D_x \varphi + x^2 D_x \psi + x D_x \Phi + D_x \chi .$$

Sostituiamo ora $x = X$ nelle due funzioni u, $D_x u$, i primi membri si ridurranno a $F_0(y, z)$, $F_1(y, z)$, e se come già si è praticato di sopra si cangi y, z in

$$y + a'(x - X) = \lambda, \quad z + b'(x - X) = \mu,$$

otterremo con facilità

$$a^4 F_0(\lambda, \mu) = X^3 \varphi + X^2 \psi + X \Phi + \chi$$

$$a^4 F_1(\lambda, \mu) = 3X^2 \varphi + 2X\psi + \Phi + a^4 D_x F_0(\lambda, \mu).$$

Proseguiamo la derivazione sopra $D_x u$, si troverà

$$a^4 D^2_x u = 6x\varphi + 2\psi + 6x^2 D_x \varphi + 4x D_x \psi + 2D_x \Phi + x^3 D^2_x \varphi + x^2 D^2_x \psi + x D^2_x \Phi + D^2_x \chi .$$

Per la sostituzione di $x = X$ il primo membro diviene $a^4 F_2(y, z)$, ed introdottici le variabili λ, μ, si ricaverà

$$a^4 F_2(\lambda, \mu) = 6X\varphi + 2\psi + 2a^4 D_x F_1(\lambda, \mu) - a^4 D^2_x F_0(\lambda, \mu).$$

Proseguiamo ancora la derivazione per ottenere $D^3_x u$, verrà

$$a^4 D^3_x u = 6\varphi + 18x D_x \varphi + 6D_x \psi + 9x^2 D^2_x \varphi + 6x D^2_x \psi + 3D^2_x \Phi + x^3 D^3_x \varphi + x^2 D^3_x \psi + x D^3_x \Phi + D^3_x \chi ,$$

ove posto $x = X$, ed introdottici i consueti valori di λ, μ otterremo egualmente

$$a^4 F_3(\lambda, \mu) = 6\varphi + 3a^4 D_x F_2(\lambda, \mu) - 3a^4 D^2_x F_1(\lambda, \mu) + a^4 D^3_x F_0(\lambda, \mu).$$

Siamo adunque giunti a quattro equazioni con quattro incognite per le determinazioni di φ, ψ, Φ, χ. Per brevità scriviamo $F_0, F_1, \ldots$ invece di $F_0(\lambda,\mu)$ $F_1(\lambda,\mu), \ldots$ avremo simultaneamente

$$a^4 F_0 = X^3 \varphi + X^2 \psi + X \Phi + \chi$$

$$a^4 F_1 = 3 X^2 \varphi + 2 X \psi + \Phi + a^4 D_x F_0$$

$$a^4 F_2 = 6 X \varphi + 2 \psi + 2 a^4 D_x F_1 - a^4 D^2_x F_0$$

$$a^4 F_3 = 6 \varphi + 3 a^4 D_x F_2 - 3 a^4 D^2_x F_1 + a^4 D^3_x F_0 .$$

Dall' ultima di queste equazioni si trae primieramente

$$\frac{1}{a^4} \varphi = \frac{1}{6} (F_3 - 3 D_x F_2 + 3 D^2_x F_1 - D^3_x F_0)$$

e che potremo porre sotto la forma simbolica

$$\frac{1}{a^4} \varphi = - \frac{1}{6} (D_x - F)^3,$$

purchè alle potenze F^3, F^2, F^1, F^0 si sostituiscano le funzioni F_3, F_2, F_1, F_0. Nella stessa guisa per le altre funzioni, deduciamo dall' eliminazione gli altri valori simbolici

$$\frac{1}{a^4} \psi = \frac{1}{2} [(D_x - F)^2 + X (D_x - F)^3]$$

$$\frac{1}{a^4} \Phi = - (D_x - F)^1 - X (D_x - F)^2 - \frac{X^2}{2} (D_x - F)^3$$

$$\frac{1}{a^4} \chi = F_0 + X (D_x - F)^1 + \frac{X^2}{2} (D_x - F)^2 + \frac{X^3}{2.3} (D_x - F)^3.$$

Moltiplicando rispettivamente queste quattro funzioni per x^3, x^2, x^1, x^0, e sommando si otterrà il valore della u, vale a dire

$$u = F_0 - (x - X)(D_x - F)^1 + \frac{(x-X)^2}{1.2} (D_x - F)^2 - \frac{(x-X)^3}{1.2.3} (D_x - F)^3,$$

il quale soddisfa tanto all' equazione, quanto alle condizioni richieste. Sarebbe facile di estendere una simigliante ricerca per il valore di u nell' equazione del grado n del parag. 3°; ma tralasciamo per ora di presentare maggiori applicazioni, e veniamo a richiamare brevemente una formola data da *Poisson*

nel 1819 in una sua eccellente Memoria sull'integrazione delle equazioni a derivate parziali.

7.° Pongasi per una sostituzione sferico polare

$$\alpha = \cos p, \quad \beta = \operatorname{sen} p \cos q, \quad \gamma = \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \varsigma = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

la formola di cui si tratta è la seguente

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\varsigma) \operatorname{sen} p \, dp \, dq = 2\pi \int_0^{\pi} f(r \cos p) \operatorname{sen} p \, dp,$$

ed ove i limiti sono $p = 0$, $p = \pi$, $q = 0$, $q = 2\pi$.

Se già come fece il Signor Cauchy, ed io stesso ripetei nelle mie citate Memorie del 1842, 1843, si cangi il simbolo di funzione f nel simbolo f' di derivazione, si dedurrà la formola

$$\frac{f(r) - f(-r)}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f'(\varsigma) \operatorname{sen} p \, dp \, dq.$$

Quindi se $f(r)$ sia una funzione impari avremo di più

$$\frac{f(r)}{r} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f'(\varsigma) \operatorname{sen} p \, dp \, dq.$$

Il primo membro rappresenterà una funzione pari della r, d'onde ne viene che la precedente ultima formola potrà servire a trasformare una funzione pari del radicale $(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ in un' integrale doppio di cui ciascun elemento considerato come funzione delle x, y, z dipenderà da una funzione lineare ς delle medesime x, y, z. Osserviamo inoltre che le quantità x, y, z sono indipendenti dalle altre α, β, γ, e l'indicata formola sussisterà quando anche alle x, y, z si sostituissero delle caratteristiche, come lo vedremo nel proseguimento di questa Memoria. Prendiamo intanto per una prima applicazione

$$f(r) = \frac{1}{r^{2n-1}}, \qquad \text{d' onde} \quad f'(r) = \frac{-(2n-1)}{r^{2n}}$$

avremo

$$\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^n} = \frac{-(2n-1)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} p \, dp \, dq}{(\alpha x + \beta y + \gamma z)^{2n}}.$$

Così per la supposizione di $n=1$, $n=2$, avremo le formole parziali

$$\frac{1}{x^2+y^2+z^2}=\frac{-1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen} p\, dp\, dq}{(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2}$$

$$\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{-3}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen} p\, dp\, dq}{(\alpha x+\beta y+\gamma z)^4}.$$

Tutto ciò che abbiamo finora esposto ci condurrà alla risoluzione di questioni più difficili e più estese relativamente alla integrazione delle equazioni a derivate parziali: aggiungiamo di più che aumenteranno le risorse dell' analisi, quando ai quadrati x^2, y^2, z^2 si sostituisce x^4, y^4, z^4, e successivamente alle x^4, y^4, z^4 si sostituisce x^8, y^8, z^8, ed in generale, se l'esponente sia rappresentato da una potenza di 2.

8.° Sia da integrarsi l' equazione

$$(D^2_x+D^2_y+D^2_z)\,u=f(x,y,z).$$

Dall' analogia delle potenze con le differenze si avrà per il suo valore simbolico

$$u=\frac{f(x,y,z)}{D^2_x+D^2_y+D^2_z}.$$

Considerando le caratteristiche D_x, D_y, D_z come se fossero vere quantità, è chiaro che per le ultime formole del precedente parag. 7°, il valore di u si trasformerà in un integrale doppio, ove le caratteristiche D_x, D_y, D_z sono al primo grado, per cui sostituendovi i valori di α, β, γ delle coordinate sferico polari, si avrà

$$u=-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{f(x,y,z)\operatorname{sen} p\, dp\, dq}{(\cos p\, D_x+\operatorname{sen} p\cos q\, D_y+\operatorname{sen} p\operatorname{sen} q\, D_z)^2}.$$

La questione adunque si riduce alla ricerca di una funzione θ, che verifichi l' equazione a derivate parziali

$$(\cos p\, D_x+\operatorname{sen} p\cos q\, D_y+\operatorname{sen} p\operatorname{sen} q\, D_z)^2\,\theta=f(x,y,z),$$

il che già si è fatto nel parag. 4°, e si potrà scrivere

$$u=-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\theta\operatorname{sen} p\, dp\, dq.$$

Supponiamo $f(x, y, z) = 0$, sarà da integrarsi

$$(D^2_x + D^2_y + D^2_z)\, u = 0,$$

ed il valore di θ determinato dall' equazione

$$(\cos p\, D_x + \operatorname{sen} p \cos q\, D_y + \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q\, D_z)^2 \theta = 0,$$

sarà per le formole del citato parag. 4°

$$\theta = \frac{x}{\alpha^2} \varphi \left(\frac{\alpha y - \beta x}{\alpha}, \frac{\alpha z - \gamma x}{\alpha} \right) + \frac{1}{\alpha^2} \psi \left(\frac{\alpha y - \beta x}{\alpha}, \frac{\alpha z - \gamma x}{\alpha} \right).$$

Pongasi inoltre

$$\frac{\alpha y - \beta x}{\alpha} = \eta, \quad \frac{\alpha z - \gamma x}{\alpha} = \zeta$$

il valore di u porgerà per l' integrale della proposta equazione

$$u = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{x \varphi(\eta, \zeta)}{\cos^2 p} \operatorname{sen} p\, dp\, dq$$

$$- \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi(\eta, \zeta)}{\cos^2 p} \operatorname{sen} p\, dp\, dq.$$

Quest' espressione soddisfa anche alla condizione che per $x = 0$ le $u, D_x u$ si riducano rispettivamente eguali a $\psi(y, z)$, $\varphi(y, z)$. Volendo sostituire al valore di θ un' altra espressione come al parag. 5°, ove era inclusa la determinazione delle funzioni arbitrarie, in allora rammentandoci dei valori di λ, μ, cioè

$$\lambda = \frac{\alpha y - \beta (x - X)}{\alpha}, \quad \mu = \frac{\alpha z - \gamma (x - X)}{\alpha}$$

si avrà

$$\theta = F_0(\lambda, \mu) + (x - X)\,[F_1(\lambda, \mu) - D_x F_0(\lambda, \mu)].$$

Mutiamo i segni delle due funzioni F_0, F_1, ed otterremo per u un' altra forma d' integrale, vale a dire

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (x - X)\,[D_x F_0(\lambda, \mu) - F_1(\lambda, \mu)] \operatorname{sen} p\, dp\, dq$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_0(\lambda, \mu) \operatorname{sen} p\, dp\, dq.$$

Qui pure per $x = X$ si ha $u = F_0(y, z)$, $D_x u = F_1(y, z)$. Poisson nel Tom. 3° *Mémoires de l'Institut* pour l'an. 1818, pag. 142 col ritenere le nostre denominazioni pone l'integrale di cui si tratta sotto la forma

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} x f(y + \gamma x \sqrt{-1},\ z + \beta x \sqrt{-1}) \operatorname{sen} p\, dp\, dq$$

$$+ \frac{1}{4\pi} D_x \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} x F(y + \gamma x \sqrt{-1},\ z + \beta x \sqrt{-1}) \operatorname{sen} p\, dp\, dq.$$

Le condizioni sono che per $x = 0$ le due funzioni F, f si riducono ad u e $D_x u$. Il celebre Geometra soggiunge: « mais à « cause des imaginaires qui sont contenues sous les fonctions « f, F, cette integrale sera peu utile pour la resolution des « problemes sur-tout lorsque, par la nature de la question « ces fonctions arbitraires devront être discontinues. » Le doppie espressioni da noi date per il valore u dell'integrale sono prive dei simboli d'imaginarietà. Le due equazioni

$$(D^2_x + D^2_y + D^2_z)\, u = 0, \qquad (D^2_x + D^2_y + D^2_z)\, u = f(x, y, z)$$

si presentano in un gran numero di problemi di Fisica matematica, ed in particolare in quello sulle attrazioni. Diversi Geometri si sono occupati dell'integrale della prima delle due equazioni. Il Sig. Prof. *R. Carmichael* di Dublino nel Giornale *The Cambridge an Dublin* Tom. 7°, pag. 130, an. 1852, facendo uso dei nuovi simboli d'imaginarietà coll'introdurre la così detta teorica dei *triplettti* ne determina l'integrale, ma le sue forme sono diverse dalle nostre. Il Sig. *Carmichael* estende la integrazione per un'equazione somigliante a quattro variabili indipendenti coll'uso dei *Quaternioni* (*). Sarebbe facile di

(*) Il Sig. Prof. *W. R. Hamilton*, il quale ha introdotto nell'analisi l'uso dei *Quaternioni*; ha recentemente pubblicato un'Opera su questo soggetto intitolata *Lectures on Quaternions*, Dublin 1853. Essa è un grosso volume in 8° in carattere minuto di 736 pagine, ed è preceduta da una prefazione di 64 pagine e da un indice in carattere ancor più minuto di 72 pagine. Il Sig. Hamilton dice che l'Opera è il risultato dello studio di venti anni, ed il nome dell'Autore raccomanda certamente l'attenzione dei Geometri.

estendere le precedenti considerazioni ad altre equazioni a derivate parziali di second' ordine, ed in particolare quando il coefficiente simbolico della u fosse rappresentato da una funzione omogenea di secondo grado delle tre caratteristiche D_x, D_y, D_z, il che verrà forse riservato in altra Memoria.

9.° Sia da integrarsi l' equazione caratteristica del 4° ordine

$$(D^2_x + D^2_y + D^2_z)^2 u = f(x, y, z)$$

la quale, se fosse $f(x, y, z) = 0$, s' incontra nel problema sull' equilibrio di elasticità di un corpo solido omogeneo (Lamé, Corps elastiques, pag. 70). Avremo per il valor simbolico dell' integrale

$$u = \frac{f(x, y, z)}{(D^2_x + D^2_y + D^2_z)^2}.$$

Ora per le applicazioni fatte della formola di Poisson e riportate verso la fine del parag. 7°, potremo alle x, y, z sostituirci le caratteristiche D_x, D_y, D_z, quindi è chiaro che il precedente valore di u si trasformerà in

$$u = \frac{-3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x, y, z) \operatorname{sen} p \, dp \, dq}{(\cos p \, D_x + \operatorname{sen} p \cos q \, D_y + \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q \, D_z)^4}.$$

quindi si vede che la integrazione viene ridotta alla ricerca di una funzione θ, la quale verifichi l' equazion caratteristica

$$(\cos p \, D_x + \operatorname{sen} p \cos q \, D_y + \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q \, D_z)^4 \, \theta = f(x, y, z),$$

il che già si è fatto in più modi nel precedente parag. 6°. Supponiamo nullo il secondo membro, e riteniamo tutte le denominazioni di α, β, γ, η, ζ del parag. 8° per il valore di θ, che debba verificare l' equazione del 4° ordine

$$(\cos p \, D_x + \operatorname{sen} p \cos q \, D_y + \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q \, D_z)^4 \, \theta = 0,$$

avremo per il detto valore di θ

$$\theta \cos^4 p = x^3 \varphi(\eta, \zeta) + x^2 \psi(\eta, \zeta) + x \Phi(\eta, \zeta) + \chi(\eta, \zeta);$$

d' onde se si scriva $\varphi, \psi, \ldots$ in luogo di $\varphi(\eta, \zeta), \ldots$ per l' integrale dell' equazion caratteristica

$$(D^2_x + D^2_y + D^2_z)^2 u = 0$$

otterremo

$$u = \frac{-3}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{(x^3 \varphi + x^2 \psi + x \Phi + \chi) \operatorname{sen} p \, dp \, dq}{\cos^4 p}.$$

Le funzioni arbitrarie φ, ψ, Φ, χ possono essere soggette a diverse condizioni relativamente alla u e alle sue derivate $D_x u$, $D^2_x u$, $D^3_x u$. Così per $x = 0$ la χ diviene $\chi(y, z)$, e si ha di più

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} p \, dp \, dq}{\cos^4 p} = \frac{-4}{3} \pi,$$

per cui ad $x = 0$ corrisponde $u = \chi(x, y)$. Venendo ad una prima derivazione nel valore generale di u rapporto ad x si vede facilmente che la derivazione di $\chi(\eta, \zeta)$ produce

$$D_x \chi(\eta, \zeta) = -\chi'_\eta(\eta, \zeta) \frac{\beta}{\alpha} - \chi'_\zeta(\eta, \zeta) \frac{\gamma}{\alpha},$$

e perciò richiamando i valori di α, β, γ otterremo

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} D_x \chi(\eta, \zeta) \operatorname{sen} p \, dp \, dq$$
$$= -\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\chi'_\eta(\eta, \zeta) \operatorname{sen}^2 p \cos q \, dp \, dq}{\cos^5 p}$$
$$- \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{\chi'_\zeta(\eta, \zeta) \operatorname{sen}^2 p \operatorname{sen} q \, dp \, dq}{\cos^5 p}.$$

Fatto $x = 0$, le $\chi'_\eta(\eta, \zeta)$, $\chi'_\zeta(\eta, \zeta)$ si riducono a funzioni di y, z, gli integrali trigonometrici sono nulli, e nullo perciò risulterà il primo membro. Da qui ne segue che ad $x = 0$ corrisponde $D_x u = \Phi(y, z)$. Nella stessa guisa per $x = 0$ ricaviamo

$$\tfrac{1}{2} D^2_x u = \psi(y, z), \quad \tfrac{1}{6} D^3_x u = \varphi(y, z).$$

Supponiamo ora il valore di θ già sottoposto alle condizioni, che per $x=X$, le $\theta, D_x\theta, D^2_x\theta, D^3_x\theta$ si riducano alle funzioni $F_0(y,z)$, $F_1(y,z)\ldots.$, in allora se si ritengano sempre i valori di λ, μ, di α, β come dal parag. 8° e per brevità si scriva $F_0, F_1, \ldots.$ invece di $F_0(\lambda, \mu), \ldots.$ si avrà per il valore generale

$$\theta=F_0+(x-X)(F_1-D_xF_0)+\frac{(x-X)^2}{1.2}(F_2-2F_1D_xF_0+D^2_xF_0)$$

$$+\frac{(x-X)^3}{1.2.3}(F_3-3F_2D_xF_0+3F_1D^2_xF_0-D^3_xF_0),$$

quale si avrebbe da sostituire nel secondo membro di

$$u=\frac{-3}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\theta \operatorname{sen} p\, dp\, dq.$$

Cangiamo il segno al valore di θ, e scriviamo di più f_1, f_2, f_3 per i coefficienti delle diverse potenze di $x-X$, otterremo in fine

$$u=\frac{3}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(F_0+(x-X)f_1+\frac{(x-X)^2}{1.2}f_2+\frac{(x-X)^3}{1.2.3}f_3\right)\operatorname{sen} p\, dp\, dq.$$

Questo valore rappresenta l' integrale generale dell' equazione

$$(D^2_x+D^2_y+D^2_z)^2u=0$$

e nello stesso tempo per $x=X$ soddisfa alle condizioni

$$u=F_0(y,z),\quad D_xu=F_1(y,z),\quad D^2_xu=F_2(y,z),\quad D^3_xu=F_3(y,z).$$

Dai principj stabiliti si scorge, come senza difficoltà si potrebbe determinare l' integrale dell' equazione

$$(D^2_x+D^2_y+D^2_z)^n=f(x,y,z)$$

od anche di altra più generale, ed ove alla somma delle tre caratteristiche di second' ordine fosse sostituita una funzione omogenea di secondo grado delle tre medesime caratteristiche.

10.° Come già abbiamo osservato verso la fine del parag. 7° aumenteranno le risorse dell' analisi, quando nella più volte citata formola di Poisson si sostituisse x^4, y^4, z^4, invece di

x^2, y^2, z^2, e quindi x^8, y^8, z^8 invece di x^4, y^4, z^4 e così successivamente: noi da questa osservazione possiamo trarne un partito utile per l'integrazione di altre equazioni a derivate parziali. Sia per esempio da integrarsi l'equazione

$$(a^2 D^4_x + b^2 D^4_y + c^2 D^4_z)^n u = f(x, y, z)$$

si avrà primieramente

$$u = \frac{f(x, y, z)}{(a^2 D^4_x + b^2 D^4_y + c^2 D^4_z)^n},$$

quindi per le applicazioni fatte della formola di Poisson nello stesso parag. 7°, si otterrà

$$u = \frac{-(2n-1)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x, y, z) \operatorname{sen} p \, dp \, dq}{(a \cos p D^2_x + b \operatorname{sen} p \cos q D^2_y + c \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q D^2_z)^{2n}}.$$

Si avrà pertanto nel secondo membro a determinare una funzione θ che verifichi l'equazione caratteristica

$$(a \cos p D^2_x + b \operatorname{sen} p \cos q D^2_y + c \operatorname{sen} p \operatorname{sen} q D^2_z)^{2n} \theta = f(x, y, z),$$

la quale sarà integrabile per tutto ciò che abbiamo esposto nel precedente parag. 9°. Più generalmente se m, n, r siano numeri interi, e pongasi $2^r = m$, sarà sempre integrabile l'equazione

$$(A D^m_x + B D^m_y + C D^m_z)^n u = f(x, y, z).$$

Io penso che la medesima conseguenza avrà luogo quando anche alla somma delle caratteristiche $A D^m_x, \ldots\ldots$ si sostituisse una funzione omogenea di grado m delle tre caratteristiche D_x, D_y, D_z; il che ci basti qui di aver indicato.

11.° Estendiamo le precedenti dottrine per l'integrazione di altre equazioni a derivate parziali. Pongasi per le caratteristiche D_x, D_y, D_z.

$$\square^2 = D^2_x + D^2_y + D^2_z$$

e sià di più

$$\theta = D_x u + D_y v + D_z w$$

e venga proposta l'integrazione del triplo sistema

$$D_x \theta + \varepsilon \square^2 u = U, \quad D_y \theta + \varepsilon \square^2 v = V, \quad D_z \theta + \varepsilon \square^2 w = W \ldots. (1),$$

ove ε è una costante data, e le U, V, W sono altrettante funzioni delle tre variabili x, y, z. Nel caso, che le U, V, W siano nulle, le tre precedenti equazioni s' incontrano nel problema sull'equilibrio di un prisma rettangolare, come si vede alla citata Opera del Sig. *Lamé*, pag. 157; la costante ε è collegata con due costanti l, m per mezzo dell' equazione

$$\varepsilon = \frac{m}{l + m}.$$

Il simbolo $\square^2 u$ si chiama dal Sig. Lamé *parametro differenziale di second' ordine* della funzione u, ma da esso viene denotato per $\Delta^2 u$, come dal medesimo dicesi *parametro differenziale di primo ordine* della funzione u l' espression differenziale

$$\Delta' u = [(D_x u)^2 + (D_y u)^2 + (D_z u)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

La integrazione del triplo sistema consisterà a determinare i valori generali delle tre funzioni u, v, w, quali verifichino le dette equazioni, il che noi potremo eseguire nei seguenti paragrafi mediante lo sviluppo dei principj di sopra stabiliti.

12.° Si sostituisca nell' indicato triplo sistema il valore della funzione ausiliare θ, ed avremo tre equazioni sotto la forma simbolica

$$(D^2_x + \varepsilon\square^2)u + D_x D_y v + D_x D_z w = U$$
$$(D^2_y + \varepsilon\square^2)v + D_y D_x u + D_y D_z w = V$$
$$(D^2_z + \varepsilon\square^2)w + D_z D_x u + D_z D_y v = W.$$

Considerando le caratteristiche come se fossero vere quantità, noi potremo determinare i valori di u, v, w dall' eliminazione di tre equazioni di primo grado a tre incognite, per cui prendendo per norma le tre equazioni

$$au + bv + cw = U, \quad a'u + b'v + c'w = V, \quad a''u + b''v + c''w + W$$

e col porre

$$\Delta = a b' c'' - a c' b'' + c a' b'' - b a' c'' + b c' a'' - c b' a'',$$

si trae per la prima

$$u = \frac{(b'c'' - c'b'')U + (cb'' - bc'')V + (bc' - cb')W}{\Delta}.$$

Facendo l'applicazione alle tre equazioni simboliche troveremo per il denominatore comune

$$\Delta = (D^2_x + \varepsilon\square^2)(D^2_y + \varepsilon\square^2)(D^2_z + \varepsilon\square^2) - D^2_y D^2_z (D^2_x + \varepsilon\square^2)$$
$$- D^2_x D^2_y (D^2_z + \varepsilon\square^2) - D^2_x D^2_z (D^2_y + \varepsilon\square^2).$$

Si eseguiscano tutte le indicate moltiplicazioni delle caratteristiche, e si richiami di più il valore di $\square^2$, avremo senza difficoltà

$$\Delta = \varepsilon^2(1 + \varepsilon)\square^6.$$

Nella stessa guisa per il numeratore di u si troverà

$$(b'c'' - c'b'')U = \varepsilon[(1 + \varepsilon)\square^2 - D^2_x]\square^2 U$$

$$(cb'' - bc'')V = -\varepsilon D_x D_y \square^2 V, \quad (bc' - cb')W = -\varepsilon D_x D_z \square^2 W,$$

per cui fatta la riduzione fra le due potenze simboliche di $\square$, si trarrà

$$u = \frac{U}{\varepsilon\square^2} - \frac{D_x(D_x U + D_y V + D_z W)}{\varepsilon(1 + \varepsilon)\square^4}.$$

Nella stessa guisa per le altre due funzioni v, w, si ha

$$v = \frac{V}{\varepsilon\square^2} - \frac{D_y(D_x U + D_y V + D_z W)}{\varepsilon(1 + \varepsilon)\square^4}$$

$$w = \frac{W}{\varepsilon\square^2} - \frac{D_z(D_x U + D_y V + D_z W)}{\varepsilon(1 + \varepsilon)\square^4}.$$

Tali sono gli integrali simbolici del triplo sistema di equazioni a derivate parziali: la questione è ridotta in ultimo all' integrazione di due equazioni del secondo e quart' ordine di già considerate nei precedenti parag. 8° e 9°. Così per il valore di u tutto consisterà a trovare due funzioni ω_1, ω, che verifichino le due equazioni

$$\square^2\omega_1 = U, \qquad \square^4\omega = D_x(D_x U + D_y V + D_z W).$$

Avanti di procedere alla ricerca dei valori espliciti delle tre funzioni u, v, w da esprimersi in integrali definiti, mostriamo brevemente come per mezzo della funzione ausiliare θ si possa giungere ai medesimi valori simbolici di u, v, w. Riprese le equazioni

$$D_x\theta + \varepsilon\Box^2 u = U, \quad D_y\theta + \varepsilon\Box^2 v = V, \quad D_z\theta + \varepsilon\Box^2 w = W$$

si eseguisca una derivazione nella prima rapporto ad x, nella seconda ad y, e nella terza a z, e si sommino otterremo

$$(D^2_x + D^2_y + D^2_z)\theta + \varepsilon\Box^2\theta = D_x U + D_y V + D_z W.$$

Da qui per la funzione ausiliare θ, si trae

$$\theta = \frac{D_x U + D_y V + D_z W}{(1+\varepsilon)\Box^2},$$

la quale come ognun vede viene a coincidere con la forma di equazione a derivate parziali integrata nel principio del §. 8°. Determinato il valore di θ, si otterrebbero quei di u, v, w; infatti dalla prima si ricava

$$u = \frac{U - D_x\theta}{\varepsilon\Box^2} = \frac{U}{\varepsilon\Box^2} - \frac{D_x\theta}{\varepsilon\Box^2},$$

quale viene a coincidere con il valore precedentemente ottenuto; lo stesso dicasi per le altre due funzioni v, w.

13.° Siano nulli i secondi membri del triplo sistema di equazioni (1), vale a dire sia $U=0$, $V=0$, $W=0$, le tre equazioni da integrarsi saranno

$$(D^2_x + \varepsilon\Box^2)u + D_x D_y v + D_x D_z w = 0$$

$$(D^2_y + \varepsilon\Box^2)v + D_y D_x u + D_y D_z w = 0$$

$$(D^2_z + \varepsilon\Box^2)w + D_z D_x u + D_z D_y v = 0.$$

Per ciò che si è veduto nell' antecedente parag. 12°, ciascuno dei valori di u, v, w sarà sempre della forma

$$\frac{\omega_1}{\varepsilon} - \frac{\omega}{\varepsilon(1+\varepsilon)},$$

ove ω_1, ω sono gli integrali dell' equazioni

$$\square^2 \omega_1 = 0, \qquad \square^4 \omega = 0,$$

quali verranno rappresentati da una o differenti forme dipendenti dalla scelta delle funzioni u, v, w. Ora per ω_1, ω, come dai parag. 8° e 9°, potremo prendere

$$\omega_1 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(\mathrm{f}_0 + (x - \mathrm{X})(\mathrm{D}_x \mathrm{f}_0 - \mathrm{f}_1)\Big) \operatorname{sen} p \, dp \, dq$$

$$\omega = \frac{3}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(\mathrm{F}_0 + (x - \mathrm{X})(\mathrm{D}_x \mathrm{F}_0 - \mathrm{F}_1) + \frac{(x-\mathrm{X})^2}{1.2}(\mathrm{D}^2_x \mathrm{F}_0 - 2\mathrm{F}_1 \mathrm{D}_x \mathrm{F}_0 + \mathrm{F}_2)$$

$$+ \frac{(x-\mathrm{X})^3}{1.2.3}(\mathrm{D}^3_x \mathrm{F}_0 - 3\mathrm{F}_1 \mathrm{D}^2_x \mathrm{F}_0 + 3\mathrm{F}_2 \mathrm{D}_x \mathrm{F}_0 - \mathrm{F}_3)\Big) \operatorname{sen} p \, dp \, dq,$$

ove f_0, f_1, F_0, F_1, F_2, F_3 sono funzioni di due variabili λ, λ_1 definite dai valori

$$\lambda = \frac{\alpha y - \beta(x - \mathrm{X})}{\alpha}, \qquad \lambda_1 = \frac{\alpha z - \gamma(x - \mathrm{X})}{\alpha},$$

d'onde si scorge che per la funzione u determinata dalla formola

$$u = \frac{\omega_1}{\varepsilon} - \frac{\omega}{1+\varepsilon}$$

si potrà in generale ottenere un risultato seguente

$$u = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\Big(f_0 + (x - \mathrm{X})f_1 + \frac{(x-\mathrm{X})^2}{1.2}f_2 + \frac{(x-\mathrm{X})^3}{1.2.3}f_3\Big) \operatorname{sen} p \, dp \, dq$$

f_0, f_1, f_2, f_3 sono funzioni delle due λ, λ_1. Nella stessa guisa ponendo

$$\mu = \frac{\beta x - \alpha(y - \mathrm{Y})}{\beta}, \qquad \mu_1 = \frac{\beta z - \gamma(y - \mathrm{Y})}{\beta}$$

$$\nu = \frac{\gamma x - \alpha(z - \mathrm{Z})}{\gamma}, \qquad \nu_1 = \frac{\gamma y - \beta(z - \mathrm{Z})}{\gamma},$$

si avrà per le altre due funzioni

$$v=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\mathrm{F}_0+(y-\mathrm{Y})\,\mathrm{F}_1+\frac{(y-\mathrm{Y})^2}{1\,.\,2}\,\mathrm{F}_2+\frac{(y-\mathrm{Y})^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,\mathrm{F}_3\right)\operatorname{sen}p\,dp\,dq$$

$$w=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left(F_0+(z-Z)\,F_1+\frac{(z-Z)^2}{1\,.\,2}\,F_2+\frac{(z-Z)^3}{1\,.\,2\,.\,3}\,F_3\right)\operatorname{sen}p\,dp\,dq;$$

$\mathrm{F}_0, \mathrm{F}_1, \ldots$ $F_0, F_1, \ldots$ sono rispettivamente funzioni di μ, μ_1 e di v, v_1. Questi tre valori di u, v, w sono quei dai quali sarà da dedursi il valore della funzione ausiliare θ definita dall' equazione

$$\theta=D_x u+D_y v+D_z w.$$

Ci basti di aver noi indicato la forma degli integrali generali del triplo sistema di equazioni (1), e tralascieremo altre ricerche, che potrebbero farsi sopra le medesime funzioni u, v, w, e dalle quali dipende la risoluzione di un qualche utile problema, e ci tratterremo alquanto nei nuovi paragrafi nel mostrare come la trasformazione di certi integrali definiti possa utilmente adoprarsi nella rappresentazione di alcune equazioni simboliche, quando alle quantità si sostituiscano delle caratteristiche.

14.° Sia f il simbolo di una funzione, e sia da trasformarsi l' integrale definito

$$\mathrm{P}=\int_0^{2\pi} f\left((a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\cos p\right)dp$$

in altro integrale definito, e nel quale ciascun elemento sia una funzione lineare di a, b. A questo oggetto osserviamo, che chiamando h una indeterminata potremo egualmente scrivere senza alterare il valore dell' integrale definito

$$\mathrm{P}=\int_0^{2\pi} f\left((a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\cos(p-h)\right)dp,$$

quindi sviluppando $\cos(p-h)$, e determinando h per mezzo delle equazioni di condizione

$$a=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\cos h, \qquad b=(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen} h, \quad \operatorname{tang} h=\frac{b}{a}$$

si avrà come ci eravamo proposti

$$\int_0^{2\pi} f\left(a\cos p+b\operatorname{sen} p\right)dp=\int_0^{2\pi} f\left((a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\cos p\right)dp.$$

Questa formola trovasi nel Tom. 5° degli *Exercices des Mathem.* del Sig. Cauchy, pag. 10, 1830. Per mostrarne fra le altre un' applicazione utile mutiamo a, b in B, C, e si prenda per la funzione f, l' espressione

$$f(x)=\frac{1}{A+x}$$

avremo evidentemente

$$\int_0^{2\pi}\frac{dp}{A+B\cos p+C\operatorname{sen} p}=\int_0^{2\pi}\frac{dp}{A+(B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}\cos p}.$$

D' altronde dall' integrale del primo membro per $A>(B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}$ abbiamo

$$\int_0^{2\pi}\frac{dp}{A+(B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}\cos p}=\frac{2\pi}{\sqrt{(A^2-B^2-C^2)}}$$

e per conseguenza

$$\frac{1}{\sqrt{(A^2-B^2-C^2)}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dp}{A+B\cos p+C\operatorname{sen} p}.$$

Che se di più si sostituisca Bi, Ci in luogo di B, C, ove sia $i=\sqrt{-1}$, si dedurrà ancora

$$\frac{1}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)}}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dp}{A+Bi\cos p+Ci\operatorname{sen} p}.$$

Questo integrale definito servì di base ad alcune eleganti ricerche analitiche pubblicate in Roma nel 1844 dal celebre *Jacobi*: esse sono relative a certe funzioni denotate con X_n, Y_n

celebri nelle Opere di Laplace e Legendre (Giornale arcadico Roma, 1844; Tom. 98°). Delle indicate formole d' integrali definiti se ne può trarre un partito utile per molte questioni di analisi, ed in particolare se ad A^2, B^2, C^2 s' intenda sostituito A^4, B^4, C^4; e così successivamente, come lo faremo vedere con qualche esempio in altra Memoria. Se alle costanti A, B, C si sostituiscano delle caratteristiche, allora le precedenti formole potranno utilmente adoprarsi alla ricerca della funzione principale, nella quale il coefficiente simbolico sia una certa funzione irrazionale delle caratteristiche, come si scorgerà da qualche esempio.

15.° Sia l' equazion caratteristica

$$(a^2 D^2_x + b^2 D^2_y + c^2 D^2_z)^{\frac{1}{2}} u = f(x, y, z)$$

si avrà dall' analogia delle potenze con le differenze

$$u = \frac{f(x, y, z)}{(a^2 D^2_x + b^2 D^2_y + c^2 D^2_z)^{\frac{1}{2}}},$$

quindi prendendo

$$A = a D_x, \quad B = b D_y, \quad C = c D_z$$

otterremo dalle formole dell' antecedente parag. 14°

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x, y, z)\, dp}{a D_x + bi \cos p\, D_y + ci \operatorname{sen} p\, D_z}.$$

Il valor simbolico di u indica che la questione si riduce alla ricerca di una funzione θ, che verifichi l' equazione a derivate parziali del 1° ordine, vale a dire

$$(a D_x + bi \cos p\, D_y + ci \operatorname{sen} p\, D_z)\, \theta = f(x, y, z).$$

Il che già si è fatto nel parag. 2°. Supponiamo $f(x, y, z) = 0$ è chiaro, che per il valore di θ si avrà

$$\theta = \frac{1}{a} \phi \left(\frac{ay - bi \cos p \,.\, x}{a}, \quad \frac{az - ci \operatorname{sen} p \,.\, x}{a} \right)$$

e perciò

$$u = \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \varphi \left(\frac{ay - bi \cos p \,.\, x}{a}, \quad \frac{az - ci \operatorname{sen} p \,.\, x}{a} \right) dp.$$

Tale sarà l' integrale dell' equazion caratteristica

$$(a^2 D^2_x + b^2 D^2_y + c^2 D^2_z)^{\frac{1}{2}} u = 0$$

ed ove φ rappresenta la funzione arbitraria. Non meno facile sarebbe la integrazione dell' equazione

$$(a^2 D^4_x + b^2 D^4_y + c^2 D^4_z)^{\frac{1}{2}} u = f(x, y, z);$$

infatti avendosi dall' analogia

$$u = \frac{f(x, y, z)}{(a^2 D^4_x + b^2 D^4_y + c^2 D^4_z)^{\frac{1}{2}}}$$

e prendendo

$$A = a D^2_x, \quad B = b D^2_y, \quad C = c D^2_z,$$

otterremo dalla nota formola

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x, y, z)\, dp}{a D^2_x + bi \cos p \, D^2_y + ci \operatorname{sen} p \, D^2_z};$$

l' integrale del secondo membro dipende dalla ricerca di una funzione θ, che soddisfi all' equazione caratteristica

$$(a D^2_x + bi \cos p \, D^2_y + ci \operatorname{sen} p \, D^2_z)\, \theta = f(x, y, z)$$

della quale in più modi se ne è determinato l' integrale nel parag. 8°: in questa guisa il valore di u sarà espresso da un' integrale definito triplo. Richiamando poi ciò che si è esposto nel parag. 10°, si vede che sarà sempre integrabile l' equazione

$$(A^2 D^m_x + B^2 D^m_y + C^2 D^m_z)^{\frac{1}{2}} u = f(x, y, z),$$

ove m sia un' intero della forma 2^r; infatti dal valor simbolico di forma irrazionale

$$u = \frac{f(x, y, z)}{(A^2 D^m_x + B^2 D^m_y + C^2 D^m_z)^{\frac{1}{2}}}$$

si passerà ad altro valor simbolico di forma razionale e ridotto alla metà del suo grado, quando nella più volte usata formola d'integrale definito del §. 14°, pongasi $\mathrm{A}\,\mathrm{D}^{\frac{m}{2}}_x$, $\mathrm{B}\,\mathrm{D}^{\frac{m}{2}}_y$, $\mathrm{C}\,\mathrm{D}^{\frac{m}{2}}_z$ invece di A, B, C, per cui fatto $\frac{m}{2}=n$, avremo

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(x,y,z)\,dp}{\mathrm{A}\,\mathrm{D}^n_x+\mathrm{B}i\cos p\,\mathrm{D}^n_y+\mathrm{C}i\,\mathrm{sen}\,p\,\mathrm{D}^n_z}\,.$$

Sotto il vincolo integrale ognun vede che il coefficiente di dp sarà l' integrale dell' equazione

$$(\mathrm{A}\,\mathrm{D}^n_x+\mathrm{B}i\cos p\,\mathrm{D}^n_y+\mathrm{C}i\,\mathrm{sen}\,p\,\mathrm{D}^n_z)\,\theta=f(x,y,z).$$

E siccome n è una potenza di 2, così l' integrale sarà incluso in quella classe di equazioni di già considerate nel precedente parag. 10.°

16.° L' uso dei simboli m' impegna anche a fare un tentativo per la rappresentazione di un qualche integrale d'indice frazionario: proponiamoci per esempio di determinare la funzione u, la quale verifichi l' equazione caratteristica d' indice frazionario $\frac{1}{2}$, vale a dire

$$\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}_x\,.\,u=f(x).$$

Secondo la consueta analogia delle potenze con le differenze, si avrà

$$u=\frac{f(x)}{\mathrm{D}^{\frac{1}{2}}_x}\,.$$

Ciò posto io prendo i due integrali definiti

$$\frac{1}{a}=\int_0^\infty e^{-ar}\,dr,\qquad e^{-a}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^\infty e^{-\left(y^2+\frac{a^2}{4y^2}\right)}\,dy.$$

Ponendo nel secondo ar invece di a, e sostituendolo nel primo, avremo

$$\frac{1}{a}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty e^{-\left(y^2+\frac{a^2r^2}{4y^2}\right)}\,dy\,dr.$$

Ora alla a sostituiremo una caratteristica $D^{\frac{1}{2}}_x$, ed otterremo dal valore di u simbolico

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} . e^{-\frac{r^2}{4y^2} D_x} f(x) \, dy \, dr,$$

ovvero

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} f\left(x - \frac{r^2}{4y^2}\right) dy \, dr.$$

Tale potrà essere l' interpretazione da darsi al simbolo d' integrazione d' indice $\frac{1}{2}$, ma questi modi di giungere ai valori degli integrali in proposito suppongono sempre il legittimo uso che possa farsi dei simboli, il che in qualche circostanza può esser soggetto ad una dovuta limitazione. Il Sig. *Liouville* in una Memoria d' analisi pubblicata nel Tom. 12° del Giornale del Sig. Crelle, 1834, pag. 273 richiama la formola generale da esso data, cioè

$$\int_0^\infty \varphi(x+\alpha) \, \alpha^{\mu-1} \, d\alpha = (-1)^\mu \, \Gamma(\mu) \int^\mu \varphi(x) \, dx^\mu$$

e che serve per gl' integrali d' indice μ; $\Gamma(\mu)$ rappresenta l' integrale Euleriano di seconda specie, e denotato da Legendre con simbolo $\Gamma(\mu)$. Essa pel caso anche di $\mu = \frac{1}{2}$ differisce dalla nostra. A questa Memoria di già forse troppo prolungata porremo termine coll' indicare brevemente l' uso che si può fare delle formole d' integrali definiti riportati al parag. 14° alla trasformazione e ricerca di altri integrali.

17.° Riprendiamo la formola

$$\frac{1}{\sqrt{(A^2 - B^2 - C^2)}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dp}{A + B\cos p + C \operatorname{sen} p}$$

e fatto $A = 1$, $B = x$, $C = 0$, si avrà

$$\frac{1}{\sqrt{(1 - x^2)}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dp}{1 + x\cos p}.$$

Da questa formola possiamo trarne diversi risultati; così eseguendo una derivazione dell' ordine n rapporto ad x, avremo

$$D^n_x \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}} = \pm \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos^n p \, dp}{(1 + x \cos p)^{n+1}}.$$

Eseguite le integrazioni definite nel secondo membro, si ricaverebbe il valore esplicito del primo. Nella medesima formola si moltiplichi per dx e si faccia l' integrazione, si ricaverà

$$\text{arc} . \text{sen}\,(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\log(1 + x \cos p)\, dp}{\cos p}.$$

Questa formola si ritrova in una recente Memoria del Signor Dott. *A. Winckler* di *Carlsruhe* nel Tom. 45°, pag. 103 del Giornale del Sig. Crelle, an. 1853. Alla medesima formola possono facilmente riportarsi molte altre, che trovansi nel Calcolo differenziale ed integrale del Signor Prof. *F. Raabe* di *Zurich*, Vol. 2°, pag. 411, an. 1843. Per avere più chiaramente sotto occhio qualcuna di quelle formole richiamiamo per $a > b$ l' integrale indefinito

$$\int \frac{dp}{a + b \cos p} = \frac{2}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \text{arc} . \text{tang} \left(\frac{(a-b) \tan \frac{1}{2} p}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \right).$$

Facciamo $a = 1$, $b = x$, ed integriamo fra i limiti $p = 0$, $p = \frac{\pi}{2}$, si avrà

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dp}{1 + x \cos p} = \frac{2}{\sqrt{(1-x^2)}} \text{arc} . \text{tang} \left[\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x} \right)} \right].$$

Si moltiplichi ora il primo e secondo membro per dx e s' integri relativamente ad x, si ricaverà

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1 + x \cos p)\, dp}{\cos p} = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \text{arc tang} \left[\sqrt{\left(\frac{1-x}{1+x} \right)} \right].$$

Sostituendo in questa formola $-x$ invece di x, si trova

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log(1 - x \cos p)\, dp}{\cos p} = -2 \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} \text{arc tang} \left[\sqrt{\left(\frac{1+x}{1-x} \right)} \right],$$

d' onde dalla sottrazione otteniamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{1+x\cos p}{1-x\cos p}\right)\frac{dp}{\cos p} = \pi \text{ arc. sen } (x).$$

Quest' integrale definito insieme ad altri dello stesso genere trovasi alla pag. 416 del citato Vol. 2° del Signor *Raabe*. Per dare infine un altro esempio, poniamo nella seconda delle formole di questo parag. $x = k \operatorname{sen} \phi$, ed integriamo invece fra i limiti $p = 0$, $p = \pi$, avremo per $k < 1$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sen}^2 \phi)}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dp}{1+k \operatorname{sen}\phi \cos p}.$$

Moltiplicando per $d\phi$, ed integrando, verrà

$$\int \frac{d\phi}{\sqrt{(1-k^2 \operatorname{sen}^2 \phi)}} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\int \frac{dp\, d\phi}{1+k \operatorname{sen}\phi \cos p}.$$

Il primo membro rappresenta una funzione ellittica di prima specie, e per le notazioni di Legendre si noterà con $F(k, \phi)$, mentre nel secondo membro integrando rapporto a ϕ abbiamo facilmente

$$\int \frac{d\phi}{1+k \operatorname{sen}\phi \cos p} = \frac{2}{\sqrt{(1-k^2\cos^2 p)}}.\text{arc tang}\left(\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\phi + k\cos p}{\sqrt{(1-k^2\cos^2 p)}}\right) + C.$$

Supponiamo per la costante C che l' integrale abbia luogo a partir da $\phi = 0$, avremo per la medesima

$$C = -\frac{2}{\sqrt{(1-k^2\cos^2 p)}}.\text{ arc tang}\left(\frac{k\cos p}{\sqrt{(1-k^2\cos^2 p)}}\right),$$

d' onde dopo la sostituzione e riduzione si troverà

$$\int \frac{d\phi}{1+k \operatorname{sen}\phi \cos p} = \frac{2}{\sqrt{(1-k^2\cos^2 p)}}.\text{ arc tang}\left(\frac{\operatorname{sen}\phi \sqrt{(1-k^2\cos^2 p)}}{1+\cos\phi + k\cos p \operatorname{sen}\phi}\right).$$

Di qui l' integrale rapporto a p sarà ridotto ad una funzione ellittica di prima specie, vale a dire

$$F(k, \phi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{dp}{\sqrt{(1-k^2\cos^2 p)}}.\text{ arc tang}\left(\frac{\operatorname{sen}\phi \sqrt{(1-k^2\cos^2 p)}}{1+\cos\phi + k\cos p \operatorname{sen}\phi}\right).$$

Per la funzione ellittica completa convien porre $\varphi = \frac{\pi}{2}$, d'onde

$$F(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{dp}{\sqrt{(1 - k^2 \cos^2 p)}} \cdot \text{arc tang} \left(\frac{\sqrt{(1 - k^2 \cos^2 p)}}{1 + k \cos p} \right).$$

A queste formole possono ridursi altre date dal citato Signor *Raabe*, ed anche più generalmente esse sono incluse in altri integrali da me esaminati in una Memoria nel Tom. 116° del Giornale arcadico, 1848. Aggiungiamo in ultimo che altra sostituzione invece di A, B, C nella prima formola di questo paragrafo, potrebbe somministrare una riduzione di trascendenti *Abeliani*, e che forse esporremo in altra Memoria.

Roma, 18 *Ottobre* 1854.

SOPRA UN MODO
DI VEDERE CON FACILITÀ I COLORI ACCIDENTALI
NOTA

DEL PROFESSORE CAV. STEFANO MARIANINI
SOCIO ATTUALE

Ricevuta adì 28 *Gennajo* 1855.

Egli è noto che se si guarda per lungo tempo un oggetto colorato, e poi a un tratto si rivolge lo sguardo ad uno bianco, questo appare tinto del colore complementario di quello dell'oggetto guardato a lungo. Questa esperienza non riesce a tutti. Quanto a me non riuscì mai compiutamente. Alle volte quando guardava fisso per quattro o cinque minuti primi una carta verde, dirigendo poi l' occhio su d' una bianca, mi apparivano per lo più delle macchie verdognole, oblunghe e fuggevoli, e rare volte qualche macchia rossigna, cioè del colore complementario di quel verde, sul quale aveva fissato l' occhio per qualche tempo. E tali prove io non poteva proseguire a lungo per la molta e quasi dolorosa stanchezza che ne derivava a' miei occhi. L' accidente mi fece conoscere un modo facilissimo di osservare siffatti colori complementari, detti in questo caso *accidentali*. Io stava davanti a un cammino, ove il fuoco era quasi spento, tuttavia teneva lo schermaglio come suol tenersi per difendere il volto. Ma siccome in realtà non v' era fuoco che offendesse, così io faceva scorrere e girare fra le dita, come per trastullo, il manico dello schermaglio. E ciò facendo mentre gli occhi erano diretti, non allo schermaglio, ma ad un oggetto ch' era sul cammino, io scorgeva comparire sullo schermaglio stesso un' alternativa di color verde e di color

roseo, essendo la carta che copriva quell' utensilio verde da una parte, e bianca dall' altra.

Non sapendo se questa facile maniera di procurar la visione de' colori accidentali sia conosciuta, io faccio argomento di questa breve nota la descrizione succinta degli esperimenti che ho fatti in proposito dopo quella prima osservazione.

1. Tenendo il mentovato schermaglio obbliquamente innanzi a me, e dirigendo gli occhi non ad esso, ma ad un oggetto più elevato, ed in modo che vedessi pure la superficie colorita dello schermaglio, voltato dopo tre o quattro minuti secondi lo schermaglio stesso, e senza cangiar la direzione degli occhi, anzi conservandoli immobili, io vedeva la superficie, non bianca com' era, bensì tinta del colore complementario.

Anche quando rivolgo lo schermaglio dopo un solo minuto secondo, appare la sensazione del colore accidentale, ma meno viva, e svanisce più presto.

Le carte azzurre, celesti, violacee, verdi, gialle, ranciate e rosse, e tutte queste in parecchie gradazioni mi presentarono il fenomeno: non le carte scure, come color di caffè torrefatto, o di noce, o di fuliggine. Le più comode alla mia vista sono le verdi chiare che mi offrivano per colore accidentale un bel roseo, e le celestine che mi offrivano un bel ranciato. Ed è con queste che ho istituito il maggior numero di prove.

2. Se si ripiglia l'esperimento, e, dopo di aver tenuto gli occhi diretti come dissi, e lo schermaglio in modo che si vegga, e volgente agli occhi la superficie colorata, se, appena voltato, si guarda allo schermaglio stesso, vedesi bianco tal qual è.

3. Invece di voltare lo schermaglio, si può mettere sotto di esso una carta o altra cosa bianca, e allora togliendo dopo qualche secondo lo schermaglio stesso da di sopra la carta, vedesi questa del colore complementario.

4. In vece di tenere gli occhi rivolti in alto, possono tenersi rivolti in basso o lateralmente, sempre per altro in modo che si conservino in quella posizione anche dopo che si è voltato lo schermaglio, o che si è rimosso dal luogo dov' era,

acciocchè venga scoperta la superficie bianca; ed il colore complementario appare egualmente.

5. In quest' ultimo caso, cioè quando non si volta lo schermaglio, ma se ne scopre la superficie bianca togliendo ad un tratto la carta colorata che la copriva, anco tenendo gli occhi rivolti ad un punto poco distante dallo schermaglio, appare il colore complementario.

6. Di più anche guardando fisso un punto segnato della carta colorata che copre una superficie bianca, accade il fenomeno, semprechè gli occhi si conservino in quella posizione anche dopo che è rimossa la detta carta colorata (1).

7. Qualunque sia la posizione in cui sono tenuti fissi gli occhi nel fare la prova, se poi, rimosso lo schermaglio, e mentre si ha la sensazione del colore complementario, si rivolgono gli occhi allo schermaglio stesso, lo si vede subito bianco com' è; ma se si torna a portar lo sguardo nella direzione di prima, si ricupera la sensazione del colore accidentale. Così, guardando di nuovo lo schermaglio, sparisce quel colore, e, ritornando alla guardatura antecedente, si rivede. Per altro questa seconda volta il colore appare sensibilmente più languido; e più ancora se si rifà la prova una terza volta.

8. Così se nell' atto che si rivolge lo schermaglio, o in altra guisa si scopre la superficie bianca, gettasi lo sguardo su di essa, e vi si tiene anche per qualche minuto secondo, rimessi gli occhi nella posizione di quando tenevasi lo schermaglio colla superficie colorata verso il volto, scorgesi pure il colore accidentale. E ciò vidi talvolta fin dopo otto secondi da che contemplava la superficie bianca.

---

(1) Se si pratica un foro nello schermaglio colorato, e si sovrappone ad una superficie bianca, e si guarda al centro dell' area che quel foro lascia vedere, rimosso lo schermaglio, e perseverando a guardare al detto punto (che giova averlo segnato perchè l' occhio stia più facilmente fermo), la superficie bianca, che era coperta, appare al solito tinta tutta quanta del colore complementario, ma l' area, che il foro lasciava scoperta, appare del colore dello schermaglio.

Quest' esperienza appartiene a mio figlio, come pure l' accennata in questo §. 6.

9. Quando la superficie bianca è più grande che lo schermaglio, e questo per conseguenza, posato sopra di essa, non la ricopre tutta, avviene che, tenuto per qualche minuto secondo l'occhio fisso a qualche punto, rimosso poi lo schermaglio, vedesi tinta del colore complementario la parte che esso ricopriva, vedesi cioè tinta la figura dello schermaglio stesso.

10. Quando poi, essendo la superficie bianca più grande, lo schermaglio è tenuto in guisa che rimane tutta sottratta alla vista, rimosso lo schermaglio stesso, tutta quanta quella superficie appare colorata.

Disteso in terra un cartone bianco di più d'un metro quadrato di superficie, indi, mediante uno schermaglio colorato, impedendo agli occhi, rivolti al solito ad altro oggetto, di vederlo, rimosso lo schermaglio stesso, è bello vedere quel cartone tutto quanto vivamente colorato.

11. Se l'esperienza viene eseguita avanti ad uno specchio, e si tiene lo sguardo diretto all'immagine dello schermaglio, voltato questo, e conservando agli occhi la stessa posizione, vedesi l'immagine bianca e lo schermaglio del colore complementario di quello che esso ha dall'altra parte.

12. La durata della suscettibilità di percepire il colore accidentale è per me eguale e quando tengo aperti gli occhi e rivolti come si conviene, e quando li tengo chiusi, e quando per un poco li tengo chiusi, e poi aperti, e poi chiusi di nuovo; e così fino a che è svanita affatto la percezione del colore accidentale.

13. Se una delle superficie dello schermaglio ha due colori, appajono i due complementari; per esempio, se la metà destra è ranciata e la sinistra celestina, cioè tinta del colore complementario del primo, presentandosi poscia la superficie bianca, essa appare tinta de' medesimi colori, ma col ranciato a sinistra e il celestino a destra.

14. Le accennate esperienze riescono egualmente anche facendo uso d'un occhio solo.

15. Se si comincia l' esperimento guardando con un occhio, e poi, nel momento che si volta o si leva lo schermaglio, si chiude quell' occhio e si guarda coll' altro dirigendolo pure com' era diretto il primo, non v' è apparizione di colore accidentale.

16. Se poi si comincia l' esperienza guardando con un occhio solo, poscia, voltato lo schermaglio, si guarda con entrambi, e diretti allo stesso modo, il colore complementario appare un po' languido.

17. In siffatte sperienze se sotto lo schermaglio colorato si tiene una carta essa pure colorata, ma diversamente dallo schermaglio, rimosso questo, la carta appare del colore che si otterrebbe mescolando il colore complementario a quello della carta stessa. Se per esempio lo schermaglio è ranciato, e la superficie sottoposta gialla, questa appare di color verde.

18. Fra i molti individui che ripeterono siffatte prove, pochissimi ne ho trovati, ai quali non riuscivano, e fu più raro ancora il caso di individui, il cui occhio era suscettibile solo per alcuni colori accidentali, e non per tutti. Avvenemi anco d' imbattermi in uno, il quale, sebbene sperimentasse colla dovuta attenzione ed esattezza, non riusciva a percepire que' colori accidentali; e dopo tre anni ripetute quelle sperienze gli riuscirono bene, quanto riuscirono sempre a me.

19. La luce naturale e diurna è la più adattata alla piena e più facile riuscita di siffatte sperienze, e per la mia vista giova meglio una luce diurna assai moderata.

20. Credo che il fenomeno in discorso dipenda dall' essere le parti laterali dell' organo visivo più sensibili che non le centrali; dipenda cioè dalla stessa causa la quale fa sì che spesse volte, guardando al cielo quando è un po' annebbiato, si vede un astro a qualche distanza dal luogo a cui sono diretti gli occhi, il qual astro non vedesi più se si dirigono gli occhi ad esso; e si rivede, se dassi agli occhi la prima direzione.

MEMORIA

DEL VICE-SEGRETARIO INGEGNERE

PIETRO DOMENICO MARIANINI

RELATIVA AI VALORI DELLE FUNZIONI DI UNA VARIABILE, CORRISPONDENTI A VALORI DELLA VARIABILE STESSA, PEI QUALI I SIMBOLI RAPPRESENTANTI LE FUNZIONI MEDESIME ASSUMONO GLI ASPETTI $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

CON APPENDICE RISGUARDANTE LA RICERCA DEI *MASSIMI* E *MINIMI* VALORI DELLE FUNZIONI DI UNA VARIABILE.

Presentata dal Socio Professore **Giovanni Brignoli de Brunnhoff**, *ed approvata dal Socio e Segretario Prof.* **Giuseppe Bianchi.**

Ricevuta il 23 *Febbrajo* 1855.

1. Indichiamo con $\varphi(x)$, $\psi(x)$ due funzioni della variabile x; con $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ le loro derivate prime; con $\varphi''(x)$, $\psi''(x)$ le loro derivate seconde, e così di seguito. Con a indichiamo una costante.

Se sarà $\varphi(a) = \varphi'(a) = \varphi''(a) = \ldots\ldots = \varphi^{(n-1)}(a)$ $= \psi(a) = \psi'(a) = \psi''(a) = \ldots\ldots = \psi^{(n-1)}(a) = 0$; ed inoltre, le $\varphi^{(n)}(x)$, $\psi^{(n)}(x)$, corrispondentemente ad $x = a$, non sieno *zero* entrambe ed abbiano due valori determinati (*) e finiti; la frazione $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ convergerà verso la quantità determinata $\frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}$ al convergere di x verso a. Onde si può anche dire che *il valore corrispondente ad* $x=a$ *della frazione* $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$

(*) Io soglio dire che una funzione $f(x)$ corrispondentemente ad $x = a$ *non ha valore determinato*, se essa funzione, al convergere di x verso a, non converge verso alcun limite; come accade per le funzioni $\operatorname{sen} \frac{1}{x-a}$, $\operatorname{sen} \log(x-a)^2$, ecc.

sarà uguale a $\frac{\varphi^{(n)}(a)}{\psi^{(n)}(a)}$, ritenendo però fatta la convenzione di chiamare *valore corrispondente ad* $x=a$ *della frazione* $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ il limite verso cui converge questa frazione al convergere di x verso a (*).

Da questo teorema notissimo si deduce che, se $\varphi(a)=\psi(a)=0$, ed inoltre le prime due derivate del medesimo ordine delle $\varphi(x)$, $\psi(x)$, le quali per $x=a$ non divengono zero entrambe, assumano per $x=a$ dei valori determinati e finiti; la frazione $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, al convergere di x verso a, convergerà verso il medesimo limite verso cui converge la $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$.

Ma, ritenuto $\varphi(a)=\psi(a)=0$, sarà egli vero in ogni caso che, se $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ converge verso un determinato limite al convergere di x verso a, anche $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ converga verso il medesimo

---

(*) Quando il simbolo rappresentante una funzione corrispondentemente ad $x=a$ prenda un aspetto il quale non rappresenti alcuna determinata quantità; ma però essa funzione converga verso un determinato limite A al convergere di x verso a; questo limite A si chiama, per convenzione, *valore corrispondente ad* $x=a$ *della funzione medesima.*

Senza questa convenzione la teoria della determinazione di quei valori delle frazioni, i quali corrispondono a valori della variabile pei quali i simboli rappresentanti le funzioni medesime assumono gli aspetti $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 0^0, ecc., ha un difetto analogo a quello che ha la teoria degli esponenti negativi e frazionarj esposta da alcuni autori, i quali non premettono alcuna convenzione sul significato delle espressioni algebriche affette da tali esponenti.

E infatti, volendo esporre la teoria suddetta senza quella convenzione, è duopo far uso della equazione

$$\frac{\varphi(a+\omega)}{\psi(a+\omega)}=\frac{\varphi^{(n)}(a)+\frac{\omega}{n+1}\varphi^{(n+1)}(a)+\text{ecc.}}{\psi^{(n)}(a)+\frac{\omega}{n+1}\psi^{(n+1)}(a)+\text{ecc.}}$$

pel caso di $\omega=0$; mentre essa non si dimostra, nè si può dimostrare vera, se non che pel caso in cui ω non sia zero.

limite al convergere di x verso a? E che, viceversa, se $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ converge verso un determinato limite al convergere di x verso a, converga verso il medesimo limite anche $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$? Circa tre mesi fa, io ho riscontrato che queste due proprietà in alcuni casi non hanno luogo. Era mia intenzione di far conoscere la cosa in una Memoria nella quale avrei esposte anche alcune altre osservazioni su diversi argomenti di Calcolo Sublime. Ma ora, che ho udito essersi annunciata una prossima pubblicazione sull' argomento *dei valori delle frazioni i quali si presentano sotto l' aspetto* $\frac{0}{0}$, mi sono determinato di pubblicare a parte i risultati delle mie osservazioni sull' argomento medesimo.

2. Innanzi a tutto mi è duopo di precisare il significato che attribuirò alla frase: *una quantità converge verso un' altra al convergere di una terza verso una quarta.*

Rappresentiamo con x una variabile, e con $f(x)$ una quantità reale il cui valore dipenda da quello della x. Con A, a rappresentiamo due quantità finite e costanti. Allorchè diremo che *la* $f(x)$ *converge verso il limite* A *quando la* x *crescendo converge verso* a, intenderemo d' indicare che ha luogo la proprietà seguente: « che, assegnata una quantità positiva e comunque piccola, esiste un' altra quantità positiva tale che la differenza tra $f(x)$ ed A riesce minore della prima di dette quantità positive ogniqualvolta sia $x < a$, e la differenza tra x ed a sia minore della seconda delle due quantità positive medesime. »

Allorchè diremo che *la* $f(x)$ *converge verso* A *quando la* x *decrescendo converge verso* a, intenderemo d'indicare che ha luogo la proprietà seguente: « che, assegnata una quantità positiva e comunque piccola, esiste un' altra quantità positiva tale che la differenza tra $f(x)$ ed A riesce minore della prima di dette quantità positive ogniqualvolta sia $x > a$ e la differenza tra x ed a sia minore della seconda. »

Le funzioni $bx \cdot \operatorname{sen}\frac{1}{x}$, $bx \cdot \operatorname{sen}\log x^2$, secondo ciò che abbiamo detto, convergono verso lo zero tanto al convergere di x verso zero crescendo, quanto al convergere di x verso zero decrescendo. Infatti, assegnata una quantità positiva e comunque piccola, che chiamo h, è manifesto che la differenza tra ciascuna delle due funzioni suddette e lo zero è minore di h ogniqualvolta la differenza tra la x e lo zero sia minore di $\frac{h}{b}$. Si noti poi che sì l'una che l'altra delle due medesime funzioni, nell'atto che la x si accosta allo zero continuamente ed indefinitamente, non si avvicina continuamente allo zero; ma invece, per un certo tratto si avvicina finchè zero diviene, poi si scosta fino ad un certo punto dello zero, poi di nuovo vi si accosta finchè zero diviene, e così di seguito senza fine.

Per indicare che la $f(x)$ converge verso A tanto al convergere di x verso a crescendo, quanto al convergere di x verso a decrescendo, si dirà semplicemente che *la x converge verso A al convergere di x verso a.*

Non espongo i significati che attribuirò alle frasi: $f(x)$ *converge verso A quando la x converge verso $+\infty$*; $f(x)$ *converge verso A quando la x converge verso $-\infty$*; $f(x)$ *converge verso $+\infty$ quando la x crescendo converge verso a*; ecc. perchè è facile immaginarli dopo le cose testè esposte. Passo al soggetto della presente Memoria.

3. Ecco il modo con cui sono riuscito a persuadermi che in alcuni casi (essendo $\varphi(a) = \psi(a) = 0$, ed essendo inoltre $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ tale da convergere verso un determinato limite A al convergere di x verso a) può avvenire che la $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ al convergere di x verso a non converga verso A.

Supponiamo $\varphi'(x)$ tale che la equazione $y = \varphi'(x)$, ritenute le coordinate rettangolari, rappresenti una curva, la quale nelle vicinanze della retta rappresentata dalla equazione $x = a$ abbia infiniti archi sopra e sotto dell' asse delle x analoghi a

quelli della curva rappresentata dalla equazione $y = \text{sen} \log (x - a)^2$, ovvero a quelli della curva rappresentata dalla $y = (x - a) \text{ sen} \log (x - a)^2$. Rappresentiamo con $\lambda(x)$ una funzione tale che la frazione $\frac{\lambda(x)}{\varphi'(x)}$ converga verso lo zero al convergere di x verso a; e riteniamo

$$\psi'(x) = \varphi'(x) + \lambda(x). \qquad \text{Avremo}$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi'(x) + \lambda(x)} = \frac{1}{1 + \frac{\lambda(x)}{\varphi'(x)}};$$

e siccome $\frac{\lambda(x)}{\varphi'(x)}$ converge verso lo zero al convergere di x verso a, così è manifesto che $\frac{1}{1 + \frac{\lambda(x)}{\varphi'(x)}}$, cioè $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ convergerà verso l' unità al convergere di x verso a.

Ora consideriamo l' area determinata dalla curva avente per equazione $y = \varphi'(x)$, dall' asse delle x, dalla retta avente per equazione $x = a$, e dall'ordinata corrispondente all'ascissa x. Quando x sia maggiore di a, riteniamo *positive* quelle porzioni di detta area, infinite di numero, che, rispetto all' asse delle x, si trovano dalla banda delle ordinate positive, e *negative* quelle, che si trovano dall' altra banda dell' asse medesimo; e, quando x sia minore di a, riteniamo invece *negative* quelle che sono dalla prima banda dell' asse delle x, e *positive* quelle che sono dall' altra. L' area suddetta rappresenterà la funzione $\varphi(x)$; giacchè tanto essa area, come questa funzione $\varphi(x)$, è ugnale all' $\int_a \varphi'(x)\, dx$.

Consideriamo anche l' area determinata dalla curva avente per equazione

$$y = \psi'(x), \quad \text{ossia} \quad y = \varphi'(x) + \lambda(x),$$

dall' asse delle x, dalla retta avente per equazione $x = a$, e dall' ordinata corrispondente all' ascissa x. Anche di questa area riteniamo *positive* quelle porzioni che, rispetto all' asse

delle x, sono dalla banda delle ordinate positive; e *negative* le altre; o viceversa; secondo che la x è maggiore ovvero minore di a. Essa area rappresenterà la funzione $\psi(x)$.

Ora non è difficile a persuadersi che la $\varphi'(x)$ potrà esser tale che le due aree che consideriamo, all' accostarsi della x ad a, passino successivamente dallo stato positivo allo stato negativo, poi da questo a quello, poi ancora da quello a questo, e così di seguito senza fine. Allora, tanto se riteniamo $x > a$, come se riteniamo $x < a$, una di esse aree si ridurrà a zero per una certa serie di valori della x sempre più prossimi ad a, e, per una certa serie analoga di valori della x, si ridurrà a zero l' altra. Ora, essendo $\lambda(x)$ legata alla sola condizione di rendere la frazione $\frac{\lambda(x)}{\varphi'(x)}$ convergente verso lo zero quando la x converge verso a, è manifesto che potrà soddisfare simultaneamente anche a quest' altra condizione: di far sì che tutti i valori di x, pei quali va a zero la seconda delle due aree che consideriamo e quindi anche la funzione $\psi(x)$, sieno diversi da quelli pei quali va a zero la prima e quindi anche la funzione $\varphi(x)$. Anzi è manifesto che quest' ultima condizione sarà adempiuta per la massima parte delle forme che può avere la funzione $\lambda(x)$. È poi evidente che, verificandosi questa condizione, la $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ non convergerà verso alcun limite al convergere di x verso a; ma si comporterà analogamente alla funzione $\tan.\log(x-a)^2$.

4. Convinto così della possibilità di una frazione $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, che assuma l' aspetto $\frac{0}{0}$ per un valore speciale a della x, e che al convergere di x verso a non converga verso alcun limite, benchè al convergere di x verso a converga verso un determinato limite la $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$; io mi accinsi a ricercare qualche esempio.

Eccone uno nella frazione

$$(1)\qquad \frac{\frac{x}{5}\left(\operatorname{sen}\log x^2 - 2\cos\log x^2\right)}{\frac{x}{5}\left(\operatorname{sen}\log x^2 - 2\cos\log x^2\right)+\frac{x^2}{10}\left(\operatorname{sen}2\log x^2 - 2\cos 2\log x^2\right)}\,.$$

Le derivate dei termini di questa sono i termini della seguente

$$(2)\qquad \frac{\operatorname{sen}\log x^2}{\operatorname{sen}\log x^2 + x\operatorname{sen}2\log x^2}\,.$$

I termini della (1) convergono manifestamente verso lo zero al convergere di x verso lo zero; e la frazione (2) converge verso l'unità al convergere di x verso lo zero. Infatti abbiamo

$$\lim\frac{\operatorname{sen}\log x^2}{\operatorname{sen}\log x^2 + x\operatorname{sen}2\log x^2} = \lim\frac{1}{1+x\frac{\operatorname{sen}2\log x^2}{\operatorname{sen}\log x^2}}$$

$$= \lim\frac{1}{1+2x\cos\log x^2} = 1\,.$$

La frazione (1) però, come vedremo, al convergere di x verso zero non converge verso alcun limite.

Essa intanto si riduce alla

$$\frac{\operatorname{sen}\log x^2 - 2\cos\log x^2}{\operatorname{sen}\log x^2 - 2\cos\log x^2 + \frac{x}{2}\left(\operatorname{sen}2\log x^2 - 2\cos 2\log x^2\right)}\,.$$

Ora assumo la formola generale

$$\operatorname{sen}a + h\cos a = \sqrt{1+h^2}\,.\operatorname{sen}(a + \operatorname{Ang\,tang} h)\,;$$

nella quale, ritenuta positiva la radice, conviene scegliere, tra gl' infiniti valori di $\operatorname{Ang\,tang} h$, uno qualunque di quelli che rendono $\operatorname{sen}(a + \operatorname{Ang\,tang} h)$ del medesimo segno di $\operatorname{sen}a + h\cos a$.

Pongo in essa formola $a = \log x^2$, $h = -2$; e poi pongo nella medesima $a = 2\log x^2$, $h = -2$; ed ottengo le due equazioni

$$\operatorname{sen}\log x^2 - 2\cos\log x^2 = \sqrt{5}\,.\operatorname{sen}(\log x^2 - \operatorname{Ang\,tang}2)\,,$$

$$\operatorname{sen}2\log x^2 - 2\cos 2\log x^2 = \sqrt{5}\,.\operatorname{sen}(2\log x^2 - \operatorname{Ang\,tang}2)\,,$$

nelle quali equazioni, come facilmente si vede, potremo ritenere che $\text{Ang}\,\text{tang}\,2$ rappresenti il più piccolo tra gli angoli positivi che hanno la tangente eguale a 2. Indicheremo questo angolo con δ. Col mezzo di queste due ultime equazioni, la frazione precedente si ridurrà alla

$$(3)\qquad \frac{\operatorname{sen}(\log x^2 - \delta)}{\operatorname{sen}(\log x^2 - \delta) + \frac{x}{2}\operatorname{sen}(2\log x^2 - \delta)};$$

e a quest' ultima frazione sarà uguale anche la (1).

Supponiamo ora assegnata una quantità positiva comunque piccola. Dico che si può attribuire alla x un valore positivo, minore della quantità assegnata e tale che la nostra frazione per esso si riduca allo zero, e che si può attribuire alla x medesima anche un valore positivo, minore della quantità assegnata e tale che la nostra frazione per esso si riduca al valore 1.

Sia infatti attribuito alla x un valore positivo, minore della quantità assegnata e tale che $\log x^2 - \delta$ sia un numero pari di volte la quantità $-\pi$. Ciò è sempre possibile. Indichiamo con $2n$ il numero pari suddetto; ed avremo

$$(\alpha)\qquad \log x^2 - \delta = -2n\pi,$$

e per conseguenza

$$2\log x^2 - \delta = -4n\pi + \delta.$$

Onde, per tale valore della x, il numeratore della (3) diviene zero; ed il denominatore diviene $\frac{x}{2}\operatorname{sen}\delta$, ossia $\frac{x}{\sqrt{5}}$. Questo valore di x ridurrà dunque allo zero la frazione (3) e perciò anche la (1).

Supponiamo ora che la x assuma quel valore positivo che soddisfa la equazione

$$(\beta)\qquad 2\log x^2 - \delta = -4n\pi.$$

Questo valore di x sarà minore del precedente; giacchè riduce la quantità $\log x^2$ eguale a $-2n\pi + \frac{\delta}{2}$, mentre

il precedente la riduce eguale a $-2n\pi + \delta$; onde questo nuovo valore di x sarà anch' esso minore della quantità assegnata. Esso poi soddisfarà la equazione

$$\log x^a - \delta = -2n\pi - \frac{\delta}{2}.$$

Pertanto sì il numeratore che il denominatore della (3), per questo nuovo valore della x ridurrassi a $-\frac{\text{sen}\,\delta}{2}$, e perciò la frazione (3), come pure la (1), acquisterà il valore 1.

Resta dunque dimostrato che, assegnata una quantità positiva e comunque piccola, si può attribuire alla x un valore positivo, minore di detta quantità e tale che la frazione (1), corrispondentemente ad esso, abbia il valore zero; e si può anche attribuire ad x un valore positivo, minore della quantità medesima e tale che, per esso, la frazione stessa acquisti il valore 1.

Da ciò ne segue che la frazione (1) non converge verso alcun limite quando la x converge verso lo zero decrescendo.

In modo simile si può dimostrare che la (1) non converge verso alcun limite quando la x converge verso lo zero crescendo (*).

(*) Nella ricerca di questo esempio mi sono giovato della formola

$$\int_0 dx\, x^n \,\text{sen}\log x^a = \frac{x^{n+1}}{a^2 + (n+1)^2}\Big((n+1)\,\text{sen}\log x^a - a\cos\log x^a\Big);$$

la quale ha la sua compagna

$$\int_0 dx\, x^n \cos\log x^a = \frac{x^{n+1}}{a^2 + (n+1)^2}\Big(a\,\text{sen}\log x^a + (n+1)\cos\log x^a\Big).$$

Queste formole si deducono facilmente dalle

$$d\Big(x^{n+1}\,\text{sen}\log x^a\Big) = (n+1)\,x^n\,dx\,\text{sen}\log x^a + a\,x^n\,dx\cos\log x^a$$

$$d\Big(x^{n+1}\cos\log x^a\Big) = (n+1)\,x^n\,dx\cos\log x^a - a\,x^n\,dx\,\text{sen}\log x^a.$$

Esse ponno servire alla ricerca di altri esempj analoghi.

5. Si può osservare che tra quel valore positivo della x, il quale rende

$$(\alpha) \qquad \log x^2 - \delta = -2n\pi$$

e quindi riduce il denominatore della (3) ad una frazione positiva, e quell' altro valore positivo della x, il quale rende

$$(\beta) \qquad 2\log x^2 - \delta = -4n\pi$$

e quindi riduce il denominatore suddetto ad una frazione negativa, ve ne dovrà essere uno il quale ridurrà a zero il denominatore medesimo. Questo valore di x ridurrà la funzione $\log x^2 - \delta$ ad un valore compreso tra $-2n\pi$ e $-2n\pi - \frac{\delta}{2}$; onde ridurrà il numeratore della (3) ad una quantità finita diversa dallo zero. Pertanto questo valore di x ridurrà la frazione (3) infinita. Qualunque altro valore poi della x intermedio ai due suddetti ridurrà manifestamente la frazione medesima ad un valore finito, ma minore di zero o maggiore di 1. Mentre dunque la x, variando con continuità, passa da quel valore che soddisfa la (α) a quello che soddisfa la (β), la frazione (3) dal valore zero perviene al valore 1 passando per tutti i valori negativi, per l' infinito e per tutti i valori positivi maggiori dell' unità. È poi facile a vedersi che, se la x variando con continuità passa dal valore che soddisfa la equazione

$$\log x^2 - \delta = -(2n+1)\pi$$

a quello che soddisfa la

$$2\log x^2 - \delta = -(4n+2)\pi,$$

allora la frazione (3) dal valore zero perviene al valore 1 trascorrendo per tutti i valori intermedj. Da ciò ne viene che, mentre la x converge verso lo zero decrescendo, la frazione (3), e perciò anco la (1), trascorre per tutti i valori possibili positivi e negativi una volta, due, tre, ec. senza fine.

Similmente si può dimostrare che la stessa cosa accadrà mentre la x converge verso lo zero crescendo.

6. Non è poi in ogni caso vero nemmeno che: se $\varphi(a) = \psi(a) = 0$, e $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ al convergere di x verso a converge verso un limite, anche $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ converga verso il medesimo limite al convergere di x verso a.

Noi abbiamo, per esempio, la frazione

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\operatorname{sen}\log x^2+\cos\log x^2\right)}, \tag{4}$$

i cui termini vanno a zero per $x = 0$; com' è manifesto. Essa poi, al convergere di x verso lo zero, converge verso $+\infty$. Infatti essa frazione è uguale alla

$$\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\operatorname{sen}\log x^2+\cos\log x^2\right)}.$$

Il massimo valore della quantità chiusa tra le parentesi è $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}$, il minimo è $1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}. = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$. Entrambi sono positivi. Dunque essa quantità, comunque varii la x, assume sempre valori positivi maggiori di $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ e minori di $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}$. Per conseguenza il denominatore della frazione precedente è sempre positivo e converge verso lo zero al convergere della x verso lo zero. Da ciò ne viene che essa frazione, e perciò anche la (4), è sempre positiva, e converge verso $+\infty$ al convergere della x verso lo zero.

Ora la frazione che ha per suoi termini le derivate dei termini della (4) è la seguente

$$\frac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}}{2x\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+2\cos\log x^2\right)}. \tag{5}$$

Questa è uguale alla

$$\frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+2\cos\log x^2\right)}. \tag{6}$$

Qui il massimo valore della quantità chiusa tra le parentesi è $3+\frac{1}{\sqrt{2}}$ quantità positiva; ed il minimo è $\frac{1}{\sqrt{2}}-1$ quantità negativa. È quindi manifesto che, mentre la x converge verso lo zero decrescendo, ed anche mentre essa converge verso lo zero crescendo, la quantità tra parentesi passa dal valore positivo $3+\frac{1}{\sqrt{2}}$ al valore negativo $\frac{1}{\sqrt{2}}-1$, poi da questo a quello, poi ancora da quello a questo, e così di seguito senza fine. Per conseguenza il denominatore della (6), al convergere di x verso zero, converge bensì verso zero, ma passa successivamente dallo stato positivo al negativo, poi dal negativo al positivo, poi di nuovo da questo a quello, e così di seguito senza fine. Onde la (6), e perciò anche la (5), al convergere di x verso zero crescendo, ed anche al convergere di x verso zero decrescendo, passa da valori positivi all' infinito, poi a valori negativi, indi ancora all' infinito, poi ancora a valori positivi, poi di nuovo all' infinito, e così di seguito senza fine. Dunque essa frazione non converge verso $+\infty$ al convergere di x verso lo zero.

7. Nel precedente esempio però si potrebbe dire che è infinito tanto il valore corrispondente ad $x=0$ della (4) come quello della (5); giacchè, se all' *unità* si dà per denominatore la frazione (4), si ottiene una frazione che, per $x=0$, ha il valore zero; e lo stesso avviene se all' unità si dà per denominatore la frazione (5). Ma può darsi il caso che, essendo $\varphi(a)=\psi(a)=0$, la frazione $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ converga verso un limite determinato e finito al convergere di x verso a, ed invece la $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, al convergere di x verso a, non converga verso alcun limite.

Onde persuaderci di ciò, supponiamo $\varphi(a)=0$, e $\varphi(x)$ tale che la equazione $y=\varphi(x)$ rappresenti una curva analoga a quella rappresentata dalla equazione

$$y=(x-a)\,\mathrm{sen}\log(x-a)^2,$$

la quale, nelle vicinanze della retta avente per equazione $x=a$, ha infiniti archi sopra e sotto dell' asse delle x aventi i termini nell' asse medesimo e privi di punti di regresso. Qui gli assi delle coordinate si ponno ritenere ortogonali, ovvero obbliqui, come piace. Rappresentiamo con $\lambda(x)$ una funzione tale che la frazione $\frac{\lambda(x)}{\varphi(x)}$ converga verso zero al convergere di x verso a. Sarà necessariamente $\lambda(a)=0$. Riteniamo $\psi(x)=\varphi(x)+\lambda(x)$; e sarà anche $\psi(a)=0$. Avremo poi

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi(x)}{\varphi(x)+\lambda(x)}=\frac{1}{1+\frac{\lambda(x)}{\varphi(x)}};$$

e, siccome $\frac{\lambda(x)}{\varphi(x)}$ converge verso zero al convergere di x verso a, così la frazione $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, al convergere di x verso a, convergerà verso l' unità.

La equazione poi $y=\varphi(x)+\lambda(x)$, cioè la $y=\psi(x)$, rappresenterà necessariamente una curva, che, nelle vicinanze della retta avente per equazione $x=a$, avrà infiniti archi sopra e sotto dell' asse delle x, i quali avranno i termini comuni con quelli della curva rappresentata dalla equazione $y=\varphi(x)$; altrimenti la $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, al convergere di x verso a, non convergerebbe verso alcun limite.

Ora, in ciascuno degl' infiniti archi della curva avente per equazione $y=\varphi(x)$, i quali hanno i termini nell' asse delle x, vi sarà un punto in cui la tangente alla curva sarà parallela all' asse medesimo; e, corrispondentemente ad x uguale all' ascissa di questo punto, avremo $\varphi'(x)=0$. Dunque la $\varphi'(x)$ va a zero per una certa serie di valori della x maggiori di a e sempre più prossimi ad a, ed anche per una certa serie di valori della x minori di a e sempre più prossimi ad a. Lo stesso può dirsi rispetto alla curva avente per equazione

$y = \varphi(x) + \lambda(x)$; onde anche la funzione $\varphi'(x) + \lambda'(x)$, cioè la $\psi'(x)$, va a zero per una certa serie di valori della x maggiori di a e sempre più prossimi ad a, ed anche per una certa serie di valori della x minori di a e sempre più prossimi ad a.

Ora, essendo $\lambda(x)$ legata alla sola condizione che $\frac{\lambda(x)}{\psi(x)}$ converga verso lo zero al convergere di x verso a, è manifesto ch' essa $\lambda(x)$ potrà soddisfare anche a quest' altra condizione: che quei punti della curva avente per equazione $y = \varphi(x) + \lambda(x)$, pei quali le tangenti sono parallele all' asse delle x, corrispondano tutti ad ascisse diverse da quelle dei punti analoghi della curva avente per equazione $y = \varphi(x)$. Soddisfatta che sia questa condizione, quei valori della x, per ciascuno de' quali la $\psi'(x)$ è zero, saranno tutti diversi da quelli, per ciascuno de' quali è zero la $\varphi'(x)$; e perciò la $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, al convergere di x verso a, non convergerà verso alcun limite, ma si comporterà analogamente alla funzione $\operatorname{tang}\log(x-a)^2$.

8. Anche dell' accidente, di cui abbiamo trattato nel precedente paragrafo, si ponno ideare degli esempj. Io indicherò soltanto quello della frazione

$$\frac{x \operatorname{sen}\log x^2}{x \operatorname{sen}\log x^2 + \frac{x^2}{4}\operatorname{sen} 2\log x^2}.$$

I termini di questa frazione vanno a zero per $x = 0$. Essa poi al convergere di x verso lo zero converge verso l' *unità*; giacchè abbiamo

$$\lim \frac{x \operatorname{sen}\log x^2}{x \operatorname{sen}\log x^2 + \frac{x^2}{4}\operatorname{sen} 2\log x^2} = \lim \frac{1}{1 + \frac{x}{4}\cdot\frac{\operatorname{sen} 2\log x^2}{\operatorname{sen}\log x^2}}$$

$$= \lim \frac{1}{1 + \frac{x}{2}\cos\log x^2} = 1.$$

Ora la frazione, avente per termini le derivate dei termini della precedente, è

$$\frac{\operatorname{sen}\log x^2 + 2\cos\log x^2}{\operatorname{sen}\log x^2 + 2\cos\log x^2 + \frac{x}{2}\left(\operatorname{sen} 2\log x^2 + 2\cos 2\log x^2\right)};$$

e questa, coll' ajuto della formola generale

$$\operatorname{sen} a + h\cos a = \sqrt{1+h^2}\operatorname{sen}(a + \operatorname{Ang}\operatorname{tang} h)$$

usata nel §. 4, si riduce alla

$$\frac{\operatorname{sen}(\log x^2 + \delta)}{\operatorname{sen}\left(\log x^2 + \delta\right) + \frac{x}{2}\operatorname{sen}\left(2\log x^2 + \delta\right)},$$

dove δ rappresenta il minore degli angoli positivi aventi la tangente eguale a 2.

La frazione precedente acquista il valore zero quando la x assume un valore che soddisfa la equazione

$$\log x^2 + \delta = -2n\pi,$$

ritenuto che n sia numero intiero e positivo; ed acquista invece il valore 1 quando la x assume un valore che soddisfa la equazione

$$2\log x^2 + \delta = -(4n+1)\pi.$$

Si può dunque dimostrare che la frazione medesima non converge verso alcun limite al convergere di x verso zero in un modo simile a quello, con cui si è dimostrata la stessa cosa per la frazione (3) del §. 4.

9. Passo ora ad una osservazione concernente quei valori di funzioni, i quali corrispondono a valori della variabile riducenti i simboli rappresentanti le funzioni medesime all' aspetto $\frac{\infty}{\infty}$.

Riteniamo $\varphi(a) = \psi(a) = \infty$. La frazione $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ per $x = a$ assumerà l' aspetto $\frac{\infty}{\infty}$. Ora, se questa frazione, al convergere di x verso a, converge verso un limite, verso il me-

desimo limite convergerà anco la frazione $\frac{\frac{1}{\psi(x)}}{\frac{1}{\varphi(x)}}$, la quale per $x=a$ prende l'aspetto $\frac{0}{0}$. Potremo forse da ciò dedurre che per ottenere il limite della $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ basterà trovar quello della frazione $\frac{\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)'}$? Per tutti i casi no; giacchè non possiamo esser certi che un tal metodo conduca a risultati esatti se non che nei casi in cui le prime due derivate del medesimo ordine delle funzioni $\frac{1}{\psi(x)}$, $\frac{1}{\varphi(x)}$, le quali per $x=a$ non divengono zero entrambe, al convergere di x verso a, convergano verso valori determinati e finiti; ed anche (come è facile a persuadersi) nei casi in cui una di esse derivate converga verso un limite determinato e finito, e l'altra verso l'infinito. (*)

Pei casi poi, ne' quali le frazioni $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, $\frac{\left(\frac{1}{\psi(x)}\right)'}{\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)'}$ convergono verso il medesimo limite al convergere di x verso a, si può dimostrare che il limite della $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ è uguale al limite della $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$; ma il ragionamento che si adopera non può, come è noto, aver luogo se non che nel caso in cui il limite della $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ sia diverso da zero e dall' infinito (**). Dunque il metodo di cercare il limite della $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ col rintracciare invece

---

(*) Io soglio dire che una quantità converge verso l'infinito al convergere di x verso a, tanto se essa, al convergere di x verso a, converge verso $+\infty$, come se essa converge verso $-\infty$, come pure se essa converge verso $+\infty$ al convergere di x verso a crescendo, e verso $-\infty$ al convergere di x verso a decrescendo, o viceversa.

(**) Tortolini. Elementi di Calcolo Infinitesimale. T. 1°, §. 58.

quello della $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$, non si può a rigore adottare se non che nel caso in cui si sappia già: 1° che la $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, al convergere di x verso a, converga verso un limite; 2° che questo limite non sia zero nè l' infinito; 3° che le prime due derivate del medesimo ordine delle funzioni $\frac{1}{\psi(x)}$, $\frac{1}{\varphi(x)}$, le quali, per $x=a$, non divengono zero entrambe, convergano verso valori determinati e finiti al convergere di x verso a; ovvero una di esse converga verso un valore determinato e finito, e l' altra verso l' infinito.

10. Da ciò ne segue che non è rigoroso l'applicare questo metodo alla determinazione dei limiti verso cui convergono le frazioni

$$(\gamma) \qquad \frac{\log x}{x^{-1}}, \quad \frac{a^{\frac{1}{x}}}{x^{-1}}, \qquad \frac{\log x}{\cot x}, \quad \frac{a^{\frac{1}{x}}}{\cot x}, \text{ ec.}$$

al convergere della x verso lo zero. E, quantunque esso metodo, applicato a tali frazioni, conduca a risultati esatti, non sarà superfluo il dimostrare, come farò nei seguenti paragrafi, che le frazioni $\frac{a^x}{x}$, $\frac{x}{\operatorname{Log} x}$ (quando a e la base del sistema logaritmico sieno quantità positive e maggiori della unità) convergono verso $+\infty$ al convergere della x verso $+\infty$; giacchè i limiti suddetti delle frazioni (γ) si ponno determinare con rigore e con molta facilità quando si conoscano quelli, verso cui convergono queste due ultime al convergere di x verso $+\infty$.

Riguardo alla funzione $\frac{a^x}{x}$, io dimostrerò che, assegnata una costante positiva comunque grande (che indico con m), esiste un'altra costante positiva (che chiamo α) tale che riesce $\frac{a^x}{x} > m$ ogniqualvolta sia $x > \alpha$. E così farò, perchè, quando

si dice che una funzione di una variabile x converge verso $+\infty$ al convergere di x verso $+\infty$, s' intende appunto di dire che, assegnata una costante positiva e comunque grande, ne esiste un' altra tale che quella funzione riesce maggiore della prima di dette costanti ogniqualvolta la x è maggiore della seconda.

Similmente farò anche riguardo alla funzione $\frac{x}{\operatorname{Log} x}$. Ma mi è duopo premettere alcuni lemmi.

1°. Nella serie

$$2^2,\quad 2^{2^2},\quad 2^{2^{2^2}},\ldots\ldots\ldots,$$

ogni termine della quale (tranne il primo) è il numero 2 con esponente eguale al termine che precede, dico che ciascun termine è maggiore del doppio del suo precedente.

Rappresentiamo infatti con 2^m un termine qualunque di questa serie. Il termine successivo sarà 2^{2^m}; ed m sarà manifestamente un numero intiero maggiore della *unità*. Avremo dunque

$$2^m = 1 + m + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3} + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)\ldots 2.1}{2.3\ldots\ldots m},$$

e quindi $\quad 2^m > 1 + m.\quad$ Per conseguenza sarà

$$2^{2^m} > 2^{1+m}, \qquad \text{cioè}$$

$$2^{2^m} > 2 . 2^m. \qquad \text{Dunque ec.}$$

2°. Da ciò ne viene che, data una quantità positiva e comunque grande, prolungando la serie

$$0,\ 1,\ 2,\ 2^2,\ 2^{2^2},\ldots\ldots\ldots,$$

si potrà giungere ad un termine di essa il quale superi la quantità data; e, per conseguenza, se la data quantità non sarà eguale ad uno dei termini della serie stessa, vi saranno

in essa due termini prossimi, tra i quali sarà compresa la quantità data medesima.

Lo stesso poi avrà luogo, ed a più forte ragione, per la serie

$$0, \ 1, \ a, \ a^a, \ a^{a^a}, \ldots\ldots,$$

purchè a rappresenti una quantità maggiore di 2.

3°. Rappresentata con a una quantità positiva non minore di 2, avremo la relazione $a^x > x$ per qualunque valore della x.

Infatti, se x è negativa, ovvero eguale a zero, tale relazione è soddisfatta evidentemente, giacchè a^x è sempre quantità positiva. Se poi la x è positiva, avremo che essa, o sarà un termine della serie

$$0, \ 1, \ a, \ a^a, \ a^{a^a}, \ldots\ldots,$$

ovvero sarà compresa tra due termini successivi della serie medesima. Avremo cioè $x > 0$ ed $x \leqq 1$; ovvero $x > 1$ ed $x \leqq a$; ovvero $x > a$ ed $x \leqq a^a$; ec.

Se sarà $x > 0$ ed $x \leqq 1$, avremo $a^x > a^0$, cioè $a^x > 1$, ed $1 \geqq x$; per cui $a^x > x$.

Se sarà $x > 1$ ed $x \leqq a$, avremo $a^x > a^1$, ed $a^1 \geqq x$; onde $a^x > x$.

In generale, indicando con m, a^m due termini successivi qualsivogliano della serie precedente, se sarà $x > m$ ed $x \leqq a^m$, avremo $a^x > a^m$, ed $a^m \geqq x$; onde $a^x > x$. Dunque resta dimostrato che la relazione $a^x > x$ sussiste per qualunque valore positivo della x quando a non sia minore di 2.

11. Ritenuto a non minore di 2, se venga assegnata una costante m positiva e comunque grande, esiste un' altra costante α positiva tale che riesce $\frac{a^x}{x} > m$ ogniqualvolta x è maggiore di α.

Dimostrazione. Ritenuta x positiva, sarà $\frac{a^x}{x} > m$ qualora sia $a^x > mx$. Quest' ultima relazione (indicando con p la frazione $\frac{x}{m}$) si cambia nella $a^{mp} > m.mp$. Questa sussiste se sussistono le due seguenti

$$a^{mp} > p^m, \quad p^m > m^2 p,$$

le quali equivalgono alle

$$a^p > p, \quad p^{m-1} > m^2.$$

La prima di queste due sussiste in ogni caso (§. prec., lemma 3°); la seconda sussiste se p è maggiore di $\sqrt[m-1]{m^2}$. Dunque se p, ossia $\frac{x}{m}$, sarà maggiore di $\sqrt[m-1]{m^2}$; ovvero, ciò che vale lo stesso, se x sarà maggiore di $m\sqrt[m-1]{m^2}$, noi avremo $a^x > mx$, ed $\frac{a^x}{x} > m$. Dunque ec.

12. Data una costante positiva m comunque grande, esiste un' altra costante positiva tale che, ogniqualvolta la x superi questa seconda costante, riesce $\frac{x}{\log x} > m$.

Dimostrazione. Rappresentiamo con y quella quantità che rende soddisfatta la equazione $x = e^y$, essendo indicata con e la base dei logaritmi neperiani. Avremo $\log x = y$, e perciò

$$\frac{x}{\log x} = \frac{e^y}{y}.$$

Ma pel teorema precedente sappiamo che esiste una costante positiva (che per brevità chiamerò α) tale che riesce $\frac{e^y}{y} > m$ purchè sia $y > \alpha$. Sarà dunque anche $\frac{x}{\log x} > m$ purchè sia $\log x > \alpha$, vale a dire, purchè sia $x > e^\alpha$. Dunque ec.

13. Il precedente teorema ha luogo anche se, invece del logaritmo neperiano di x, si pone il logaritmo di x preso in un sistema qualunque avente per base una quantità maggiore dell' unità.

Infatti, indicata con a la base del nuovo sistema, e con $\mathrm{Log}\,x$ il logaritmo di x preso nel sistema medesimo, avremo $\mathrm{Log}\,x = \frac{\log x}{\log a}$, e perciò

$$\frac{x}{\mathrm{Log}\,x} = \frac{x \log a}{\log x}.$$

Ora, pel teorema precedente, esiste una costante positiva β tale che riesce $\frac{x}{\log x} > \frac{m}{\log a}$ ogniqualvolta x è maggiore di β. Ma, quando $\frac{x}{\log x}$ è maggiore di $\frac{m}{\log a}$, è anche $\frac{x \log a}{\log x} > m$ (giacchè è $\log a > 0$); e questa relazione $\frac{x \log a}{\log x} > m$ equivale alla $\frac{x}{\mathrm{Log}\,x} > m$. Dunque ogniqualvolta sia $x > \beta$, sarà anco $\frac{x}{\mathrm{Log}\,x} > m$. Dunque ec.

14. Il teorema del §. 11 ha luogo anche quando a sia minore di 2 e maggiore di 1.

Infatti, indicata con y quella quantità che soddisfa la equazione $a^x = y$, e con $\mathrm{Log}\,y$ il logaritmo di y preso nel sistema avente per base a, avremo $x = \mathrm{Log}\,y$; e perciò

$$\frac{a^x}{x} = \frac{y}{\mathrm{Log}\,y}.$$

Ora, per ciò che dimostrai nel paragrafo precedente, esiste una costante positiva β tale che riesce $\frac{y}{\mathrm{Log}\,y} > m$ purchè sia $y > \beta$. Pertanto sarà anche $\frac{a^x}{x} > m$, purchè sia $a^x > \beta$, vale a dire, purchè sia $x > \frac{\log \beta}{\log a}$. Dunque ec.

15. Da quanto si è detto in questi quattro ultimi paragrafi ne segue che le due funzioni $\frac{a^x}{x}$, $\frac{x}{\mathrm{Log}\,x}$ convergono verso $+\infty$ al convergere della x verso $+\infty$ ogniqualvolta a e la base del sistema logaritmico sieno quantità maggiori dell' unità.

La dimostrazione data è indipendente dal calcolo differenziale. Lo scopo si otterrà con maggior brevità appoggiandosi al teorema che « qualora la derivata ennesima di una funzione

$f(x)$ sia reale, determinata e finita per tutti i valori della x da $x=0$ sino ad $x=a$, ritenuto che la x abbia un valore compreso tra zero ed a, esiste una quantità positiva i minore dell'unità, la quale rende soddisfatta la equazione

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)+\ldots\ldots+\frac{x^n}{2.3\ldots n}f^{(n)}(ix). \text{ »}$$

Applicando infatti questo teorema alla funzione a^x (nella quale ritengo $a>1$), e ponendo $n=2$, avremo che, per qualunque valore della x, esisterà una quantità positiva i minore dell'unità, che renderà soddisfatta la equazione

$$a^x=1+x\log a+\frac{x^2}{2}a^{ix}\log^2 a,$$

e perciò anche la seguente

$$\text{(A)} \qquad \frac{a^x}{x}=\frac{1}{x}+\log a+\frac{x}{2}a^{ix}\log^2 a.$$

Ora sia data una quantità positiva m comunque grande. Riteniamo x positiva. Noi avremo $\frac{a^x}{x}>m$ se sarà maggiore di m il secondo membro della (A). Ma esso secondo membro è maggiore del suo ultimo termine $\frac{x}{2}a^{ix}\log^2 a$, e quest' ultimo termine è maggiore di $\frac{x}{2}\log^2 a$ (giacchè a^{ix} è maggiore di 1). Dunque se sarà $\frac{x}{2}\log^2 a>m$, vale a dire, se sarà $x>\frac{2m}{\log^2 a}$, sarà anche, a più forte ragione, $\frac{a^x}{x}>m$. E così resta provato che, quando a è maggiore di 1, la funzione $\frac{a^x}{x}$ converge verso $+\infty$ al convergere di x verso $+\infty$.

Si può quindi dimostrare che la stessa proprietà ha luogo anche per la funzione $\frac{x}{\text{Log}\, x}$ (ritenuta maggiore dell' unità la base dei logaritmi) col metodo tenuto al §. 12 rispetto alla funzione $\frac{x}{\log x}$.

APPENDICE

SUI MASSIMI E MINIMI VALORI DELLE FUNZIONI DI UNA SOLA VARIABILE.

---

1. Dal poter accadere che una funzione di una variabile non converga verso alcun limite al convergere della variabile stessa verso una determinata quantità, ne viene di conseguenza che la teoria dei *massimi* e *minimi* valori delle funzioni di una variabile esige qualche modificazione. Esporrò qui brevemente questa teoria colle modificazioni che credo opportune; ommettendo però quelle dimostrazioni che sono conosciute.

2. Sia rappresentata da $f(x)$ una funzione della x; da a una costante. $f(a)$ si chiamerà *massimo valore della* $f(x)$, se esista una quantità positiva tale che riesca $f(a) > f(x)$ ogniqualvolta la differenza tra x ed a sia minore di detta quantità positiva. $f(a)$ si dirà *minimo valore della* $f(x)$, se esista una quantità positiva tale che riesca $f(a) < f(x)$ ogniqualvolta la differenza tra x ed a sia minore della quantità positiva medesima.

3. Sia rappresentato da a un valore della x corrispondente ad un massimo valore della funzione $f(x)$. Dico che la $f'(x)$, corrispondentemente ad $x=a$, o avrà per valore zero, o avrà per valore l'infinito, o finalmente non avrà valore determinato. (*)

Per convincersi della verità di questa proposizione basterà dimostrare che, qualora non si verifichi nè che la $f'(x)$ per $x=a$ sia infinita, nè che essa per $x=a$ non abbia valore determinato, sarà necessariamente $f'(a)=0$. O, in altri termini, basterà dimostrare che, se la $f'(x)$ corrispondentemente ad $x=a$ ha un valore determinato e finito, questo sarà necessariamente zero. Quest' ultima proprietà poi è notissima, e già dimostrata rigorosamente.

(*) Veggasi la prima Nota del §. 1 della Memoria.

4. Siamo dunque certi che, se $f(a)$ è un massimo valore della $f(x)$, o sarà $f'(a)=0$, ovvero sarà $f'(a)=\infty$, o finalmente la $f'(x)$ per $x=a$ non avrà valore determinato. Sarà bene l' esporre qui un esempio nel quale avviene che, essendo $f(a)$ un massimo, la $f'(x)$ per $x=a$ non ha valore determinato.

Consideriamo perciò il caso di

$$f(x)=1-(x-a)^2+(x-a)^4 . \operatorname{sen}\frac{1}{(x-a)^3}.$$

Siccome la funzione $\operatorname{sen}\frac{1}{(x-a)^3}$ non può avere che valori compresi tra -1 e $+1$; così il prodotto $(x-a)^4 . \operatorname{sen}\frac{1}{(x-a)^3}$ convergerà verso lo zero al convergere di x verso a. Ma anche $(x-a)^2$ converge verso lo zero al convergere di x verso a; dunque la $f(x)$, al convergere di x verso a, converge verso l' *unità*. Abbiamo perciò $f(a)=1$.

Ora la $f(x)$ può ridursi alla forma

$$(1) \qquad 1-(x-a)^2\left[1-(x-a)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{(x-a)^3}\right];$$

e siccome, ogniqualvolta la differenza tra x ed a sia minore dell' unità, noi abbiamo che la quantità

$$1-(x-a)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{(x-a)^3}$$

è positiva, ed è quindi positiva anche la

$$(x-a)^2\left[1-(x-a)^2 \operatorname{sen}\frac{1}{(x-a)^3}\right];$$

così, ogniqualvolta la differenza tra x ed a sia minore della unità, avremo che la quantità (1), cioè la $f(x)$, sarà minore di 1; avremo cioè $f(x)<f(a)$. Pertanto $f(a)$ è un massimo valore della $f(x)$.

Abbiamo poi

$$f'(x)=-2(x-a)+4(x-a)^3 \operatorname{sen}\frac{1}{(x-a)^3}-3\cos\frac{1}{(x-a)^3}.$$

I primi due termini di questo trinomio convergono verso lo zero al convergere di x verso a; ma il terzo termine, al convergere di x verso a, non converge verso alcun limite. Dunque la $f'(x)$, al convergere di x verso a, non converge verso alcun limite. Essa pertanto non ha valore determinato corrispondentemente ad $x=a$.

5. Sia ora rappresentato da a un valore della x corrispondente ad un minimo valore della $f(x)$. Dico che la $f'(x)$, per $x=a$, o avrà per valore zero, o avrà per valore l' infinito, o non avrà valore determinato; come quando ad $x=a$ corrisponde un massimo valore della $f(x)$.

Essendo infatti $f(a)$ un minimo valore della $f(x)$, avremo manifestamente che $-f(a)$ sarà un massimo valore della funzione $-f(x)$. Dunque, pel §. 3, la derivata di $-f(x)$, cioè $-f'(x)$, corrispondentemente ad $x=a$, o avrà per valore zero, o avrà per valore l' infinito, o non avrà valore determinato. Accadrà quindi lo stesso anche per la funzione $f'(x)$.

6. Riteniamo ora rappresentata con $f(x)$ una funzione della x la quale sia reale per qualsivoglia valore della x compreso tra due costanti; e con a riteniamo rappresentato uno di tali valori della x.

Se, delle successive derivate $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ec., la prima che per $x=a$ non diviene zero, avrà un valore determinato e finito corrispondentemente ad $x=a$, noi avremo (come già si sa dimostrare): che $f(a)$ sarà un massimo se la detta derivata sarà d' ordine pari e, per $x=a$, negativa: che $f(a)$ sarà un minimo se essa derivata sarà d' ordine pari e, per $x=a$, positiva: che $f(a)$ non sarà nè massimo nè minimo se la derivata medesima sarà d' ordine dispari.

Ma nel caso in cui, tra le funzioni $f'(x)$, $f''(x)$, ec., la prima che per $x=a$ non diviene zero, non abbia un valore determinato e finito corrispondentemente ad $x=a$, per conoscere se $f(a)$ sia un massimo od un minimo valore della $f(x)$, ovvero nè un massimo nè un minimo, converrà cercare di scoprire, con qualche particolare artifizio, se esista o no una

costante positiva tale che $f(a)$ riesca sempre maggiore ovvero sempre minore di $f(a+\omega)$ sinchè la differenza tra ω e lo zero non superi la detta costante; ed a tale scopo potrà giovare (come è noto) lo sviluppo straordinario della $f(a+\omega)$.

7. Da tutto ciò ne viene che, la regola generale per determinare i massimi ed i minimi valori di una funzione $f(x)$ d' una sola variabile, si può esporre come segue:

Si formi la equazione $f'(x)=0$, e si trovino que' valori della x che la soddisfanno. Sia rappresentato da a uno di questi valori. Onde riconoscere se $f(a)$ sia un massimo, ovvero un minimo, ovvero nè massimo nè minimo, si osservi innanzi tutto se sieno o no assegnabili due costanti, una maggiore, l' altra minore di a, e aventi la proprietà che la $f(x)$ sia reale per tutti i valori di x compresi tra esse; giacchè, se non saranno assegnabili, $f(a)$ non sarà nè massimo nè minimo. Se poi saranno assegnabili, si formi la $f''(x)$, e si osservi se essa per $x=a$ divenga o no zero. Nel caso che divenga zero, si formi anche la $f'''(x)$, e si osservi pure se questa per $x=a$ divenga o no zero. E così si prosegua sino a che si giunga alla prima delle $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{\text{IV}}(x)$, ec., che non diviene zero per $x=a$. Rappresentiamo questa con $f^{(n)}(x)$. Quando questa per $x=a$ abbia un valore determinato e finito, noi avremo che $f(a)$ sarà un massimo se n è pari ed $f^{(n)}(a)$ negativa; che $f(a)$ sarà un minimo se n è pari e $f^{(n)}(a)$ positiva; che $f(a)$ non sarà nè massimo nè minimo se n è dispari. Nel caso poi in cui $f^{(n)}(x)$ corrispondentemente ad $x=a$ sia infinita, ovvero non abbia valore determinato, per riconoscere se $f(a)$ sia un massimo ovvero un minimo converrà procedere come si è indicato nel paragrafo precedente. Lo stesso si faccia per ogni altro valore della x soddisfacente la equazione $f'(x)=0$. Per compiere poi la ricerca de' massimi e minimi valori della $f(x)$ farà duopo considerare ancora (quando ve ne sieno) quei valori della x che rendono la $f'(x)$ infinita, e quelli pe' quali la $f'(x)$ medesima non ha valore determinato; e cercar di scoprire, con artifizj particolari, se ad essi corrispondano o no massimi o minimi valori della $f(x)$.

Correzione ai paragrafi 3°, 5° e 7° dell' Appendice alla Memoria di P. D. Marianini.

(V. a pag. 369, Tomo XXV, P.te II.)

Ritenuto $f(a)$ un massimo, ovvero un minimo, della $f(x)$, potrebbe darsi (come fu avvertito dal Cauchy, credo per la prima volta) che, nell' atto in cui la x, variando con continuità, passa pel valore a, la $f'(x)$ passasse bruscamente da un valore determinato ad un altro.

Così, per esempio, la funzione $\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \frac{1}{2}x$ ha un valore massimo corrispondentemente ad $x=0$, e la sua derivata passa bruscamente dal valore $\frac{1}{2}$ al valore $-\frac{1}{2}$ nell' atto in cui la x crescendo con continuità passa per lo *zero*. Mi ha suggerito questo esempio la equazione $y=\frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ data dal Moigno (Leçons de Calcul différentiel etc. 1840. T. I, n.° 114) rappresentante una curva avente un punto saliente all' origine delle coordinate.

Questa circostanza porta di necessità che la proposizione del §. 3° si modifichi come segue:

« Sia rappresentato da a un valore della x corrispondente ad un massimo valore della funzione $f(x)$. Dico che la $f'(x)$, corrispondentemente ad $x=a$, o avrà per valore *zero*, o avrà per valore l' infinito, *o sarà soggetta ad un cangiamento brusco di valore*, o finalmente non avrà valore determinato. »

La dimostrazione poi esige pure un cambiamento, il quale non presenta veruna difficoltà.

Da tutto ciò si comprende come debban correggersi i paragrafi 5° e 7°.

Pietro Domenico Marianini.

INDICE

DELLE MEMORIE CONTENUTE

IN QUESTA II.ª PARTE DEL TOMO XXV

Nella Memoria sulla Classificazione delle Curve ecc. del Sig. Prof. Giusto Bellavitis, nella lin. 1ª, pag. 1, è scorso per involontario errore « SULLA CASSIFICAZIONE » dove invece deve leggersi « SULLA CLASSIFICAZIONE ».

ERRATA

per la Memoria intorno al Movimento ecc. di Francesco Brioschi

Pag. 161, lin. 7. Invece di « $r = \omega$, » leggi: « $r = \infty$. »
Pag. 163, lin. 4. Invece di « essere U funzione, » leggi: « essere G ed U funzioni. »